

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.01.039>

УДК 539.3

**Є.А. Сторожук**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: stevan@ukr.net

## **Сумісні скінченні елементи з векторною апроксимацією невідомих для розрахунку тонких оболонок складної геометрії**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком*

*Дано постановку і розроблено методу чисельного розв'язання крайових задач для тонких оболонок складної форми при дії статичного навантаження. Розв'язувальні рівняння в переміщеннях отримані з умов стаціонарності функціоналу Лагранжа з використанням теорії непологих оболонок Кірхгофа–Лява і методу скінченних елементів. Запропоновано два варіанти сумісних скінченних елементів, в яких реалізовано векторну форму апроксимації шуканих величин і дискретне виконання геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява.*

**Ключові слова:** *оболонки складної форми, статичне навантаження, метод скінченних елементів, векторна апроксимація, дискретні гіпотези Кірхгофа–Лява.*

Розв'язувальні рівняння в переміщеннях теорії тонких оболонок (модель Кірхгофа–Лява) при застосуванні методу скінченних елементів (МСЕ) отримують з умов стаціонарності функціоналу Лагранжа, в якому кути повороту дотичних до координатних ліній обчислюються за формулами через вектор переміщень точок серединної поверхні у відповідності з гіпотезами Кірхгофа–Лява, що призводить до появи похідних другого порядку і ускладнює процес дискретизації задачі [1, 2].

Також слід відзначити, що у випадку тонких оболонок складної геометрії, коли контурні лінії і, відповідно, сторони скінченних елементів (СЕ) можуть не збігатися з координатними лініями, виникають значні математичні труднощі при виконанні умов неперервності (умов сумісності) кутів повороту на сторонах СЕ [1, 2].

Тому в роботі для розрахунку тонких оболонок складної форми запропоновано дві модифікації МСЕ, особливість яких полягає в наступному:

- 1) для шуканих величин застосовується векторна форма апроксимації [1, 3, 4];
- 2) вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній не визначається за формулами, як це прийнято в класичному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимується біквад-

© Є.А. Сторожук, 2020

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2020. № 1: 39–48

**39**

ратичними поліномами серендипового типу з виконанням геометричних гіпотез Кірхгофа – Лява тільки у вузлах СЕ [5, 6].

**Постановка задачі.** Розглянемо тонку оболонку товщини  $h$ , виготовлену з однорідного ізотропного матеріалу і навантажену поверхневими  $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$  та крайовими  $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$  силами. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ . Вважаємо, що область зміни координат параметризації  $\alpha_1, \alpha_2$  серединної поверхні  $\Sigma$  є складною, в якій не всі контурні лінії збігаються з координатними. Параметричні рівняння серединної поверхні оболонки запишемо в глобальній декартовій системі координат  $(X, Y, Z)$ :

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) = X(\alpha_1, \alpha_2)\vec{i}_1 + Y(\alpha_1, \alpha_2)\vec{i}_2 + Z(\alpha_1, \alpha_2)\vec{i}_3,$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки серединної поверхні оболонки;  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  – орти системи координат  $(X, Y, Z)$ .

Геометричні співвідношення представимо у векторній формі згідно з теорією непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява [3, 7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{22} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \alpha_2}; \\ \mu_{11} &= -\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \mu_{22} = -\bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad 2\mu_{12} = -\bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} - \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12},$$

де  $A_1, A_2$  – параметри Ламе;  $\bar{u} = u\bar{e}_1 + v\bar{e}_2 + w\bar{n}$  – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки;  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$  – орти системи координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ ;  $\bar{\varphi} = \varphi_1\bar{e}_1 + \varphi_2\bar{e}_2$  – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній, які визначаються за формулами:

$$\varphi_1 = \bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varphi_2 = \bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \alpha_2}. \quad (2)$$

Зв'язок внутрішніх зусиль і моментів з компонентами деформації подамо на основі співвідношень закону Гука [3, 7]:

$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \quad T_{12} = Gh\varepsilon_{12}; \quad (3)$$

$$M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\mu_{11} + \nu\mu_{22}); \quad M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\mu_{22} + \nu\mu_{11}); \quad M_{12} = \frac{Gh^3}{6}\mu_{12}.$$

