Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 2, 215 – 227

О локальном поведении отображений метрических пространств

Евгений А. Севостьянов, Сергей А. Скворцов

(Представлена А. А. Довгошеем)

Статья посвящена 100-летию со дня рождения Г. Д. Суворова

Аннотация. Изучаются отображения метрических пространств, искажающих модуль семейств кривых по типу неравенства Полецкого. Установлена равностепенная непрерывность соответствующих семейств обратных отображений, в случае, когда отображённая область является слабо плоским пространством, а объемлющее метрическое пространство допускает слабую сферикализацию. При некоторых дополнительных условиях имеет место равностепенная непрерывность соответствующих семейств в замыкании области.

2010 MSC. 30C65, 30L10.

Ключевые слова и фразы. Отображения с ограниченным и конечным искажением, отображения метрических пространств.

1. Введение

В нашей недавней работе [1] получена равностепенная непрерывность семейства отображений с конечным искажением, заданных в области метрического пространства. Здесь рассматривался случай, когда отображённое пространство является пространством Лёвнера, а отображённые области – областями квазиэкстремальной длины. В настоящей работе мы установим ещё один результат на эту тему, относящийся к ситуации, когда соответствующее пространство допускает слабую сферикализацию, а содержащаяся в нём отображённая область является слабо плоской как метрическое пространство. Если речь идёт о поведении отображений внутри и на границе области, то в качестве необходимого дополнительного условия мы используем слабую плоскость отображённой области на её границе. Отметим,

Статья поступила в редакцию 10.06.2019

ISSN 1810 – 3200.

что слабо плоские пространства введены и изучались в работе [2], см. также [3, гл. 13]. Здесь же получен ряд результатов о локальном и граничном поведении отображений метрических пространств.

Напомним определения. Всюду далее (X, d, μ) и (X, d', μ') – метрические пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевскими мерами μ и μ', соответственно. *Кривой* γ в X называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$. *Длина кривой* γ на отрезке $[a, b]$ определяется равенством $l(\gamma) := \sup \sum\limits_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$, где sup берётся по всем возможным разбиениям $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n := b$. Хорошо известно, что для локально спрямляемой кривой γ имеет место представление $\gamma(t) = \gamma^0 \circ s_\gamma(t)$, где $s_\gamma(t)$ обозначает длину кривой $\gamma_{[a,t]}$, $t \in [a, b]$. В этом случае, γ^0 называется *нормальным представлением* кривой γ, см. [4, раздел 7]. *Областью* D в X называется открытое линейно связное множество в X, другими словами, D – область в X тогда и только тогда, когда D открыто и, кроме того, произвольные две точки $x_1, x_2 \in D$ можно соединить кривой γ, целиком лежащей в D. Положим

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t))\, dt\,.$$

Семейством кривых Γ называется произвольное множество кривых γ. Борелева функция $\rho : X \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в X, если $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma$. Если ρ допустима для Γ, то мы пишем $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ порядка $p \geqslant 1$ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{X} \rho^p(x)\, d\mu(x)\,.$$

Если $\operatorname{adm} \Gamma = \varnothing$, то мы полагаем: $M_p(\Gamma) = \infty$. Для заданных множеств E и F, лежащих в области D пространства X, обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to X$ таких, что $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при всех $t \in (a, b)$.

Значительное количество результатов, относящихся к локальному и граничного поведению, связана с компактностью пространства, в которое действует данное отображение (см., напр., [2, теоремы 5.1, 5.2], [3, теоремы 13.1, 13.2], [5, теоремы 1, 2]). В случае евклидового пространства эту проблему решает расширенное евклидово пространство, которое также можно интерпретировать как соответствующую ему риманову сферу. В метрических пространствах эта ситуация может оказаться значительно более сложной. Одноточечные компактификации могут оказаться лишь топологическими, но не метрическими пространствами. В связи со сказанным, рассмотрим следующее определение. Положим $\overline{X} := X \cup \{\infty\}$, и пусть $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ – некоторая метрика. Будем говорить, что h удовлетворяет условию *слабой сферикализации,* если $(\overline{X}, h)$ – компактное метрическое пространство, при этом, h и d порождают одну и ту же топологию на X (отметим, что данное определение несколько отличается от данного нами в [6]). Метрическое пространство X называется *пространством, допускающим слабую сферикализацию*, если существует хотя бы одна такая метрика $h : \overline{X} \times \overline{X} \to \mathbb{R}$. Если не оговорено противное, то понятие окрестности точки, а также множества ∂E и $\overline{E}$, относящиеся к произвольному $E \subset X$ (либо $E \subset \overline{X}$) по определению ассоциированы с топологией пространства $\overline{X}$ в том случае, когда X допускает слабую сферикализацию.

