УДК 517.98

М. А. Муратов, В. И. Чилин

Центральные расширения $*$-алгебр измеримых операторов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

Описано нові класи заповнених $*$-підалгебр у $*$-алгебрі $LS(\mathcal{M})$ локально вимірних операторів, приєднаних до алгебри Неймана $\mathcal{M}$. Зокрема, введено $*$-алгебру $LS(\mathcal{M},\tau)$ τ-локально вимірних операторів, що асоційована з точним нормальним напівскінченним слідом τ на $\mathcal{M}$. Показано, що для алгебри Неймана $\mathcal{M}$ з σ-скінченним центром, а також для алгебр Неймана типу I $*$-алгебри $LS(\mathcal{M},\tau)$ та $LS(\mathcal{M})$ збігаються. У випадку алгебр Неймана типу II з не σ-скінченним центром $*$-алгебра $LS(\mathcal{M},\tau)$ істотно вужча, ніж $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$.

Развитие теории некоммутативного интегрирования для точного нормального полуконечного следа τ, заданного на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, привело к необходимости рассмотрения $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ τ-измеримых операторов (см., напр., [1]). Эта алгебра является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ были введены И. Сигалом (см. [2]) для описания "некоммутативного варианта" алгебр измеримых функций.

$*$-Алгебра $S(M)$ является одним из важных примеров EW^*-алгебр E замкнутых линейных операторов, присоединенных к алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и $\mathcal{M}$, у которых ограниченная часть $E_b = E \cap B(H)$ совпадает с $\mathcal{M}$ (см. [3]), где $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в H. Следующим полезным примером таких EW^*-алгебр стала $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре Неймана $\mathcal{M}$ (см. [4]). $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ содержит каждую EW^*-алгебру E с ограниченной частью $E_b = \mathcal{M}$ (см. [5]) и обладает важным свойством расширенности: для любого семейства $\{Z_j\}_{j\in J}$ попарно ортогональных центральных проекторов из $\mathcal{M}$ и любых операторов T_j из $LS(\mathcal{M})$ существует такой оператор $T \in LS(\mathcal{M})$, что $TZ_j = T_jZ_j$, $j \in J$.

В настоящей работе предлагается конструкция, позволяющая для каждой EW^*-алгебры E с $E_b = \mathcal{M}$ описывать наименьшую заполненную $*$-подалгебру в $LS(\mathcal{M})$, содержащую E и обладающую свойством расширенности.

Используется терминология, обозначения и результаты теории алгебр Неймана из [6] и теории измеримых и локально измеримых операторов из [2, 4, 7].

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в H, I — тождественный оператор в H, $P(B(H)) = \{P \in B(H)\colon P = P^2 = P^*\}$ — множество всех проекторов из $B(H)$. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана, действующая в H, $P(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \bigcap P(B(H))$, $P_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M})$ — множество всех конечных проекторов из $\mathcal{M}$, $Z(\mathcal{M})$ — центр в $\mathcal{M}$.

Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре Неймана $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(T) \subset H$, называется *измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $\{P_n^{\perp}\}_{n=1}^{\infty} \subset P_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M})$.

Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$ относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и сильного умножения, получаемых замыканием обычных операций сложения и умножения операторов (см. [2]). Если $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, то $*$-алгебра $S(Z(\mathcal{M}))$ операторов, измеримых относительно центра $Z(\mathcal{M})$, является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M})$ и совпадает с центром $Z(S(\mathcal{M}))$ алгебры $S(\mathcal{M})$. В общем случае имеет место следующее предложение.

Предложение 1. $Z(S(\mathcal{M})) = S(Z(\mathcal{M}))$ *в том и только в том случае, когда в* $\mathcal{M}$ *не существует последовательности попарно ортогональных не конечных центральных проекторов.*

Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре Неймана $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную область определения, называется *локально измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbb{C}$ относительно тех же алгебраических операций, что и $S(\mathcal{M})$ (см. [4]). При этом $S(\mathcal{M})$ является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$. В случае, когда $\mathcal{M}$ имеет конечный тип или когда $\mathcal{M}$ — фактор, алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ совпадают.

