

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.06.021>

УДК 539.3

**Я.М. Григоренко¹, О.Я. Григоренко¹,
М.М. Крюков², С.М. Яремченко¹**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

² Державний університет інфраструктури та технологій, Київ

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mmkryukov@ukr.net, yaremch@gmail.com

Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами

Представлено академіком НАН України Я.М. Григоренком

Дано розв'язок задачі про згин циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. За вихідні вибрано рівняння теорії оболонок на основі гіпотези прямої лінії. Підхід до розв'язання базується на параметризації поверхні оболонки, зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної методом сплайн-колокації та розв'язанні останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Проаналізовано вплив змінних геометричних параметрів на поля переміщень оболонок кругового і еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами.

Ключові слова: *некругові циліндричні оболонки, скісні зрізи, напружено-деформований стан, уточнена теорія оболонок.*

Задачі про напружено-деформований стан циліндричних оболонок з різними поперечними перерізами достатньо добре описані в науковій літературі [1]. Розв'язуванню таких задач методами сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації присвячені, наприклад, роботи [2, 3]. Кругові циліндричні оболонки зі скісними зрізами за допомогою вказаного підходу досліджувались в [4, 5]. В цьому повідомленні пропонується підхід до розв'язання задач статички некругових циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами на торцях, що базується на параметризації серединної поверхні оболонки [6, 7], яка дозволяє звести область розв'язання до прямокутної, а потім застосувати сплайн-апроксимацію і метод дискретної ортогоналізації.

Розв'язувальні рівняння для некругових циліндричних оболонок. За вихідні візьmemo рівняння теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії [8]. Нехай серединна

Цитування: Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 6. С. 21–29. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.06.021>

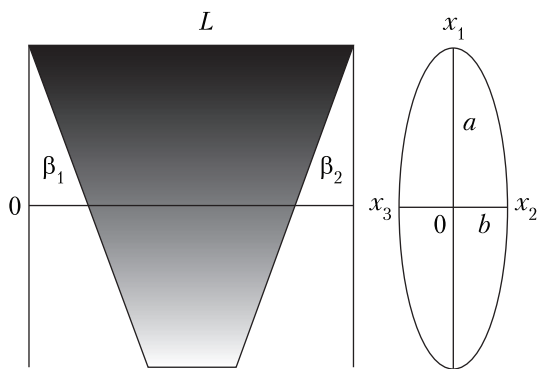


Рис. 1

поверхня циліндричної оболонки з некруговим перерізом задається в декартових координатах x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\alpha_2), \\ x_2 = f_2(\alpha_2), \\ x_3 = \alpha_1. \end{cases} \quad (1)$$

Поверхня віднесена до криволінійної ортогональної системи координат α_1, α_2 , а лінії $\alpha_1 = \text{const}$ і $\alpha_2 = \text{const}$ збігаються з лініями головних кривин, причому α_1 — довжина твірної.

Будемо розглядати замкнені циліндричні оболонки ($f_1 = a \cos \alpha_2, f_2 = b \sin \alpha_2$, рис. 1) з жорстко закріпленими торцями, під внутрішнім нормальним тиском q . Якщо за розв'язувальні рівняння вибрати переміщення серединної поверхні u_1, u_2, w та повні кути повороту ψ_1, ψ_2 , з вихідних рівнянь [8] отримаємо такі співвідношення для їх визначення:

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{14} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{15} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = 0, \\ & a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{22} u_2 + a_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{24} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{25} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + a_{26} w + \\ & + a_{27} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{28} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{29} \psi_2 + a_{2,10} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} = 0, \\ & a_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{32} u_2 + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{34} w + a_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + a_{36} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\ & + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + a_{38} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{39} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{3,10} q = 0, \\ & a_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{42} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{43} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{44} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + a_{45} \psi_1 + a_{46} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \\ & + a_{47} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + a_{48} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{49} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = 0, \\ & a_{51} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{52} u_2 + a_{53} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{54} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{55} w + a_{56} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\ & + a_{57} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{58} \psi_2 + a_{59} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{5,10} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{5,11} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= C_{11}A_2; \quad a_{12} = -\frac{C_{66}A_2}{A_2^2}; \quad a_{13} = \frac{C_{66}}{A_2}; \quad a_{14} = C_{12} + C_{66}; \quad a_{15} = C_{12}A_2k_2; \\
 a_{21} &= C_{12} + C_{66} - k_2^2D_{66}; \quad a_{22} = -K_2A_2k_2^2; \quad a_{23} = A_2C_{66}; \quad a_{24} = -\frac{C_{22}A_2}{A_2^2}; \quad a_{25} = \frac{C_{22}}{A_2}; \\
 a_{26} &= C_{22}k_2; \quad a_{27} = k_2(C_{22} + K_2); \quad a_{28} = D_{66}k_2; \quad a_{29} = K_2A_2k_2; \quad a_{2,10} = D_{66}A_2k_2; \\
 a_{31} &= -C_{12}A_2k_2; \quad a_{32} = -K_2k_2; \quad a_{33} = -k_2(C_{22} + K_2); \quad a_{34} = -C_{22}A_2k_2^2; \quad a_{35} = A_2K_1; \\
 a_{36} &= -\frac{K_2A_2}{A_2^2}; \quad a_{37} = \frac{K_2}{A_2}; \quad a_{38} = A_2K_1; \quad a_{39} = K_2; \quad a_{3,10} = A_2; \\
 a_{41} &= \frac{k_2D_{66}C_{11}A_2}{C_{66}}; \quad a_{42} = -\frac{D_{66}k_2}{A_2}; \quad a_{43} = \left(D_{66} - D_{12} + \frac{D_{66}C_{12}}{C_{66}} \right) k_2; \\
 a_{44} &= -A_2 \left(k_2^2 \left(D_{12} - \frac{C_{12}D_{66}}{C_{66}} \right) + K_1 \right); \quad a_{45} = -A_2K_1; \quad a_{46} = D_{11}A_2; \\
 a_{41} &= \frac{k_2D_{66}C_{11}A_2}{C_{66}}; \quad a_{42} = -\frac{D_{66}k_2}{A_2}; \quad a_{43} = \left(D_{66} - D_{12} + \frac{D_{66}C_{12}}{C_{66}} \right) k_2; \\
 a_{44} &= -A_2 \left(k_2^2 \left(D_{12} - \frac{C_{12}D_{66}}{C_{66}} \right) + K_1 \right); \quad a_{45} = -A_2K_1; \quad a_{46} = D_{11}A_2; \\
 a_{47} &= -\frac{D_{66}A_2}{A_2^2}; \quad a_{48} = \frac{D_{66}}{A_2}; \quad a_{49} = D_{12} + D_{66}; \\
 a_{51} &= -\frac{k_2}{C_{22}} (k_2^2 D_{22} D_{66} - (C_{12} + C_{66}) D_{22} + C_{22} D_{66}); \quad a_{52} = A_2 k_2 K_2 \left(1 - \frac{D_{22} k_2^2}{C_{22}} \right); \\
 a_{53} &= \frac{D_{22} C_{66} A_2 k_2}{C_{22}}; \quad a_{54} = -\frac{k_2 D_{22}}{A_2}; \quad a_{55} = -D_{22} k_2 k_2; \quad a_{56} = K_2 \left(\frac{D_{22} k_2^2}{C_{22}} - 1 \right); \\
 a_{57} &= D_{12} + D_{66} + \frac{k_2^2 D_{22} D_{66}}{C_{22}}; \quad a_{58} = K_2 A_2 \left(\frac{D_{22} k_2^2}{C_{22}} - 1 \right); \\
 a_{59} &= D_{66} A_2 \left(\frac{D_{22} k_2^2}{C_{22}} + 1 \right); \quad a_{5,10} = -\frac{D_{22} A_2}{A_2^2}; \quad a_{5,11} = \frac{D_{22}}{A_2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Величини C_{ij} , D_{ij} та K_i для ортотропного матеріалу мають вигляд

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad C_{12} = \nu_2 C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad C_{66} = G_{12} h; \\
 D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = \nu_2 D_{11}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \\
 D_{66} &= \frac{G_{12} h^3}{12}, \quad K_1 = \frac{5}{6} h G_{13}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{23},
 \end{aligned} \tag{4}$$

де A_2 – коефіцієнт першої квадратичної форми серединної поверхні ($A_1 = 1$); k_2 – кривина напрямної ($k_1 = 0$); E_i – модулі Юнга; G_{ij} – модулі зсуву; ν_i – коефіцієнти Пуасона ортотропного матеріалу; h – товщина оболонки.