Для удобства положим

$$h(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} h(x, y)\,, \qquad E_1, E_2 \subset \overline{X'}\,,$$

$$h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y)\,, \quad d(F_1, F_2) = \inf_{x \in F_1, y \in F_2} d(x, y)\,,$$

где $E \subset \overline{X'}$ и $F_1, F_2 \subset X$, и $d(F) = \sup\limits_{x, y \in F} d(x, y)$, где $F \subset X$.

Условимся называть пространство X *слабо плоским* в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки x_0 и каждого $P > 0$ найдётся окрестность V этой точки, содержащаяся в U, такая, что

$$M_\alpha(\Gamma(E, F, X)) \geqslant P$$

для произвольных континуумов $E, F \subset X$, удовлетворяющих условию $E \cap \partial U = \varnothing \neq E \cap \partial V$ и $F \cap \partial U = \varnothing \neq F \cap \partial V$, см. [3, разд. 13.9]. Пространство X будем называть *слабо плоским*, если указанное свойство имеет место для каждого $x_0 \in X$. Здесь и далее α обозначает хаусдорфову размерность пространства X. Если пространство X допускает слабую сферикализацию, то для области $G \subset \overline{X}$ и множеств $E, F \subset G$ положим

$$M_\alpha(\Gamma(E, F, G)) := M_\alpha(\Gamma(E \setminus \{\infty\}, F \setminus \{\infty\}, G \setminus \{\infty\}))\,.$$

Более того, для семейства кривых Γ на $\overline{X}$ положим $M_\alpha(\Gamma)=M_\alpha(\Gamma^*)$, где по определению Γ^* состоит из тех и только тех кривых семейства Γ, не проходящих через точку ∞. В таком случае, понятие слабой плоскости, относящееся к X, дословно можно перенести на произвольную область $G\subset\overline{X}$, а именно, пространство G будем называть *слабо плоским* в точке $x_0\in G$, если для любой окрестности U точки x_0 и для любого $P>0$ найдётся окрестность V этой точки, содержащаяся в U, такая, что $M_\alpha(\Gamma(E,F,G))\geqslant P$ для произвольных континуумов $E,F\subset G$, удовлетворяющих условию $E\cap\partial U=\varnothing\neq E\cap\partial V$ и $F\cap\partial U=\varnothing\neq F\cap\partial V$.

Всюду далее

$$B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}\,, S(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)=r\}\ ,$$

$$A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in X: r_1<d(x,x_0)<r_2\}\ . \tag{1.1}$$

Согласно [3, разд. 7] отображение $f:D\rightarrow X'$ (либо $f:D\rightarrow\overline{X'}$) будем называть *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0\in\overline{D}$, если для произвольных $0<r_1<r_2<r_0:=\sup\limits_{x\in D}d(x,x_0)$ и каждой измеримой по Лебегу функции $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$, такой что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,, \tag{1.2}$$

выполнено неравенство

$$M_{\alpha'}(f(\Gamma(S_1,S_2,D)))\leqslant\int\limits_{A\cap D}Q(x)\cdot\eta^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x)\,, \tag{1.3}$$

где $A=A(x_0,r_1,r_2)$, $S_1=S(x_0,r_1)$ и $S_2=S(x_0,r_2)$. Отметим, что оценки вида (1.3) являются важнейшим инструментом исследования в теории отображений, см., напр., [7, теоремы II.8.1] и [3, теоремы 8.1, 8.6]. Укажем также на работы, связанные с изучением отображений, удовлетворяющих условиям (1.2)–(1.3), см. напр., [9–13].