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(T)$ в H, называется *τ-измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(\mathcal{M})$, что $P(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов образует $*$-подалгебру в $S(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ и если след τ конечен, то $S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M})$.

Для каждого подмножества $E \subset LS(\mathcal{M})$ положим

$$E_h = \{T \in E \colon T^* = T\}, \qquad E_+ = \{T \in E \colon T \text{ — положительный оператор}\}.$$

Частичный порядок в $LS_h(\mathcal{M})$, порожденный собственным конусом $LS_+(\mathcal{M})$, будем обозначать через "$\leqslant$". Ясно, что этот частичный порядок индуцирует в $\mathcal{M}_h$ естественный частичный порядок.

$*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется *заполненной*, если из соотношений $|T| \leqslant |S|$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in \mathcal{A}$ следует, что $T \in \mathcal{A}$.

Каждая EW^*-алгебра E с $E_b = \mathcal{M}$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$ (см. [5]), в частности, $*$-алгебры $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$ — заполненные $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$.

Набор $\{Z_j\}_{j \in J}$ попарно ортогональных ненулевых центральных проекторов из $\mathcal{M}$ будем называть разбиением единицы I, если $\sup\limits_{j \in J} Z_j = I$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Обозначим через $E(\mathcal{A})$ множество всех тех операторов $T \in LS(\mathcal{M})$, для которых существует разбиение единицы $\{Z_j\}_{j \in J}$ и набор операторов $\{T_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}$ такие, что $TZ_j = T_j Z_j$ для всех $j \in J$. Ясно, что $\mathcal{A} \subset E(\mathcal{A})$ и $E(E(\mathcal{A})) = E(\mathcal{A})$.

Предложение 2.

(*i*) $E(\mathcal{A})$ — *$*$-подалгебра в* $LS(\mathcal{M})$*; при этом если* $\mathcal{A}$ — *заполненная $*$-подалгебра, то* $E(\mathcal{A})$ — *также заполненная $*$-подалгебра.*

(*ii*) *Если* $Z(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$, *то* $S(Z(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{A})$.

(*iii*) $E(S(\mathcal{M})) = E(LS(\mathcal{M})) = LS(\mathcal{M})$.

(*iv*) *Если* $\mathcal{M}$ *имеет тип III, то* $E(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра Неймана типа II и $\Phi\colon \mathcal{M} \mapsto Z(\mathcal{M})$ — центрозначный след (см., напр., [6, 7.11]). Согласно [6, 7.17], существуют такие проекторы $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(\mathcal{M})$, что $\Phi(Q_n) = (1/2^n)I$, в частности, $z(Q_n) = I$, где $z(Q_n)$ — центральный носитель проектора Q_n. Положим $P_n = \sup\limits_{i\geqslant n} Q_i$. Тогда $z(P_n) = I$, $\Phi(P_n) \leqslant (1/2^{n-1})I$, и поэтому $P_n \downarrow 0$.

Если $\mathcal{M}$ — неконечная алгебра Неймана типа II, то существует $Q \in P_{\text{fin}}(\mathcal{M})$, для которого $z(Q) = I$. Рассмотрим конечную алгебру Неймана $Q\mathcal{M}Q$, имеющую тип II. В силу сказанного выше, существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Q\mathcal{M}Q)$, что $P_n \downarrow 0$ и $z(P_n) = z(Q) = I$.

Выберем положительный оператор T из $LS(\mathcal{M})$, для которого

$$T(P_{n-1} - P_n) = n(P_{n-1} - P_n),$$

где $P_0 = 0$. Поскольку проектор $\{T \geqslant n+1\} = P_n \in P_{\text{fin}}(\mathcal{M})$, то $T \in S(\mathcal{M})$. Для любого $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}))$ имеем, что $ZP_n \neq 0$, и поэтому $TZ\overline{\in}\mathcal{M}$. Следовательно, $T\overline{\in}E(\mathcal{M})$, что влечет неравенство $E(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M})$.