Розв’язувальні рівняння для оболонок зі зрізами. Перейдемо від криволінійних координат α_1, α_2 до криволінійних координат ξ_1, ξ_2 , в яких областю зміни координат ξ_1, ξ_2 є прямокутна область. Тоді рівняння серединної поверхні оболонки приймають вигляд

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_2), \\ x_2 = f_2(\xi_2), \\ x_3 = \frac{\xi_1}{L}(L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(tg\beta_1 + tg\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))tg\beta_1, \end{cases} \quad (5)$$

$0 \leq \xi_1 \leq L, 0 \leq \xi_2 \leq 2\pi, \beta_1, \beta_2$ – кути зрізів (див. рис. 1).

Зв’язок між координатами ξ_1, ξ_2 і α_1, α_2 має вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\xi_1}{L}(L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(tg\beta_1 + tg\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))tg\beta_1, \\ \alpha_2 &= \xi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для довільної функції f мають місце такі формули для похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} &= \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + 2\lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= \lambda_4 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{L}{\Delta_1}; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} f_1; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} [f_1 \Delta_1 - 2(f_1)^2 (tg\beta_1 + tg\beta_2)]; \\ \lambda_4 &= -\frac{L}{\Delta_1^2} f_1 (tg\beta_1 + tg\beta_2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Delta_1 = (f_1 - f_1(0))(tg\beta_1 + tg\beta_2) + L; \quad \Delta_2 = Ltg\beta_1 - \xi_1(tg\beta_1 + \xi_1 tg\beta_2).$$

Використовуючи (7), з (2) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= -\frac{a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{11}\lambda_1^2 + a_{13}\lambda_2^2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{12}}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \\ &= -\frac{a_{14}\lambda_4}{a_{13}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{14}\lambda_1\lambda_2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{14}\lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{15}\lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} = & \frac{a_{21}\lambda_4}{a_{25}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{21}\lambda_1\lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{21}\lambda_1}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{22}u_2}{a_{25}} - \frac{a_{24}\lambda_2 + a_{25}\lambda_3}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \\
 & - \frac{a_{23}\lambda_1^2 + a_{25}\lambda_2^2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{24}}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{26}\bar{w}}{a_{25}} - \frac{a_{27}\lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} - \frac{a_{27}}{a_{25}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_2} \\
 & - \frac{a_{28}\lambda_4}{a_{25}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{28}\lambda_1\lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{28}\lambda_1}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{29}\psi_2}{a_{25}} - \frac{a_{2,10}\lambda_1^2}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2}, \\
 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi_2^2} = & \frac{a_{31}\lambda_1}{a_{37}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{32}u_2}{a_{37}} - \frac{a_{33}\lambda_2}{a_{37}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{33}}{a_{37}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{34}\bar{w}}{a_{37}} - \frac{a_{36}\lambda_2 + a_{37}\lambda_3}{a_{37}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} \\
 & - \frac{a_{35}\lambda_1^2 + a_{37}\lambda_2^2}{a_{37}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{36}}{a_{37}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{38}\lambda_1}{a_{37}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{39}\lambda_2}{a_{37}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{39}}{a_{37}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{3,10}q}{a_{37}}; \\
 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} = & \frac{a_{42}\lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{41}\lambda_1^2}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{42}}{a_{48}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{a_{43}\lambda_4}{a_{48}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{43}\lambda_1\lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} \\
 & - \frac{a_{43}\lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{44}\lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} - \frac{a_{45}\psi_1}{a_{48}} - \frac{a_{47}\lambda_2 + a_{48}\lambda_3}{a_{48}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{46}\lambda_1^2 + a_{48}\lambda_2^2}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} \\
 & - \frac{a_{47}}{a_{48}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{a_{49}\lambda_4}{a_{48}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{49}\lambda_1\lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{49}\lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \\
 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} = & \frac{a_{51}\lambda_4}{a_{5,11}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{51}\lambda_1\lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{51}\lambda_1}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{52}u_2}{a_{5,11}} - \frac{a_{54}\lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{53}\lambda_1^2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} \\
 & - \frac{a_{54}}{a_{5,11}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{55}\bar{w}}{a_{5,11}} - \frac{a_{56}\lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} - \frac{a_{56}}{a_{5,11}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_2} - \frac{a_{57}\lambda_4}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{57}\lambda_1\lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{57}\lambda_1}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\
 & - \frac{a_{58}\psi_2}{a_{5,11}} - \frac{a_{5,10}\lambda_2 + a_{5,11}\lambda_3}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{5,11}\lambda_2^2 + a_{59}\lambda_1^2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{5,10}}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