Будем говорить, что область $D\subset X$ удовлетворяет условию **A**, если *любые две пары точек $a\in D,b\in\overline{D}$, и $c\in D,d\in\overline{D}$ можно соединить непересекающимися между собой кривыми C_1 и C_2 в области D*. Заметим, что такому условию удовлетворяют произвольные области евклидового пространства, локально связные на своей границе (см. [1, предложение 1]).

Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $x \in X$ таких, что $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Семейство $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Пространство X называется *локально линейно связным,* если для каждой точки $x_0 \in X$ и произвольной её окрестности U найдётся линейно связная окрестность $V \subset U$ точки x_0 (другими словами, любые две точки $x_1, x_2 \in V$ можно соединить кривой, целиком лежащей в V).

Предположим, X' допускает слабую сферикализацию. Тогда для областей $D \subset X$, $D' \subset \overline{X'}$ и произвольной измеримой функции $Q : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов g области D' на область D таких, что $f = g^{-1}$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) в каждой точке $x_0 \in D$ для произвольных $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$. Здесь гомеоморфность g понимается в смысле отображений пространств $(\overline{X'}, h)$ и (X, d). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим,* (X, d, μ) *и* (X', d', μ') *– метрические пространства с хаусдорфовыми размерностями* $2 \leqslant \alpha, \alpha' < \infty$ *при этом,* X *локально линейно связно, а* X' *допускает слабую сферикализацию. Пусть также* D *и* D' *– области в* X *и* $\overline{X'}$*, соответственно, при этом, пространство* D' *является слабо плоским как метрическое пространство, кроме того,* $\overline{D}$ *является компактом в* X*, а множество* ∂D *содержит не менее двух точек.*

Если область D *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{A}$ *и* $Q \in L^1(D)$*, то семейство* $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ *является равностепенно непрерывным в* D'*.*

Замечание 1.1. В теореме 1.1 равностепенная непрерывность понимается в контексте отображений, действующих между пространствами $(\overline{X'}, h)$ и (X, d). Другими словами, $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ является равностепенно непрерывным в D' тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $y_0 \in D'$ найдётся $\delta = \delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$ при всех $g \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$ и $y \in D'$, удовлетворяющих условию $h(y, y_0) < \delta$.

Заметим также, что если f – гомеоморфизм области $D \subset X$ на $D' \subset X'$, понимаемый относительно метрик d и d', то также f – гомеоморфизм относительно метрик d и h, так как по предположению d' порождают одну и ту же топологию на X'.

2. Доказательство теоремы 1.1

Для отображения $f : D \to \overline{X'}$ и множества $E \subset X$ положим

$$C(f, E) := \{y \in \overline{X'} : \exists\, x_k \in D, x_0 \in E : x_k \to x_0, f(x_k) \xrightarrow{h} y\,, k \to \infty\}\,.$$

Проведём доказательство теоремы 1.1 от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $y_0 \in D'$, другими словами, найдутся $y_0 \in D'$ и $\varepsilon_0 > 0$ со следующим условием: для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся $y_m \in D'$, $h(y_m, y_0) < 1/m$, и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$, такие что

$$d(g_m(y_m), g_m(y_0)) \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{2.1}$$

Поскольку по условию $\overline{D}$ является компактом, мы можем считать, что последовательности $g_m(y_m)$ и $g_m(y_0)$ сходятся при $m \to \infty$ к точкам $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2} \in \overline{D}$. В силу неравенства (2.1) по непрерывности метрики d имеем: $d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geqslant \varepsilon_0$. По условию теоремы найдутся точки $x_1, x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$.

Определим кривые γ_1^* и γ_2^* следующим образом. Если обе точки $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ являются граничными, то обозначим через γ_i^* вырожденную кривую, образ которой совпадает с соответствующей точкой $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$. Если ровно одна из точек $\overline{x_1}$ или $\overline{x_2}$ является граничной, например, точка $\overline{x_1}$, то снова обозначим через γ_1^* соответствующую ей вырожденную кривую, образ которой совпадает с $\overline{x_1}$; в этом случае, точку x_2 соединим с точкой $\overline{x_2}$ кривой, которая лежит в D целиком, за исключением концевой точки x_2 (это возможно в силу условия **A**).