Таким образом, получена следующая

Теорема 1. *Если* $\mathcal{M}$ *имеет тип II, то* $E(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M})$.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 установлено, что в случае, когда алгебра Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип II, существует такой положительный оператор $T \in S(\mathcal{M})$, что $TZ\overline{\in}\mathcal{M}$ для любого ненулевого центрального проектора $Z \in P(Z(\mathcal{M}))$, в частности, $S(\mathcal{M}) \nsubseteq E(\mathcal{M})$.

$*$-Алгебру $E(\mathcal{A})$ естественно называть центральным расширением $*$-алгебры $\mathcal{A}$. Как уже отмечалось, $E(E(\mathcal{A})) = E(\mathcal{A})$, т. е. $E(\mathcal{A})$ обладает следующим свойством расширенности: для любого разбиения единицы $\{Z_j\}_{j\in J}$ и любых операторов T_j из $E(\mathcal{A})$ существует такой оператор $T \in E(\mathcal{A})$, что $TZ_j = T_jZ_j$ для всех $j \in J$. Таким образом, $E(\mathcal{A})$ есть наименьшая $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, содержащая $\mathcal{A}$ и обладающая свойством расширенности.

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Следуя [4], оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ назовем *τ-локально измеримым*, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Множество всех τ-локально измеримых операторов обозначим через $LS(\mathcal{M},\tau)$. Ясно, что $S(\mathcal{M},\tau) \subseteq LS(\mathcal{M},\tau) \subseteq E(S(\mathcal{M},\tau))$ и $S(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M},\tau)$ в случае, когда след τ конечен или когда $\mathcal{M}$ — фактор.

Предложение 3. $LS(\mathcal{M},\tau)$ — *заполненная $*$-подалгебра в* $LS(\mathcal{M})$.

Если центр $Z(\mathcal{M})$ есть σ-конечная алгебра Неймана, то для любого оператора $T \in E(S(\mathcal{M},\tau))$ существует такое счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $TZ_n \in S(\mathcal{M},\tau)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M},\tau)$, т. е. в этом случае $LS(\mathcal{M},\tau) = E(S(\mathcal{M},\tau))$. На самом деле, σ-конечность центра $Z(\mathcal{M})$ обеспечивает совпадение $*$-алгебр $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— полуконечная алгебра Неймана,* τ *— точный нормальный полуконечный след на* $\mathcal{M}$*. Тогда:*

(*i*) *если центр* $Z(\mathcal{M})$ *—* σ*-конечен, то* $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$;

(*ii*) *если* $\mathcal{M}$ *имеет тип II и* $LS(\mathcal{M},\tau) = E(S(\mathcal{M},\tau))$, *то центр* $Z(\mathcal{M})$ *—* σ*-конечен и* $E(S(\mathcal{M},\tau)) = LS(\mathcal{M})$.

Доказательство. (i). *Случай 1.* Пусть алгебра Неймана $\mathcal{M}$ имеет конечный тип. Рассмотрим центрозначный след $\Phi\colon \mathcal{M} \mapsto Z(\mathcal{M})$ (см. [6, 7.11]). Для каждого оператора $T \in \mathcal{M}$ значение следа $\Phi(T)$ принадлежит замыканию по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ выпуклой оболочки элементов вида UTU^*, где U — унитарный оператор из $\mathcal{M}$ [6, 7.11]. Поэтому $\tau(\Phi(T)) = \tau(T)$. Если $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}))$, $0 \neq Q \leqslant Z$, $Q \in P(\mathcal{M})$, $\tau(Q) < \infty$, то $\tau(\Phi(Q)) < \infty$, и потому существует такой проектор $Z_0 \in P(Z(\mathcal{M}))$, что $0 \neq Z_0 \leqslant Z$ и $\tau(Z_0) < \infty$. Поскольку алгебра $Z(\mathcal{M})$ σ-конечна, то найдется счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\tau(Z_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, в частности, $TZ_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $T \in LS(\mathcal{M})$. Это означает, что $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