До системи диференціальних рівнянь (9) додамо умови жорсткого закріплення на контурах $\xi_1 = \text{const}$

$$u_1 = u_2 = \bar{w} = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0. \tag{10}$$

Двовимірну крайову задачу (9), (10) зведемо до одновимірної методом сплайн-колокації [9–11]. При цьому будемо застосовувати сплайни на проміжку $\xi_1 \in [0, L]$. На твірних $\xi_2 = 0$ та $\xi_2 = \pi$ використаємо умови симетрії:

$$u_2 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = 0. \tag{11}$$

Одновимірну крайову задачу розв'яжемо методом дискретної ортогоналізації [12].

Числові розв'язки. Розглянемо деформацію замкненої оболонки еліптичного поперечного перерізу, тобто $f_1 = a \cos \xi_2$, $f_2 = b \sin \xi_2$ (a, b – півосі еліпса, див. рис. 1). Матеріал обо-

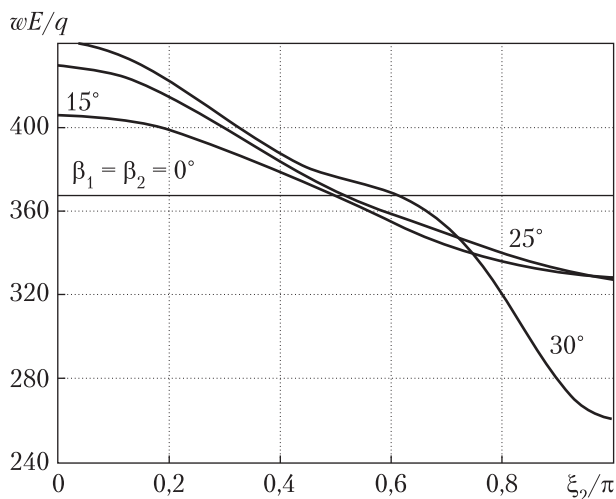


Рис. 2

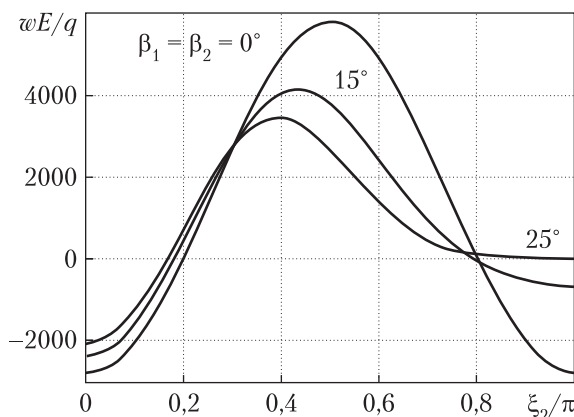


Рис. 3

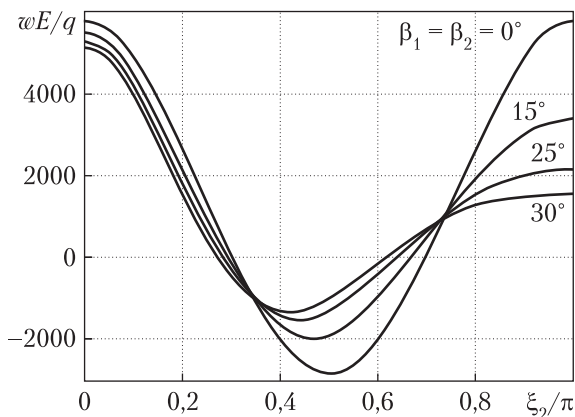


Рис. 4

лонки ізотропний ($\nu = 0,3$), $L = 60$, $h = 1$. Розрахунки проведено при 20 точках колокації і 400 точках інтегрування з дискретною ортогоналізацією.

Дослідимо переміщення в перерізі $\xi_1 = L/2$ для таких геометричних параметрів оболонки $\beta_1 = \beta_2 = 0^\circ; 15^\circ; 25^\circ; 30^\circ$, $a = b = 20$; $a = 16, b = 25$; $b = 16, a = 25$.