Наконец, если обе точки $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ являются внутренними, соединим точку $\overline{x_1}$ с точкой $x_1 \in \partial D$, а точку $\overline{x_2}$ – с точкой $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, непересекающимися кривыми γ_1^* и γ_2^*, соответственно, так что $\gamma_i^*(t) \in D$ при $0 < t < 1$, $\gamma_1^*(0) = \overline{x_1}$, $\gamma_1^*(1) = x_1$, $\gamma_2^*(0) = \overline{x_2}$, $\gamma_2^*(1) = x_2$ (это возможно в силу условия **A**, см. рисунок 1). Заметим, что $|\gamma_1^*|$ и $|\gamma_2^*|$ – компакты в X, поэтому $d(|\gamma_1^*|, |\gamma_2^*|) = l_0 > 0$. Рассмотрим покрытие $A_0 := \bigcup\limits_{x \in |\gamma_1^*|} B(x, l_0/4)$ кривой $|\gamma_1^*|$. Поскольку $|\gamma_1^*|$ – компактное множество, можно выбрать конечное число индексов $1 \leqslant N_0 < \infty$ и соответствующие точки $z_1, \ldots, z_{N_0} \in |\gamma_1^*|$ так, что $|\gamma_1^*| \subset B_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4)$. Не ограничивая общности, можно считать, что все точки z_i принадлежат D, так как в случае необходимости можно заменить шар $B(x, l_0/4)$ на шар $B(x^*, l_0^*/4)$ с центром в некоторой точке $x^* \in D$, где l_0^* – некоторое положительное число, которое можно выбрать так, что $l_0/4 < l_0^*/4 < l_0/2$. Пусть $l_1 =$

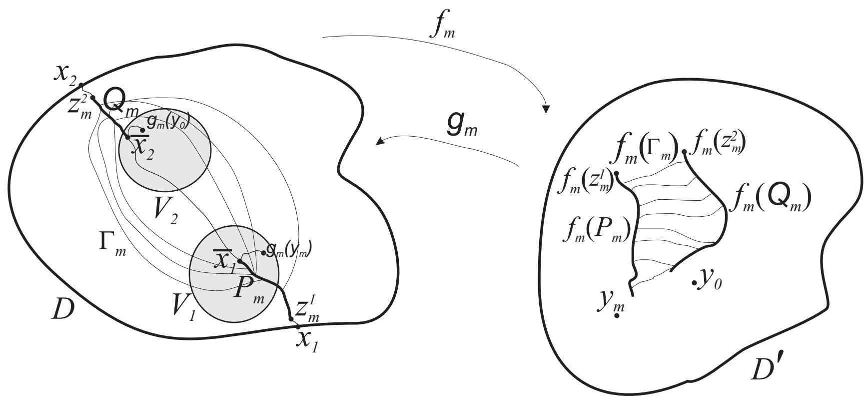

Рис. 1: К доказательству теоремы 1.1

$d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) > 0$. Поскольку пространство X локально линейно связно, то найдутся линейно связные окрестности $V_i \subset B_0$ точек $\overline{x_i}$, $i = 1, 2$. Соединим $g_m(y_m)$ кривой α_m с точкой $\overline{x_1}$ внутри V_1, а $g_m(y_0)$ – кривой β_m с точкой $\overline{x_2}$ внутри V_2. Пусть $\widetilde{\gamma_m} : [0,1] \to X$ – кривая, которая является объединением кривых α_m и γ_1, а $\widetilde{\Delta_m} : [0,1] \to X$ – кривая, которая является объединением кривых β_m и γ_2, где $\alpha_m(0) = g_m(y_m)$ и $\beta_m(0) = g_m(y_0)$. Пусть

$$t_m = \sup_{t\in[0,1]} \left\{t : \widetilde{\gamma_m}(t) \in D\right\}, \quad p_m = \sup_{t\in[0,1]} \left\{t : \widetilde{\Delta_m}(t) \in D\right\}.$$

Положим

$$\gamma_m = \widetilde{\gamma_m}|_{[0,t_m)}, \qquad \Delta_m = \widetilde{\Delta_m}|_{[0,p_m)}.$$

