

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В.А. Буц¹, Е.С. Войценья², А.П. Толстолужский¹

¹Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,

Харьков, Украина;

²НТУ "ХПИ"

E-mail: tolstoluzhsky@kipt.kharkov.ua

Показано, что переход к хаотической динамике заряженных частиц при циклотронных резонансах может происходить по необычному сценарию – не через перекрытие нелинейных резонансов, а через качественную периодическую перестройку топологии фазового пространства. Показано, что такой сценарий может реализоваться при возбуждении низкочастотных колебаний плотными потоками заряженных частиц в сильном магнитном поле.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время условия перехода от регулярной динамики к хаотической получены для всех известных резонансов взаимодействия волна–частица [1-3]. При этом источником хаотической динамики является пересечение гомоклинических или гетероклинических траекторий. На физическом языке этот факт удобнее выражать как перекрытие нелинейных резонансов. Полученные результаты справедливы при взаимодействии частицы с отдельной электромагнитной волной с постоянной амплитудой. В реальных физических задачах амплитуды волн меняются, кроме того, волн может быть несколько. В общем случае такое усложнение физической системы не приводит к каким-то качественным изменениям процессов хаотизации. Просто появляются добавочные резонансы или ширина существующих резонансов меняется. Поэтому изученный сценарий перехода к хаосу весьма универсален. Кроме того, его универсальность вызвана тем фактом, что взаимодействие заряженных частиц с электромагнитными волнами может быть рассмотрено как возмущение в гамилтоновом формализме. При этом, как известно, укороченные уравнения в окрестности резонансов описываются уравнением математического маятника. Поэтому казалось естественным, что именно сценарий перекрытия нелинейных резонансов должен описывать практически все многообразие условий взаимодействия волна–частица. Однако, как мы увидим ниже, при циклотронных резонансах для описания динамики нерелятивистских частиц укороченные уравнения описываются не уравнением математического маятника, а системой уравнений, топологически подобной осциллятору Дюффинга. Осциллятор Дюффинга, в отличие от математического маятника, имеет два свободных параметра. Этот факт приводит к тому, что при изменении амплитуды волны, в которой движется частица, ее фазовый портрет (фазовый портрет осциллятора Дюффинга) может качественно измениться. Наличие такого качественного изменения фазового портрета, как мы увидим ниже, является причиной возникновения хаотической динамики. Изменение

амплитуды волны, в которой движутся частицы, может быть обусловлено внешними факторами. Кроме того, как известно, при пучковых неустойчивостях в нелинейном режиме амплитуды возбуждаемых волн также периодически меняются. Глубина модуляции амплитуды существенно зависит от плотности электронного пучка. Ниже показано, что при достаточно большой плотности пучка эта модуляция оказывается достаточной для реализации хаотического режима в изолированном циклотронном резонансе. Механизмом, ответственным за хаотичность, в этом случае является именно качественная смена топологии фазового пространства.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы будем рассматривать задачу о возбуждении электромагнитного поля моноэнергетическим пучком осцилляторов с функцией распределения

$$f_0 = \frac{N_b}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_\parallel), \quad (1)$$

где p_\perp , p_\parallel – перпендикулярная и параллельная оси z -составляющие импульса; N_b – равновесная плотность пучка.

Пучок движется в постоянном магнитном поле, направленном вдоль оси z . Мы будем рассматривать возбуждение волны, которая распространяется перпендикулярно магнитному полю (Рис.1).

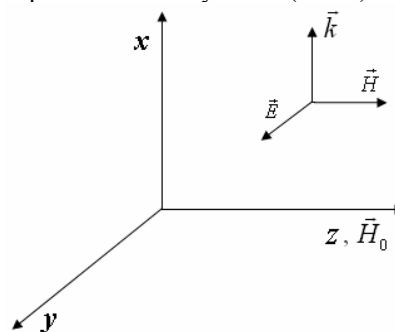


Рис.1. Взаимное расположение вектора внешнего магнитного поля \vec{H}_0 и компонент электрического и магнитного полей электромагнитной волны