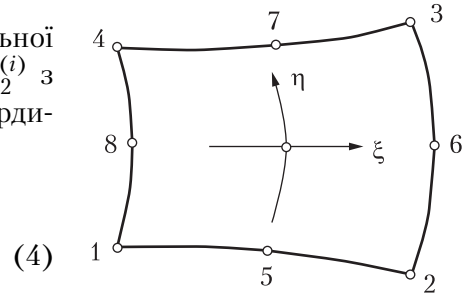
Тут  $E, G, \nu$  – модулі Юнга, зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

**Векторна форма сумісних скінчених елементів.** У даній роботі реалізовано векторну форму апроксимації шуканих величин, коли використовуються апроксимуючі вирази безпосередньо для векторів переміщень і кутів повороту в довільній точці СЕ.

*Сумісний МСЕ з 36 ступенями свободи (варіант 1).* Розглянемо криволінійний чотирикутний СЕ (див. рис.), сторони якого можуть не збігатися з координатними лініями  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Глобальні криволінійні координати  $\alpha_1, \alpha_2$  довільної точки СЕ визначаємо через їх вузлові значення  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}$  з використанням біквадратичних функцій локальних координат ( $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ ):

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^8 \Phi^{(i)}(\xi, \eta) \alpha_j^{(i)} \quad (j=1,2),$$



де  $\Phi^{(i)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) - (1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) - (1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)]$  для  $i=1, 2, 3, 4$ ;

$\Phi^{(i)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)$  для  $i=5, 7$ ;  $\Phi^{(i)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)$  для  $i=6, 8$ .

Похідні першого порядку по локальних  $(\xi, \eta)$  і глобальних  $(\alpha_1, \alpha_2)$  координатах зв'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix}; \quad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де  $[J]$  – матриця Якобі перетворення координат (4).

Апроксимуємо вектор переміщення точки серединної поверхні оболонки бікубічними поліномами:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^4 \left[ N_1^{(i)}(\xi, \eta) \bar{u}^{(i)} + N_2^{(i)}(\xi, \eta) \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} + N_3^{(i)}(\xi, \eta) \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \right] = \{N\} \{ \bar{u}^{(e)} \}, \quad (6)$$

$1 \times 12$     $12 \times 1$

де  $\{ \bar{u}^{(e)} \} = \left[ \bar{u}^{(1)}, \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial \eta}, \bar{u}^{(2)}, \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial \eta}, \dots, \bar{u}^{(4)}, \frac{\partial \bar{u}^{(4)}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}^{(4)}}{\partial \eta} \right]^T$  – стовпчик значень векторів переміщень і їх перших похідних у кутових вузлах елемента (e);  $\{N\} = \{N_1^{(1)}(\xi, \eta), N_2^{(1)}(\xi, \eta), N_3^{(1)}(\xi, \eta), \dots, N_3^{(4)}(\xi, \eta)\}$  – вектор-рядок бікубічних функцій форми, які обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} N_1^{(i)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2); \\ N_2^{(i)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}\xi_i(1+\xi_0)^2(\xi_0-1)(1+\eta_0); \\ N_3^{(i)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{8}\eta_i(1+\xi_0)(1+\eta_0)^2(\eta_0-1); \quad \xi_0 = \xi\xi_i; \quad \eta_0 = \eta\eta_i \quad (i=1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (7)$$

Похідні від вектора переміщення по локальних координатах у формулі (6) за допомогою співвідношень (5) виражаються через похідні по глобальних координатах.

Розклавши у кутових вузлах похідні першого порядку від вектора переміщення по глобальних координатах за базисними векторами цих вузлів, дістанемо для зазначених похідних наступні вирази через невідомі функції:

$$\frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \alpha_1} = A_1^{(i)} (\varepsilon_{11}^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_1^{(i)} \bar{n}^{(i)}); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \alpha_2} = A_2^{(i)} (\omega_2^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} \bar{n}^{(i)}) \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Для векторів переміщень кутових вузлів СЕ і їх похідних по локальних координатах на основі рівностей (5) і (8) маємо такі залежності від невідомих вузлових параметрів:

$$\bar{u}^{(i)} = u^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + v^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + w^{(i)} \bar{n}^{(i)};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} &= \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \right)^{(i)} (\varepsilon_{11}^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_1^{(i)} \bar{n}^{(i)}) + \\ &+ \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \right)^{(i)} (\omega_2^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} \bar{n}^{(i)}); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} &= \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \right)^{(i)} (\varepsilon_{11}^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \omega_1^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_1^{(i)} \bar{n}^{(i)}) + \\ &+ \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \right)^{(i)} (\omega_2^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)} \bar{e}_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} \bar{n}^{(i)}) \quad (i=1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Підставляючи (9) в (6), приходимо до остаточного виразу для апроксимації вектора переміщень довільної точки СЕ:

$$\bar{u} = \{\bar{L}_1\} \{q_1^{(e)}\}, \quad (10)$$

$1 \times 36 \quad 36 \times 1$

де  $\{\bar{L}_1\} = \left\{ N_1^{(1)} \{\bar{a}^{(1)}\}_{1 \times 3}, \left( N_2^{(1)} \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \xi} + N_3^{(1)} \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \eta} \right) A_1^{(1)} \{\bar{a}^{(1)}\}_{1 \times 3}, \left( N_2^{(1)} \frac{\partial \alpha_2^{(1)}}{\partial \xi} + N_3^{(1)} \frac{\partial \alpha_2^{(1)}}{\partial \eta} \right) A_2^{(1)} \times \right.$   
 $\left. \times \{\bar{a}^{(1)}\}_{1 \times 3}, \dots, \left( N_2^{(4)} \frac{\partial \alpha_2^{(4)}}{\partial \xi} + N_3^{(4)} \frac{\partial \alpha_2^{(4)}}{\partial \eta} \right) A_2^{(4)} \{\bar{a}^{(4)}\}_{1 \times 3} \right\}$  – вектор-рядок, який складається з 36 елементів;  $\{\bar{a}^{(i)}\} = \{\bar{e}_1^{(i)}, \bar{e}_2^{(i)}, \bar{n}^{(i)}\}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) – вектори базисів кутових вузлів;  $\{q_1^{(e)}\} = \{u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, u^{(2)}, \dots, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_2^{(4)}\}^T$  – вектор-стовпчик вузлових варіюваних параметрів (ступенів свободи) елемента ( $e$ ) розмірами  $36 \times 1$ .

Сумісний МСЕ з 20 ступенями свободи (варіант 2). Зменшимо кількість вузлових невідомих СЕ до 20:

$$\{q_2^{(e)}\} = \{u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, u^{(4)}, v^{(4)}, w^{(4)}, \varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}\}^T, \text{ ви-}$$

20×1

конавши наступні дії (кроки).

1. Посередині кожної сторони СЕ (у вузлах  $i=5, 6, 7, 8$ ) вводимо ортогональну декартову систему координат  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$  таким чином, щоб вісь  $\tilde{Z}$  збігалася з нормаллю  $\vec{n}^{(i)}$  до серединної поверхні елемента, а дві інші вісі розміщувалися у дотичній площині. Орти цієї системи координат позначимо через  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$  і візьмемо їх у такому вигляді:

$$\vec{j}_1 = \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \tau} \left/ \left| \frac{\partial \vec{r}^{(i)}}{\partial \tau} \right| \right.; \quad \vec{j}_3 = \vec{n}^{(i)}; \quad \vec{j}_2 = \vec{j}_3 \times \vec{j}_1. \quad (11)$$

Тут  $\tau = \xi$  для сторін з номерами вузлів посередині  $i=5, 7$  та  $\tau = \eta$  для  $i=6, 8$ .

2. Апроксимуємо уздовж сторін СЕ проекції вектора переміщення на вісі  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  ( $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ ) лінійними поліномами, а проекцію на вісь  $\tilde{Z}$  ( $\tilde{u}_3$ ) – кубічними поліномами:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= 0,5(1-\tau)\tilde{u}_1^{(p)} + 0,5(1+\tau)\tilde{u}_1^{(k)}; \quad \tilde{u}_2 = 0,5(1-\tau)\tilde{u}_2^{(p)} + 0,5(1-\tau)\tilde{u}_2^{(k)}; \\ \tilde{u}_3 &= H_1^{(1)}(\tau)\tilde{u}_3^{(p)} + H_2^{(1)}(\tau)\frac{\partial \tilde{u}_3^{(p)}}{\partial \tau} + H_1^{(2)}(\tau)\tilde{u}_3^{(k)} + H_2^{(2)}(\tau)\frac{\partial \tilde{u}_3^{(k)}}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $p, k$  – номери вузлів СЕ на початку і в кінці сторони:  $p=1$  і  $k=2$  для сторони з номером вузла посередині  $i=5$ ,  $p=2$  і  $k=3$  для  $i=6$ ,  $p=3$  і  $k=4$  для  $i=7$ ,  $p=4$  і  $k=1$  для  $i=8$ ;  $H_1^{(1)}(\tau), H_2^{(1)}(\tau), H_1^{(2)}(\tau), H_2^{(2)}(\tau)$  – одновимірні кубічні поліноми Ерміта:

$$H_1^{(1)}(\tau) = 0,25(2-3\tau+\tau^3); \quad H_2^{(1)}(\tau) = 0,25(1-\tau-\tau^2+\tau^3);$$

$$H_1^{(2)}(\tau) = 0,25(2+3\tau-\tau^3); \quad H_2^{(2)}(\tau) = 0,25(-1-\tau+\tau^2+\tau^3).$$

3. Використовуючи апроксимації (12), отримаємо наступні вирази для першої похідної від вектора переміщення і її проекцій на вісі  $\alpha_1, \alpha_2$  у вузлах  $p, k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \tau} &= 0,5(\tilde{u}_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{(p)})\vec{j}_1 + 0,5(\tilde{u}_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{(p)})\vec{j}_2 + \frac{\partial \tilde{u}_3^{(i)}}{\partial \tau}\vec{j}_3; \\ n p_{\alpha_1} \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \tau} &= 0,5 a_{11}^{(i)}(\tilde{u}_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{(p)}) + 0,5 a_{21}^{(i)}(\tilde{u}_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{(p)}) + a_{31}^{(i)} \frac{\partial \tilde{u}_3^{(i)}}{\partial \tau}; \\ n p_{\alpha_2} \frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial \tau} &= 0,5 a_{12}^{(i)}(\tilde{u}_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{(p)}) + 0,5 a_{22}^{(i)}(\tilde{u}_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{(p)}) + a_{32}^{(i)} \frac{\partial \tilde{u}_3^{(i)}}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $a_{m1}^{(i)} = \vec{j}_m \cdot \vec{e}_1^{(i)}$ ;  $a_{m2}^{(i)} = \vec{j}_m \cdot \vec{e}_2^{(i)}$ ;  $a_{m3}^{(i)} = \vec{j}_m \cdot \vec{n}^{(i)}$  ( $m=1, 2, 3; i=p, k$ ).

4. Обчислюємо вузлові значення компонентів вектора переміщення в системі координат  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$  і похідних  $\frac{\partial \tilde{u}_3^{(i)}}{\partial \tau}$  через глобальні вузлові невідомі  $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}$ :

$$\tilde{u}_m^{(i)} = a_{m1}^{(i)}u^{(i)} + a_{m2}^{(i)}v^{(i)} + a_{m3}^{(i)}w^{(i)};$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_3^{(i)}}{\partial \tau} = \frac{1}{a_{33}^{(i)}} \left[ \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau} \right)^{(i)} \varphi_1^{(i)} + \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau} \right)^{(i)} \varphi_2^{(i)} - 0,5 a_{13}^{(i)} (\tilde{u}_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{(p)}) - \right. \\ \left. - 0,5 a_{23}^{(i)} (\tilde{u}_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{(p)}) \right] \quad (m=1, 2, 3; i=p, k). \quad (14)$$

5. Після виконання кроків 1–4 для всіх сторін СЕ дістанемо зв'язок між кутковими значеннями проєкцій похідних від вектора переміщення на вісі  $\alpha_1, \alpha_2$  і ступенями свободи елемента:

$$\left\{ \begin{array}{l} np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} \\ np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [R_1^{(i)}] \{q_2^{(e)}\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} \\ np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [R_2^{(i)}] \{q_2^{(e)}\} \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (15)$$

Тут  $[R_m^{(i)}]$  ( $i=1, 2, 3, 4; m=1, 2$ ) – матриці розмірами  $2 \times 20$ .