На рис. 2 показано розподіли переміщень wE/q (E – модуль Юнга) для оболонки з круговим поперечним перерізом ($a = b = 20$). Порівняння отриманих результатів з результатами [5] показало їх повний збіг. Як видно з рисунка, при збільшенні кутів прогин у точці $\xi_2 = 0$ зростає, а при $\xi_2 = \pi$ він зменшується.

Розподіл переміщень для $b = 16, a = 25$ в залежності від кутів зрізу проілюстровано на рис. 3. Результати для частинного випадку $\beta_1 = \beta_2 = 0^\circ$ порівнювались з результатами, отриманими за методикою [2, 3]. Вони також повністю збігаються. Як видно з графіків, максимальні прогини для оболонки з еліптичним поперечним перерізом більші в порівнянні з круговим циліндром на порядок. В перерізі $\xi_2 = 0$ переміщення майже не змінюються в залежності від кутів зрізу, а при наближенні $\xi_2 = \pi$ їх модулі зменшуються. При $\beta_1 = \beta_2 = 25^\circ$ оболонка в околі $\xi_2 = \pi$ майже не деформується.

Для випадку $b = 16, a = 25$ (рис. 4), максимальні переміщення wE/q спостерігаються при $\xi_2 = 0$ і, так як і в попередньому випадку, мало залежать від кутів зрізів. Однак у точці $\xi_2 = \pi$ для $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$ переміщення більш ніж утричі зменшуються в порівнянні з оболонкою без зрізів.

Наведені результати показують ефективність запропонованого підходу, який дозволяє проводити багатоваріантні числові експерименти для вибору раціональних параметрів циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з косими зрізами.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross section. A survey. *Appl. Mech. Rev.* 1999. **52**, № 8. P. 237–274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
2. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Krizhanovskaya T.V. Improved calculation of the stress-strain state of orthotropic noncircular cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 1992. **28**, № 1. P. 54–60. <https://doi.org/10.1007/BF00847330>
3. Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Stress analysis of orthotropic noncircular cylindrical shells of variable thickness in a refined formulation. *Int. Appl. Mech.* 2004. **40**, № 3. P. 266–247. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000031908.21514.3b>
4. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Kholkina N.S. Spline-approximation solution of stress-strain problems for beveled cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 2009. **45**, № 12. P. 1357–1364. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0273-9>
5. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Крюков Н.Н., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с косыми срезами в уточненной постановке на основе сплайн-аппроксимации. *Прикл. механика.* 2020. **56**, № 3.
6. Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. Москва: Наука, 1989. 208 с.
7. Крюков М.М., Ляшко О.В., Шутовський О.М., Андрейцев А.Ю. Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. Матеріали 18 Міжнар. наук. конф. ім. академіка Кравчука, Київ, 7-10 жовтня, 2017 р. Київ: НТУУ “КПІ”. С. 95–98.
8. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
9. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. 352 с.
10. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N. Solution of problems of the theory of plates and shells with spline functions (survey). *Int. Appl. Mech.* 1995. **31**, № 6. P. 413–434. <https://doi.org/10.1007/BF00846794>
11. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н., Крюков Н.Н. и др. Численные методы. Киев: “А.С.К”, 2002. 448 с. (Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 11).
12. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. Kyiv: Akadempriodyka, 2009. 550 p.

Надійшло до редакції 06.02.2020

REFERENCES

1. Soldatos, K. P. (1999). Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross section. A survey. *Appl. Mech. Rev.*, 52, No. 8, pp. 237-274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
2. Grigorenko, Ya. M., Kryukov, N. N. & Krizhanovskaya, T. V. (1992). Improved calculation of the stress-strain state of orthotropic noncircular cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.*, 28, No. 1, pp. 54-60. <https://doi.org/10.1007/BF00847330>
3. Grigorenko, Ya. M. & Yaremchenko, S. N. (2004). Stress analysis of orthotropic noncircular cylindrical shells of variable thickness in a refined formulation. *Int. Appl. Mech.*, 40, No. 3, pp. 266-247. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000031908.21514.3b>