Рассматриваемая постановка задачи не отличается от той, которая была сформулирована в работах [1-3]. Более того, мы воспользуемся многими результатами, полученными в этих работах. Самосогласованная система уравнений, которая описывает динамику возбуждаемых полей и динамику заряженных частиц, состоит из уравнений Максвелла и уравнений движения отдельных частиц. Полная система уравнений выписана в [2,3]. Ниже мы выпишем укороченную систему уравнений, описывающую динамику частиц и полей в изолированном циклотронном резонансе с номером s :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\perp}}{d\tau} &= \operatorname{Re} \left[iJ'_s(\mu) e^{i\theta_s} \varepsilon \right], \\ \frac{d\theta_s}{d\tau} &= \operatorname{Re} \left[\frac{s\omega_H}{\gamma} - 1 + \frac{1}{\omega_H} \left(1 - \frac{s^2}{\mu^2} \right) J_s(\mu) e^{i\theta_s} \varepsilon \right], \\ \frac{d\varepsilon}{d\tau} &= -\operatorname{Re} \left[i \frac{\omega_b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_{s0} \frac{P_{\perp}}{\gamma} J'_s(\mu) e^{-i\theta_s} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $p_{\perp} = p_{\perp} / mc$, $\mu = p_{\perp} / \omega_H$, $\gamma = \sqrt{1 + \mu^2 \omega_H^2}$, $\omega_H = eH_0 / mc\omega$, $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b / m_e$, $\varepsilon = eE / mc\omega$.

Система уравнений (2) отличается от тех, которые были проанализированы в работах [2,3], наличием последнего слагаемого в правой части уравнения для фазы. Для релятивистских частиц этим слагаемым можно пренебречь. В этом случае первые два уравнения системы (2) при постоянной напряженности поля волны ($\varepsilon = \text{const}$) представляют собой уравнение математического маятника. Именно эти уравнения были использованы в работах [2,3] для нахождения условий возникновения локальной неустойчивости. Для нерелятивистских частиц это слагаемое может быть существенным и, как мы увидим ниже, оно приводит к сценарию возникновения стохастичности, отличному от сценария перекрытия нелинейных резонансов.

3. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ВОЛНЫ С ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Если амплитуда поля не меняется, то третье уравнение в системе (2) можно не учитывать. Динамика частиц при этом описывается первыми двумя уравнениями. Такая система имеет гамильтониан

$$H(\theta_s, I) = \frac{s}{\omega_H} \gamma - I + \frac{\varepsilon}{\omega_H} 2I \frac{d}{dI} \left(J_s(\sqrt{2I}) \right) \cos(\theta_s), \quad (3)$$

где $I = \mu^2 / 2$.

Фазовый портрет системы с гамильтонианом (3) топологически подобен фазовому портрету осциллятора Дюффинга. Действительно, на фазовой плоскости (p_{\perp}, θ_s) , в общем случае, имеются три особые точки: $(\theta_s = 0, p_{\perp 1} = \Pi)$, $(\theta_s = 0, p_{\perp 2} = 1 - \Pi/2)$, $(\theta_s = \pi, p_{\perp 3} = 1 + \Pi/2)$. Здесь $\Pi = \varepsilon / p_{\perp 0}^3$, $p_{\perp 0}$ – начальный импульс частицы. Причем, две из этих особых точек (вторая и третья) представляют собой точки типа «центр», а одна (первая) – седловая точка.

Такой вид фазового пространства реализуется при малой амплитуде внешней волны ($\Pi \ll 1$).

Если же амплитуда достаточно велика ($\Pi \gg 1$), то две особые точки, а именно седловая точка и точка типа «центр» (первая и вторая особые точки) сливаются и исчезают. Остается только одна особая точка – точка типа «центр». Все эти особенности фазового пространства аналогичны особенностям фазового пространства осциллятора Дюффинга. Однако следует обратить внимание на тот факт, что колебания осциллятора Дюффинга являются потенциальными, а для рассматриваемых нами уравнений потенциал найти не удастся. Важной особенностью топологии фазового пространства рассматриваемой системы является тот факт, что с замкнутыми траекториями в окрестности особой точки типа «центр» можно отождествить захваченные частицы. С незамкнутыми траекториями, которые охватывают замкнутые траектории, можно отождествить пролетные частицы. Мы привыкли, что захваченные и пролетные частицы разделяются сепаратрисами, т.е. гомоклиническими, либо гетероклиническими траекториями. В данном случае такие траектории отсутствуют. Нужно сказать, что отсутствие таких траекторий приводит к разной динамике частиц, которые проходят через область, разделяющую область захваченных и пролетных частиц.