6. З використанням рівностей (9) складаємо дві системи рівнянь з невідомими  $\varepsilon_{11}^{(i)}, \omega_2^{(i)}$  і  $\omega_1^{(i)}, \varepsilon_{22}^{(i)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \right)^{(i)} \varepsilon_{11}^{(i)} + \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \right)^{(i)} \omega_2^{(i)} = np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi}, \\ \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \right)^{(i)} \varepsilon_{11}^{(i)} + \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \right)^{(i)} \omega_2^{(i)} = np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta}; \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \right)^{(i)} \omega_1^{(i)} + \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \right)^{(i)} \varepsilon_{22}^{(i)} = np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi}, \\ \left( A_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \right)^{(i)} \omega_1^{(i)} + \left( A_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \right)^{(i)} \varepsilon_{22}^{(i)} = np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \quad (i=1, 2, 3, 4). \end{array} \right. \quad (17)$$

7. Визначаємо параметри  $\varepsilon_{11}^{(i)}, \omega_2^{(i)}$  і  $\omega_1^{(i)}, \varepsilon_{22}^{(i)}$  через компоненти вектора  $\{q_2^{(e)}\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^{(i)} \\ \omega_2^{(i)} \end{array} \right\} = [A^{(i)}]^{-1} [J^{(i)}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} \\ np_{\alpha_1} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [A^{(i)}]^{-1} [J^{(i)}]^{-1} [R_1^{(i)}] \{q_2^{(e)}\}; \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{(i)} \\ \varepsilon_{22}^{(i)} \end{array} \right\} = [A^{(i)}]^{-1} [J^{(i)}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \xi} \\ np_{\alpha_2} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{\partial \eta} \end{array} \right\} = [A^{(i)}]^{-1} [J^{(i)}]^{-1} [R_2^{(i)}] \{q_2^{(e)}\} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (19)$$

$$\text{де } [A] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Отже, прийняття вздовж сторін SE апроксимацій (12) для компонентів вектора переміщень зумовлює до зменшення кількості ступенів свободи елемента з 36 до 20.

Далі за допомогою формул (18) і (19) встановлюємо зв'язок між повним і скороченим векторами ступенів свободи

$$\{q_1^{(e)}\} = [Q] \{q_2^{(e)}\} \quad (20)$$

та отримуємо наступну апроксимацію вектора переміщень довільної точки SE

$$\bar{u} = \{\bar{L}_1\} [Q] \{q_2^{(e)}\} = \{\bar{L}_2\} \{q_2^{(e)}\}. \quad (21)$$

Тут  $[Q]$  – матриця розмірами  $36 \times 20$ ;  $\{\bar{L}_2\} = \{\bar{L}_1\} [Q]$  – вектор-рядок з 20 компонентами.

**Дискретна реалізація гіпотез Кірхгофа–Лява.** Подамо вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній в криволінійному восьмивузловому чотирикутному елементі (див. рис.) у вигляді бікватричних поліномів серендипового типу:

$$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^8 \Phi^{(i)}(\xi, \eta) \bar{\varphi}^{(i)} = \{\bar{\Phi}\} \{\varphi^{(e)}\}, \quad (22)$$

$1 \times 16 \quad 16 \times 1$

де  $\bar{\varphi}^{(i)} = \varphi_1^{(i)} \bar{e}_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)} \bar{e}_2^{(i)}$ ;  $\{\varphi^{(e)}\} = \{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_1^{(8)}, \varphi_2^{(8)}\}^T$ ;

$$\{\bar{\Phi}\} = \{\Phi^{(1)}\{\bar{e}^{(1)}\}, \Phi^{(2)}\{\bar{e}^{(2)}\}, \dots, \Phi^{(8)}\{\bar{e}^{(8)}\}\}; \quad \{\bar{e}^{(i)}\} = \{\bar{e}_1^{(i)}, \bar{e}_2^{(i)}\} \quad (i=1, 2, \dots, 8).$$

Складемо додаткові умови, які еквівалентні геометричним гіпотезам Кірхгофа–Лява в окремих вузлах [5, 6]:

а) у вершинах елемента:

$$\varphi_1^{(i)} = \bar{n}^{(i)} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{A_1^{(i)} \partial \alpha_1}; \quad \varphi_2^{(i)} = \bar{n}^{(i)} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{A_2^{(i)} \partial \alpha_2} \quad (i=1, 2, 3, 4); \quad (23)$$