Случай 2. Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра Неймана. Рассмотрим $0 \leqslant T \in S(\mathcal{M})$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $\{T > \lambda_0\} = E_{\lambda_0}^{\perp}(T) \in P_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M})$. Тогда алгебра Неймана $\mathcal{N} = E_{\lambda_0}^{\perp}(T)\mathcal{M}E_{\lambda_0}^{\perp}(T)$ конечна и сужение $\tau_{\mathcal{N}}$ следа τ на $\mathcal{N}$ является полуконечным следом. Согласно случаю 1, найдутся такие проекторы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = z(E_{\lambda_0}^{\perp}(T))$ — центральный носитель проектора $E_{\lambda_0}^{\perp}(T)$, и $TZ_n \in S(\mathcal{N}, \tau_{\mathcal{N}}) \subset S(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $TE_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{M}$, то $T(I - z(E_{\lambda_0}^{\perp}(T))) \in \mathcal{M}$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$. Таким образом, $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M}, \tau)$, и потому $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

(ii). Пусть алгебра Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип II и центр $Z(\mathcal{M})$ не является σ-конечным. Поскольку след τ полуконечен, то существуют такое несчетное разбиение единицы $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ и проекторы $P_q \in P(\mathcal{M}Z_q)$, что $\tau(P_q) < \infty$ и $z(P_q) = Z_q$, $q \in \Delta$. Также как и при доказательстве теоремы 1, строим такие операторы $T_q \in S(\mathcal{M}Z_q, \tau)$, что

$$\{T \geqslant n+1\} \cdot Z \neq 0$$

для всех $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}Z_q))$.

Рассмотрим оператор $T_0 \in E(S(\mathcal{M}, \tau))$, для которого $T_0Z_q = T_q$ для всех $q \in \Delta$. Поскольку $E(S(\mathcal{M}, \tau)) = LS(\mathcal{M}, \tau)$, то существует такая последовательность $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n \uparrow I$ и $T_0Z'_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$, в частности, $\tau(E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)) < \infty$ при некотором натуральном $m_0 \geqslant 2$. Так как множество Δ несчетно, то найдется номер n_0, для которого $Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех q из некоторого несчетного подмножества $\Delta' \subset \Delta$. Следовательно, $\{T_q \geqslant m_0\}Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$. Поэтому проектор $E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)$ не является σ-конечным, что противоречит неравенству $\tau(E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)) < \infty$.

Следствие 1. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана типа II, у которой центр $Z(\mathcal{M})$ не σ-конечен, то $LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$.*

Теорема 3. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана типа I, то $LS(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана типа I_n, то существует набор $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ попарно ортогональных и попарно эквивалентных абелевых проекторов, для которых $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = I$. Возьмем произвольный положительный оператор T из $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Выберем попарно ортогональные проекторы $Q_m^{(i)} = \{m-1 \leqslant P_iTP_i < m\}$, принадлежащие $P_i\mathcal{M}P_i$, для которых $\|Q_m^{(i)}TQ_m^{i}\|_{\mathcal{M}} \leqslant m$, $\sup\limits_{m\geqslant 1} Q_m^{(i)} = P_i$ и $Q_m^{(i)} = P_iZ_m^{(i)}$, где $Z_m^{(i)} \in Z(\mathcal{M})$. Поскольку $z(P_i) = I$, то $Z_m^{(i)}Z_k^{(i)} = 0$ при $m \neq k$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\sup\limits_{m\geqslant 1} Z_m^{(i)} = I$. Из неравенства $\|\sqrt{T}P_iZ_m^{(i)}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \sqrt{m}$ следует, что $\sqrt{T}P_iZ_m^{(i)} \in \mathcal{M}$, и потому $\sqrt{T}P_i \in E(\mathcal{M})$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\sqrt{T} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{T}P_i \in E(\mathcal{M})$ и $T = (\sqrt{T})^2 \in E(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная конечная алгебра Неймана типа I. Тогда в $\mathcal{M}$ существует не более чем счетное разбиение единицы $\{Z_i\}$ такое, что алгебра Неймана $\mathcal{M}Z_i$ имеет тип I_{n_i}. Если $T \in S(\mathcal{M})$, то