4. ОСЦИЛЛЯТОР ДЮФФИНГА

Выше мы указывали на тот факт, что фазовый портрет изучаемой нами системы подобен фазовому портрету осциллятора Дюффинга. Динамика осциллятора Дюффинга к настоящему времени достаточно хорошо изучена (см., например, [4]). Однако не все особенности этой динамики описаны в существующей литературе. В этом разделе мы кратко остановимся на важной для нас особенности, которая ранее, насколько нам известно, не была описана. А именно: мы проиллюстрируем сложность структуры осциллятора Дюффинга, а соответственно и сложность структуры фазового портрета изучаемой нами системы. Стандартное уравнение осциллятора Дюффинга при наличии затухания имеет вид:

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \alpha \cdot x + \beta \cdot x^3 = 0. \quad (4)$$

Его фазовый портрет при отсутствии затухания ($\nu = 0$) представлен на Рис.2.

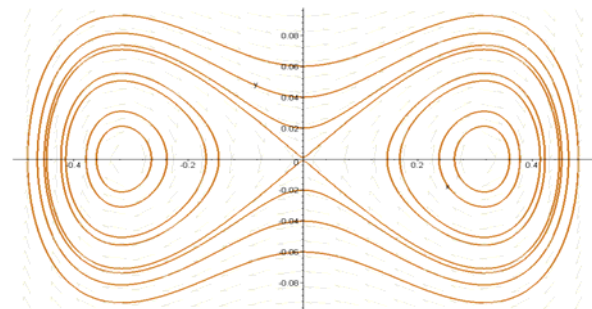


Рис.2. Фазовый портрет системы (4) при $\alpha = -0.09$, $\beta = 1$

Этот фазовый портрет, так же как и в изучаемой нами системе, имеет три особые точки: две точки типа «центр» и одну седловую точку. Сложность структуры фазового портрета легко проиллюстри-

ровать, если ввести в рассмотрение малое затухание ($\nu \neq 0$). Тогда все фазовое пространство можно разбить на тонкие слои. Свойство этих слоев таково: если частицы в начальный момент времени находятся в одном из этих слоев, то по истечении определенного времени они все оказываются на дне одной из двух потенциальных ям. Частицы, находящиеся в соседнем слое, попадут на дно другой ямы. Эти слои чередуются. Причем, чем меньше затухание, тем тоньше эти слои (Рис.3).

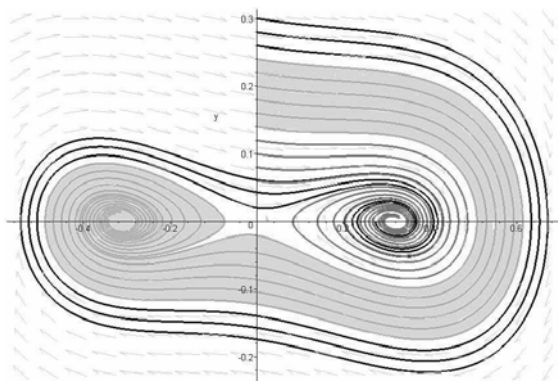


Рис.3. Фазовый портрет системы (4) при $\alpha = -0.09$, $\beta = 1$, $\nu = 0.1$

На Рис.3 представлен фазовый портрет осциллятора Дюффинга при наличии достаточно большого затухания ($\nu = 0.1$). Видно, что частицы, которые попали в светлые слои, в конечном счете оседают на дне правой потенциальной ямы. Частицы, которые первоначально находились в темных слоях, оказываются в левой яме. Из рисунка видно, что темные и светлые слои чередуются. Такая динамика напоминает рулетку. Таким образом, малая неопределенность в начальных условиях осциллятора Дюффинга приводит к непредсказуемости конечного результата. Ясно, что такая особенность будет характерной для многих других мультистабильных динамических систем. Сложность динамики, ее непредсказуемость будет увеличиваться в том случае, когда параметры системы будут меняться во времени. Еще большее усложнение будет происходить в том случае, когда это изменение будет приводить к качественному изменению вида фазового портрета. Именно такие изменения и наблюдаются в изучаемой нами системе.

5. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ВОЛНЫ С ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Численными методами, прежде всего, была исследована динамика частиц в поле внешней электромагнитной волны с постоянной и с периодически меняющейся амплитудой. Глубина модуляции выбиралась равной 0.25 от величины амплитуды. Отметим, что в самосогласованной задаче величина модуляции составляет до 0.5 от величины амплитуды. Таким образом, те эффекты, которые были обнаружены при модуляции в 0.25 наверняка проявят себя при модуляции в 0.5. Кроме того, была исследована самосогласованная динамика частиц и воз-

буждаемых этими частицами полей. В целом полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися представлениями об изучаемых процессах. Так на рисунках 4 и 5 представлены фазовые портреты для случая $\Pi \ll 1$ (Рис.4) и для $\Pi > 1$ (Рис.5). Прямые линии соответствуют начальному положению пробных частиц. Как видно из Рис.4 на фазовой плоскости, в полном соответствии с приведенными выше результатами, имеются три особых точки: две типа «центр» и седловая точка. При увеличении амплитуды волны две точки («седло» и «центр» при $\theta_s = 0$) сближаются и исчезают (см. Рис.5).

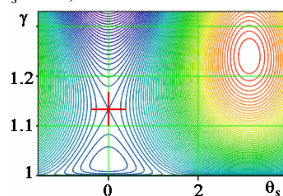


Рис.4. Фазовые траектории при $\epsilon = 0.08$

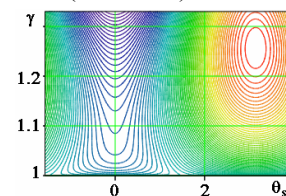


Рис.5. Фазовые траектории при $\epsilon = 0.12$

Для постоянных значений амплитуды поля волны $\epsilon = 0.08$ был проведен численный анализ динамики движения пробных частиц. Начальные значения фаз и импульсов частиц выбирались вблизи особых точек типа «центр». На Рис.4 им соответствуют параллельная прямая и нижняя часть вертикальной прямой. На Рис.6-7 представлены зависимости импульса частицы от времени и вид фазового портрета для начальных условий, взятых из области второй особой точки (нижняя часть вертикального отрезка прямой).

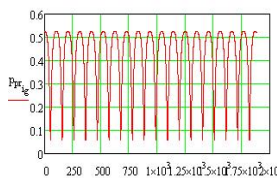


Рис.6. Зависимость от времени поперечного импульса частицы

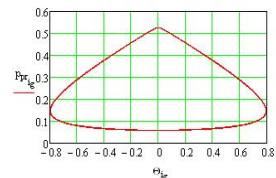


Рис.7. Фазовые траектории частицы

Как видно из этих рисунков, траектории частиц являются сложными регулярными и финитными в области второй особой точки. Это – случай динамики захваченных частиц. Вид спектра и корреляционной функции поперечного импульса представлен на Рис.8 и 9.

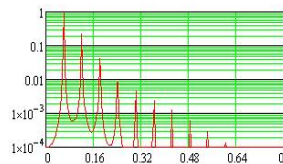


Рис.8. Спектр импульса

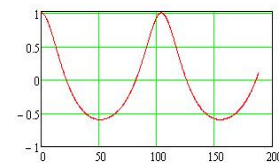


Рис.9. Корреляционная функция

Как видно из этих рисунков, спектр состоит из отдельных линий, а корреляционная функция осциллирует без изменения амплитуды. Аналогичный вид имеют зависимости импульса частицы и фазовый портрет для начальных условий, выбранных из области третьей особой точки (горизонтальная прямая). На Рис.10-11 представлены зависимости им-

пульса частицы от времени и вид фазового портрета для начальных условий, взятых из верхней части вертикального отрезка прямой. Как и следовало ожидать, движение частиц является инфинитным.

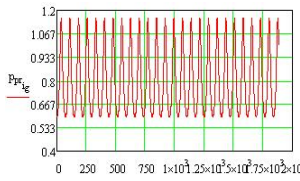


Рис.10. Зависимость поперечного импульса частицы от времени

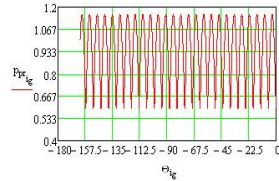


Рис.11. Фазовые траектории частицы

Это – случай динамики пролетных частиц. Спектр импульса линейчатый, а корреляционная функция не уменьшается.