б) посередині сторін елемента:

$$\varphi_\tau^{(i)} = \bar{n}^{(i)} \cdot \frac{\partial \bar{u}^{(i)}}{A_\tau^{(i)} \partial \tau} \quad (i=5, 6, 7, 8). \quad (24)$$

Крім цих умов, приймається, що кут повороту навколо дотичної до контуру елемента  $\varphi_\sigma$  змінюється уздовж сторони за лінійним законом:

$$\varphi_\sigma^{(i)} = 0,5(\varphi_\sigma^{(p)} + \varphi_\sigma^{(k)}) \quad (i=5, 6, 7, 8). \quad (25)$$

Тут  $\varphi_\sigma^{(p)} = \varphi_1^{(p)} \cos \psi^{(p)} + \varphi_2^{(p)} \sin \psi^{(p)}$  ( $p \rightarrow k$ );  $\psi$  – кут між нормаллю  $\sigma$  до сторони SE і координатною лінією  $\alpha_1$ .

Для кутів повороту  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  посередині сторін маємо формули:

$$\varphi_1^{(i)} = \varphi_\sigma^{(i)} \cos \psi^{(i)} - \varphi_\tau^{(i)} \sin \psi^{(i)}; \quad \varphi_2^{(i)} = \varphi_\tau^{(i)} \cos \psi^{(i)} + \varphi_\sigma^{(i)} \sin \psi^{(i)} \quad (i=5, 6, 7, 8). \quad (26)$$

За допомогою складених вище додаткових умов (23) – (25) виражаємо вектор вузлових кутів повороту через вектор ступенів свободи елемента ( $e$ )

$$\{\varphi^{(e)}\} = [S] \{q^{(e)}\} \quad (27)$$

$16 \times 1 \quad 16 \times n \quad n \times 1$

і отримуємо остаточну апроксимацію для вектора кутів повороту

$$\bar{\varphi} = \{\bar{\Phi}\} [S] \{q^{(e)}\} = \{\bar{F}\} \{q^{(e)}\}, \quad (28)$$

$1 \times 16 \quad 16 \times n \quad n \times 1 \quad 1 \times n \quad n \times 1$

де  $[S]$  – матриця зв'язку компонентів вектора вузлових кутів повороту з компонентами вектора ступенів свободи СЕ;  $\{q^{(e)}\} = \{q_1^{(e)}\}$  і  $n = 36$  для варіанта 1 та  $\{q^{(e)}\} = \{q_2^{(e)}\}$  і  $n = 20$  для варіанта 2.

**Розв'язувальні рівняння.** Використовуючи співвідношення (1), (2), (10), (21), (28), умови стаціонарності функціоналу Лагранжа і традиційну процедуру МСЕ, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка моделює напружено-деформований стан тонкої оболонки складної геометрії під дією статичного навантаження:

$$[K]\{q\} = \{P\}, \quad (29)$$

де  $[K]$  – глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки;  $\{q\}$ ,  $\{P\}$  – глобальні вектори вузлових ступенів свободи і навантажень.

Відзначимо, що для елемента ( $e$ ) матриця жорсткості та вектор навантажень обчислюються за формулами:

$$[K^{(e)}] = \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] d\Sigma; \{P^{(e)}\} = \iint_{\Sigma^{(e)}} [f^{(e)}]^T \{p\} d\Sigma + \int_{\Gamma_k^{(e)}} [f_k^{(e)}]^T \{m_k\} ds. \quad (30)$$

Тут  $[f^{(e)}]$ ,  $[f_k^{(e)}]$  – матриці функцій форми компонентів векторів переміщень точок внутрішньої області та контуру елемента ( $e$ );  $[B^{(e)}]$  – матриця функцій форми компонентів деформації;  $[D]$  – матриця жорсткостей оболонки;  $\Gamma_k^{(e)}$  – частина контуру елемента ( $e$ ), на якій задані крайові сили.

Таким чином, у роботі побудовано два варіанти скінченних елементів тонких оболонок складної форми, які задовольняють умовам неперервності векторів переміщень і кутів повороту та точно описують поступальну частину переміщень скінченних елементів як жорстких цілих. Ефективність розроблених варіантів МСЕ перевірена шляхом розв'язання тестових задач.

*Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Изд. Казан. филиала физ.-техн. ин-та, 1989. 269 с.
2. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.



3. Сторожук Є.А. Варіаційний векторно-різницевий метод у нелінійних задачах теорії тонких оболонок з криволінійними отворами. *Системні технології. Матем. пробл. техн. механіки*. 2009. № 3 (62). С. 149–156.
4. Kiseleva T.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder. *J. Comput. Math. Math. Phys.* 2015. **55**, № 3. P. 422–431.
5. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2005. **64**, № 9. P. 1166–1206.
6. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells. *Int. Appl. Mech.* 2003. **39**, № 6. P. 679–687.
7. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград: Политехника, 1991. 656 с.

Надійшло до редакції 11.09.2019

## REFERENCES

1. Golovanov, A. I. & Kornishin, M. S. (1989). Introduction to the finite element method of the statics of thin shells. Kazan: Publ. Kazan. branch of physical and technical Institute (in Russian).
2. Zienkiewicz, O. C. (1975). The finite element method in technology. Moscow: Mir (in Russian).
3. Storozhuk, E. A. (2009). Variational vector-difference method in nonlinear problems of the theory of thin shells with curved holes. System technologies. Math. problems of techn. mechanics, No. 3 (62), pp. 149-156 (In Ukrainian).
4. Kiseleva, T. A., Klochkov, Yu. V. & Nikolaev, A. P. (2015). Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder. *J. Comput. Math. Math. Phys.* 55, No. 3, pp. 422-431. <https://doi.org/10.1134/S0965542515030094>
5. Areias, P.M.A., Song, J.-H. & Belytschko, T. (2005). A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 64, No. 9, pp. 1166-1206. <https://doi.org/10.1002/nme.1389>
6. Guz, A. N., Storozhuk, E. A. & Chernyshenko, I. S. (2003). Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells. *Int. Appl. Mech.* 39, No. 6, pp. 679-687. <https://doi.org/10.1023/A:1025793808397>
7. Novozhilov, V. V., Chernykh, K. F. & Mikhailovsky, E. I. (1991). Linear theory of thin shells. Leningrad: Politekhnik (in Russian).

Received 11.09.2019

*Є.А. Сторожук*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: stevan@ukr.net

## СОВМЕСТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ НЕИЗВЕСТНЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Дана постановка и разработана методика численного решения краевых задач для тонких оболочек сложной формы при действии статической нагрузки. Разрешающие уравнения в перемещениях получены из условий стационарности функционала Лагранжа с использованием теории непологих оболочек Кирхгофа–Лява и метода конечных элементов. Предложены два варианта совместных конечных элементов, в которых реализовано векторную форму аппроксимации искомых величин и дискретное выполнение геометрической части гипотез Кирхгофа–Лява.

**Ключевые слова:** оболочки сложной формы, статическая нагрузка, метод конечных элементов, векторная аппроксимация, дискретные гипотезы Кирхгофа–Лява.

*E.A. Storozhuk*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: stevan@ukr.net

JOINT FINITE ELEMENTS WITH VECTOR APPROXIMATION  
OF UNKNOWNNS FOR THE CALCULATION  
OF THIN SHELLS OF COMPLEX GEOMETRY

The formulation of boundary-value problems for thin shells of complex shape under the action of a static load is given. The basic equations are given on the basis of the theory of shells, in which the Kirchhoff–Love hypotheses hold. The geometric relationships are written in the vector form, and the physical ones are based on Hooke’s law for isotropic materials. Using the finite-element method, a technique has been developed for numerically solving two-dimensional static problems for thin shells of complex geometry. The resolving equations in displacements are obtained from the stationary conditions of a discrete analog of the Lagrange functional. Two variants of joint finite elements with 36 and 20 degrees of freedom are proposed. A feature of the developed modifications of the finite-element method is the vector form of approximation of the sought quantities and the discrete execution of the geometric part of the Kirchhoff–Love hypotheses. The finite elements of thin shells of complex shape constructed in this way satisfy the continuity conditions for the displacement vectors and rotation angles and accurately describe the translational part of the movements of the finite elements as rigid bodies.

**Keywords:** *complex-shape shells, static load, finite-element method, vector approximation, Kirchhoff–Love discrete hypotheses.*