Поскольку $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ для произвольного гомеоморфизма f области D на D' (см. [3, предложение 13.5]), то найдутся последовательности точек $z_m^1 \in |\gamma_m|$ и $z_m^2 \in |\Delta_m|$ таких, что $h(f_m(z_m^1), \partial D') < 1/m$ и $h(f_m(z_m^2), \partial D') < 1/m$. Так как $\overline{X'}$ – компакт, то можно считать, что $f_m(z_m^1) \to p_1 \in \partial D'$ и $f_m(z_m^2) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Пусть P_m – часть носителя кривой γ_m в X, расположенная между точками $g_m(y_m)$ и z_m^1, а Q_m – часть носителя кривой Δ_m в X, расположенная между точками $g_m(y_0)$ и z_m^2.

В этом случае,

$$P_m \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B(z_i, l_0/4).$$

Пусть Γ_m – семейство всех кривых, соединяющих P_m и Q_m в D. Тогда мы имеем, что

$$\Gamma_m = \bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{mi}, \tag{2.2}$$

где Γ_{mi} – семейство всех кривых $\gamma : [0,1] \to D'$ таких, что $\gamma(0) \in B(z_i, l_0/4) \cap P_m$ и $\gamma(1) \in Q_m$ при $1 \leqslant i \leqslant N_0$. Принимая во внимание [8, теорема 1.I.5.46], мы можем показать, что

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(z_i, l_0/4), S(z_i, l_0/2), A(z_i, l_0/4, l_0/2))\,. \qquad (2.3)$$

Положим

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,. \end{cases}$$

Поскольку отображения f_m удовлетворяют соотношению (1.3) в D, то

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m) \leqslant 4^{\alpha} N_0 / l_0^{\alpha} \cdot \|Q\|_1 := c < \infty\,, \qquad (2.4)$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, $h(f_m(P_m)) \geqslant h(y_m, f_m(z_m^1)) \geqslant (1/2) \cdot h(y_0, p_1) > 0$ и $h(f_m(Q_m)) \geqslant h(y_0, f_m(z_m^2)) \geqslant (1/2) \cdot h(y_0, p_2) > 0$, кроме того, $h(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant h(y_m, y_0) \to 0$, $m \to \infty$. Тогда ввиду слабой плоскости D'

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m)) = M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(P_m), f_m(Q_m), D')) \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

что противоречит соотношению (2.4). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (2.1), что и завершает доказательство теоремы. □

3. Равностепенная непрерывность в замыкании области

Заметим, что без каких-либо дополнительных условий семейство отображений из теоремы 1.1 не является равностепенно непрерывным на границе заданной области даже в евклидовом случае и даже с конформной характеристикой $Q \equiv 1$ (см. [1, примеры 1 и 2]). Для того, чтобы обозначить указанные условия, рассмотрим следующее определение.

Условимся говорить, что граница области $D' \subset \overline{X'}$ является *слабо плоской,* если для каждой точки $x_0 \in \partial D'$, каждого $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки такая, что $M_{\alpha'}(\Gamma(E, F, D')) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D'$, пересекающих ∂U и ∂V.

Для числа $\delta > 0$, областей $D \subset X$, $D' \subset \overline{X'}$, фиксированного континуума $A \subset D$ и произвольной измеримой функции $Q : X \to [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{H}_{\delta, A, Q}(D, D')$ семейство всех гомеоморфизмов g области D' на D таких, что $f = g^{-1}$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) в каждой точке $x_0 \in D$ для произвольных

$0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$, при этом, $h(f(A), \partial D') \geqslant \delta > 0$. Справедливо следующее утверждение, см. также [14, теорема 1.2] и [15, теорема 1].

Теорема 3.1. *Предположим, выполнены все условия теоремы 1.1, кроме того, граница области D' является слабо плоской. Тогда каждый элемент g семейства $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продолжается по непрерывности до отображения $\overline{g} = \overline{f^{\,-1}} : \overline{D'} \to \overline{D}$, при этом, $g(\overline{D'}) = \overline{D}$ и, кроме того, семейство $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ всех продолженных отображений $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'}$.*

Доказательство. Возможность непрерывного продолжения каждого $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ на границу D' может быть получена посредством рассуждений, аналогичных доказательству [5, теорема 3]. Равностепенная непрерывность $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ в D' является утверждением теоремы 1.1. Равенство $g(\overline{D'}) = \overline{D}$ для $g \in \mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(D, D')$ проверяется аналогично первой части доказательства теоремы 1 в [15]. Осталось показать равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ на границе области D'.