Если амплитуда внешнего поля периодически изменяется со временем, динамика частиц существенно различна для частиц с различными начальными значениями импульса и фазы. Вдали от сепаратрисы динамика частиц усложняется, оставаясь регулярной, и качественно не отличается от динамики частиц при отсутствии слабой модуляции амплитуды волны (Рис.12-13).

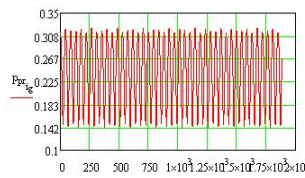


Рис.12. Зависимость поперечного импульса частицы от времени

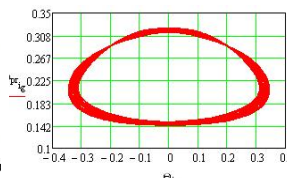


Рис.13. Фазовые траектории частицы

Спектр импульса линейчатый, а корреляционная функция осциллирует без изменения амплитуды (Рис.14-15).

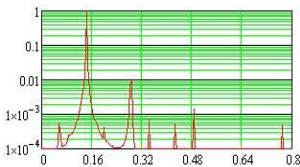


Рис.14. Спектр импульса

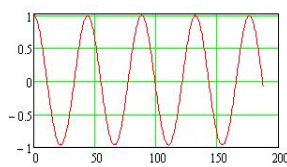


Рис.15. Корреляционная функция

Вблизи седловой точки (точка пересечения прямых на Рис.4) и вблизи сепаратрисы динамика частиц качественно меняется – захваченные частицы становятся пролетными и наоборот. В результате, динамика частиц становится нерегулярной, хаотической.

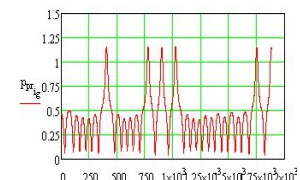


Рис.16. Зависимость поперечного импульса частицы от времени

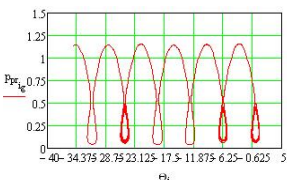


Рис.17. Фазовые траектории частицы

На Рис.16-17 приведена характерная зависимость импульса частицы от времени и фазовый портрет движения частицы для начальных условий в окрест-

ности седловой особой точки (вблизи пересечения прямых, см. Рис.4).

Как видно из этих графиков, имеет место перемежаемость режимов конечного и бесконечного движения частиц, что свидетельствует о нерегулярном, хаотическом движении частиц. При этом спектр импульса значительно уширен, а корреляционная функция достаточно быстро спадает (Рис.18,19).

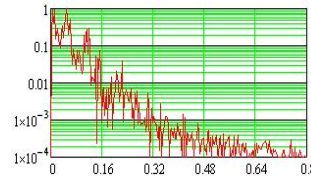


Рис.18. Спектр импульса вблизи седловой точки

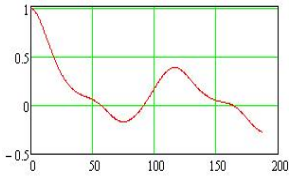


Рис.19. Корреляционная функция вблизи седловой точки

Полученные результаты подтверждают сформулированное выше предположение о механизме хаотизации, который обусловлен периодическим качественным изменением вида фазового портрета.

6. ПРОЦЕСС САМОСОГЛАСОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОЛЕЙ ПОТОКАМИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Выше мы рассмотрели динамику частиц в поле волны, закон изменения амплитуды которой был задан. Численными методами была исследована также самосогласованная динамика частиц и полей, которые возбуждаются этими частицами (полная система уравнений (2)). Динамика изучаемых процессов при этом полностью соответствует качественной картине, описанной выше (Рис.20,21). Действительно, если плотность частиц пучка не слишком велика, так что амплитуда возбуждаемого поля удовлетворяет неравенству $\Pi \ll 1$, то динамика частиц и полей подобна динамике частиц и полей при плазменно-пучковом взаимодействии [5].