4. Grigorenko, Ya. M., Kryukov, N. N. & Kholkina, N. S. (2009). Spline-approximation solution of stress-strain problems for beveled cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.*, 45, No. 12, pp. 1357-1364. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0273-9>
5. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya., Kryukov, N. N. & Yaremchenko, S. N. (2020). Calculation of cylindrical shells with beveled cuts in refined formulation on the basis of spline-approximation. *Int. Appl. Mech.*, 56, No. 3 (in Russian).
6. Kornishin, M. S., Paimushin, V. N. & Snigirev, V. F. (1989). *Computational geometry in shell mechanics problems*. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Kryukov, N.N., Lyashko, O.V., Shutovskyi, O.M., Andreytsev, A.Yu. (2017). Using B-splines for solution of the problem on deformation of noncircular cylindrical shell with beveled cuts. 18 International Kravchuk scientific conference materials, Kyiv, 7-10 October, 2017. Kyiv: NTUU "KPI", pp. 95-98 (in Ukrainian).
8. Grigorenko, Ya. M., Vasilenko, A. T. & Golub, G. P. (1987). *Static of anisotropic shells with finite shear stiffness*. Kyiv: Naukova dumka (in Russian).
9. Zavalov, Yu. S., Kvasov, Yu. I. & Miroshnichenko, V. L. (1980). *Spline-functions methods*. Moscow: Nauka (in Russian).
10. Grigorenko, Ya.M., Kryukov, N.N. (1995). Solution of problems of the theory of plates and shells with spline functions (survey). *Int. Appl. Mech.* 31, No. 6, pp. 413-434. <https://doi.org/10.1007/BF00846794>
11. Grigorenko, Ya.M., Shevchenko, Yu.N., Kryukov, N.N. et al. (2002). *Numerical methods*. Kiev: "A.S.K". (Mechanics of composites: in 12 vol.; Vol. 11) (in Russian).
12. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya., Vlaikov, G.G. (2009). *Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models*. Kyiv: Akadempriodyka.

Received 06.02.2020

Я.М. Григоренко¹, А.Я. Григоренко¹,
Н.Н. Крюков², С.М. Яремченко¹

¹ Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

² Государственный университет инфраструктуры и технологий, Киев

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mmkryukov@ukr.net, yaremch@gmail.com

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ С КОСЫМИ СРЕЗАМИ

Дано решение задачи об изгибе цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением со скошенными срезами. В качестве исходных выбраны уравнения теории оболочек на основе гипотезы прямой линии. Подход к решению основан на параметризации поверхности оболочки, приведении двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-коллокации и решении последней устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Проанализировано влияние переменных геометрических параметров на поля перемещений оболочек кругового и эллиптического сечения с косыми срезами.

Ключевые слова: некруговые цилиндрические оболочки, косые срезы, напряженно-деформированное состояние, уточненная теория оболочек.

Ya.M. Grigorenko¹, A.Ya. Grigorenko¹,
N.N. Kryukov², S.N. Yaremchenko¹

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

² State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, mmkryukov@ukr.net, yaremch@gmail.com

STRESS-STRAIN STATE OF ELLIPTIC CROSS-SECTION CYLINDRICAL SHELLS WITH BEVELED CUTS

The solution to the problem on the bending of cylindrical shells with an elliptic cross-section with beveled cuts is given. The relations of the theory of shells based on the straight line hypothesis is used. Systems of partial differential equations are obtained from the equilibrium equations of shell theory for determining displacements

and total angles of rotation of a non-circular cylindrical shell. The initial relations are written for an orthogonal coordinate system, the coordinate lines of which are the generatrix and directrix of the cylinder. A new non-orthogonal coordinate system is chosen and associated with the original one. The non-rectangular region of the old system for a non-circular shell with beveled cuts is transformed into a rectangular one in the new coordinates by the substitution of the coordinates. This allowed us to use the spline-collocation method to reduce two-dimensional boundary problem, which describes the stress-strain state of the shell, to a one-dimensional one. The one-dimensional boundary-value problem is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. Using the described approach, problems of the stress-strain state of closed shells with an elliptic cross-section under the action of a uniformly distributed internal pressure with clamped beveled cuts are solved. To assess the reliability of the approach using the described methodology, problems for non-circular shells without beveled cuts, as well as for circular shells with beveled cuts, which are special cases, are solved. The displacements of the mid-surface of the shells are compared depending on the cut angles for circular and elliptic cross-section shells.

Keywords: *noncircular cylindrical shells, beveled cuts, stress-strain state, refined shell theory.*