$$TZ_i \in S(\mathcal{M}Z_i) = E(\mathcal{M}Z_i) \subset E(\mathcal{M}).$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{M}$ — неконечная алгебра Неймана типа I. Пусть $0 \leqslant T \in S(\mathcal{M})$. Выберем $\lambda_0 > 0$, для которого $E^{\perp}_{\lambda_0}(T) \in P_{\text{fin}}(\mathcal{M})$, и рассмотрим конечную алгебру Неймана $\mathcal{N} = E^{\perp}_{\lambda_0}(T)\mathcal{M}E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$, имеющую тип I. Из доказанного выше следует, что существует такая последовательность попарно ортогональных проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ $\subset Z(\mathcal{N}) = Z(\mathcal{M})E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} Q_n = E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$ и $Q_nTQ_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Выберем $Z_n \in z(E^{\perp}_{\lambda_0}(T)) \cdot Z(\mathcal{M})$, для которых $Q_n = Z_nE^{\perp}_{\lambda_0}(T)$. Тогда $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = z(E^{\perp}_{\lambda_0}(T))$. Поскольку $TE_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{M}$, то

$$TZ_n = TE^{\perp}_{\lambda_0}(T)Z_n + TE_{\lambda_0}(T)Z_n \in \mathcal{M} \qquad \text{для всех} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Положим $Z_0 = I - z(E^{\perp}_{\lambda_0}(T))$. Тогда $0 \leqslant TZ_0 \leqslant \lambda_0 Z_0$, и поэтому $T \in E(\mathcal{M})$. Следовательно,

$$LS(\mathcal{M}) = E(S(\mathcal{M})) \subset E(E(\mathcal{M})) = E(\mathcal{M}).$$

Из предложения 2 (iii) и теоремы 3 вытекает следующая

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана типа I, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.*

Следствие 2. *$LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда существует такой центральный проектор Z из $\mathcal{M}$, что алгебра Неймана $\mathcal{M}Z$ имеет тип II и не имеет σ-конечный центр.*

1. *Nelson E.* Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal. – 1974. – No 15. – P. 103–116.
2. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. – 1953. – **57**. – P. 401–457.
3. *Dixon P. G.* Unbounded operator algebras // Proc. London Math. Soc. – 1973. – **23**, No 3. – P. 53–59.
4. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1974. – No 74. – P. 257–268.
5. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Абстрактная характеризация EW^*-алгебр // Функц. анализ и его приложения. – 1991. – **25**, вып. 1. – С. 76–78.
6. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. – Tunbridge: Abacus Press, 1979. – 478 p.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2007. – 389 с.

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

Поступило в редакцию 01.12.2008

M. A. Muratov, V. I. Chilin

Central extensions of ∗-algebras of measurable operators

New classes of solid $*$-subalgebras in an $*$-algebra $LS(\mathcal{M})$ of locally measurable operators affiliated to a von Neumann algebra M are considered. In particular, an $*$-algebra $LS(\mathcal{M}, \tau)$ of τ-locally measurable operators, which is associated with a faithful normal semiinfinite trace is introduced. It is proved that the $*$-algebra $LS(\mathcal{M}, \tau)$ and $LS(\mathcal{M})$ coincide, if the center of von Neumann algebras is σ-finite or the von Neumann algebra is of type I. If the von Neumann algebra is of type II with non σ-finite center, then the $*$-algebra $LS(\mathcal{M}, \tau)$ is more slender that the $*$-algebra $LS(\mathcal{M})$.