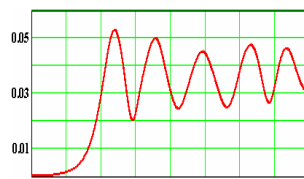


Рис.20. Зависимость амплитуды поля от времени при малой плотности пучка: $\omega_b^2 = 0.02$

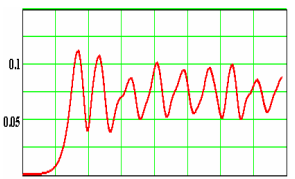


Рис.21. Зависимость амплитуды поля от времени при плотности пучка: $\omega_b^2 = 0.1$

При возрастании плотности частиц амплитуда возбуждаемой волны растет. Когда ее величина и степень ее модуляции становятся такими, как в описанной выше модели, то происходит описанное выше качественное изменение фазового портрета, возникает нерегулярная динамика как полей, так и частиц. Причем стохастический режим проявляется значительно раньше, чем для случая относительно малых амплитуд, когда реализуется обычный механизм стохастизации в плазменно-пучковых системах [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, переход от регулярной динамики к хаотической при взаимодействиях типа волна-частица может осуществляться не только в результате перекрытия нелинейных резонансов, но и в результате смены топологии фазового портрета. Выше мы рассмотрели такой механизм возникновения локальной неустойчивости для случаев взаимодействия нерелятивистских заряженных частиц с электромагнитной волной в условиях изолированного циклотронного резонанса. Ясно, что аналогичные механизмы могут реализоваться в большом числе других физических систем. Это будут те системы, движение которых может быть описано движением осциллятора Дюффинга. Это многочисленные системы. Действительно, как известно, к анализу динамики математического маятника можно свести изучение гамильтоновых систем, подверженных периодическому возмущению. Гамильтониан математического маятника в этой связи называют первым фундаментальным гамильтонианом. Чтобы отразить тот факт, что и к анализу динамики осциллятора Дюффинга сводится исследование большого количества физических систем, гамильтониан осциллятора

Дюффинга называют вторым универсальным гамильтонианом.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.A. Buts, A.N. Lebedev, V.I. Kurilko. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams. Springer Berlin Heidelberg New York. 2006, p.263.
2. В.А. Балакирев, В.А. Буц, А.П. Толстолужский, Ю.А. Туркин. Хаотизация движения пучка сфазированных осцилляторов // *ЖЭТФ*. 1983, т.84, в.4, с.1279-1289.
3. В.А. Балакирев, В.А. Буц, А.П. Толстолужский, Ю.А. Туркин. Динамика движения заряженных частиц в поле двух электромагнитных волн // *ЖЭТФ*. 1989, т.95, в.4, с.1231-1245.
4. А.В. Буц, Г.И. Чурюмов. Регулярная и хаотическая динамика осциллятора Дюффинга // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2003, т.9, №7, с.54-64.
5. В.А. Буц, О.В. Мануйленко, О.П. Толстолужский. Стохастизация коливаний в плазмовопучковой системі під дією зовнішнього монохроматичного поля // *УФЖ*. 1994, т.39, №4, с.429-433.

Статья поступила в редакцию 06.10.2009 г.

INITIAL STAGE OF STOCHASTIC ACCELERATION OF THE CHARGED PARTICLES IN THE CONSTANT MAGNETIC FIELD AND IN THE FIELD OF ELECTROMAGNETIC WAVE

V.A. Buts, E.S. Voitsenya, A.P. Tolstoluzhsky

It is shown that passing to the chaotic dynamics of the charged particles at cyclotron resonances can take place on an unusual scenario – not through overlapping of nonlinear resonances, but through qualitative periodic tuning of topology of phase space. It is shown that such scenario can be realized at excitation of low-frequency oscillations the dense flows of the charged particles in the strong magnetic field

ПОЧАТКОВА СТАДІЯ СТОХАСТИЧНОГО ПРИСКОРЕННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ПОСТІЙНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ І В ПОЛІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ

В.О. Буц, О.С. Войцєня, О.П. Толстолужський

Показано, що перехід до хаотичної динаміки заряджених частинок при циклотронних резонансах може відбуватися за незвичайним сценарієм – не через перекриття нелінійних резонансів, а через якісну періодичну перебудову топології фазового простору. Показано, що такий сценарій може реалізуватися при збудженні низькочастотних коливаний щільними потоками заряджених частинок в сильному магнітному полі.