Предположим противное, а именно, допустим, что найдётся точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$, $z_m \in \overline{D'}$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$ и $\overline{g}_m \in \mathfrak{H}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такие, что

$$d(\overline{g}_m(z_m), \overline{g}_m(z_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{3.1}$$

Положим $g_m := \overline{g}_m|_{D'}$. Так как g_m по непрерывности продолжается на границу D', можно считать, что $z_m \in D'$ и, значит, $\overline{g}_m(z_m) = g_m(z_m)$. Кроме того, найдётся ещё одна последовательность $z'_m \in D'$, $z'_m \to z_0$ такая, что $d(g_m(z'_m), \overline{g}_m(z_0)) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $\overline{D}$ – компакт, мы можем считать, что последовательности $g_m(z_m)$ и $g_m(z_0)$ являются сходящимися при $m \to \infty$. Пусть $g_m(z_m) \to \overline{x_1}$ и $\overline{g}_m(z_0) \to \overline{x_2}$ при $m \to \infty$. По непрерывности метрики и из (3.1) вытекает, что $d(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geqslant \varepsilon_0$, более того, так как гомеоморфизмы сохраняют границу, $\overline{x_2} \in \partial D$. Пусть x_1 и x_2 – произвольные различные точки континуума A, ни одна из которых не совпадает с $\overline{x_1}$. Ввиду условия **A** можно соединить точки x_1 и $\overline{x_1}$ кривой $\gamma_1 : [0, 1] \to \overline{D}$, а точки x_2 и $\overline{x_2}$ – кривой $\gamma_2 : [0, 1] \to \overline{D}$ так, что $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_i(t) \in D$ при всех $t \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = x_1$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = x_2$ и $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$.

Полагая

$$l_0 = d(|\gamma_1|, |\gamma_2|)\,,$$

рассмотрим покрытие $A_0 := \bigcup\limits_{x\in|\gamma_1|} B(x, l_0/4)$ компакта $|\gamma_1|$. Поскольку $|\gamma_1|$ является компактом, выберем $1 \leqslant N_0 < \infty$ и $x_1, \ldots, x_{N_0} \in |\gamma_1|$

такие, что $|\gamma_1| \subset B_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)$. Заметим, что среди точек x_i может быть лишь одна граничная точка $\overline{x_1}$ (в том случае, если она является граничной). Если это так, то заменим шар $B(\overline{x_1}, l_0/4)$ на шар $B(x^*, l_0^*/4)$, где $x^* \in D$ и l_0^* – некоторое положительное число, которое можно выбрать так, что $l_0/4 < l_0^*/4 < l_0/2$. Таким образом, можно считать, что в представлении $B_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, l_0/4)$ все точки x_i принадлежат D.

Так как D локально связна на своей границе, найдутся непересекающиеся окрестности $U_1 \subset B_0$ и U_2 точек $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$, соответственно, такие, что $W_i := D \cap U_i$ – линейно связные множества. Без ограничения общности, мы можем считать, что $g_m(z_m) \in W_1$ и $g_m(z'_m) \in W_2$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть a_1 и a_2 – произвольные точки, принадлежащие $|\gamma_1| \cap W_1$ и $|\gamma_2| \cap W_2$, соответственно. Пусть t_1, t_2 такие, что $\gamma_1(t_1) = a_1$ и $\gamma_2(t_2) = a_2$. Соединим a_1 и $g_m(z_m)$ посредством кривой $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такой, что $\alpha_m(t_1) = a_1$ и $\alpha_m(1) = g_m(z_m)$. Аналогично, соединим a_2 и $g_m(z'_m)$ кривой $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$ такой, что $\beta_m(t_2) = a_2$ и $\beta_m(1) = g_m(z'_m)$, см. рисунок 2.

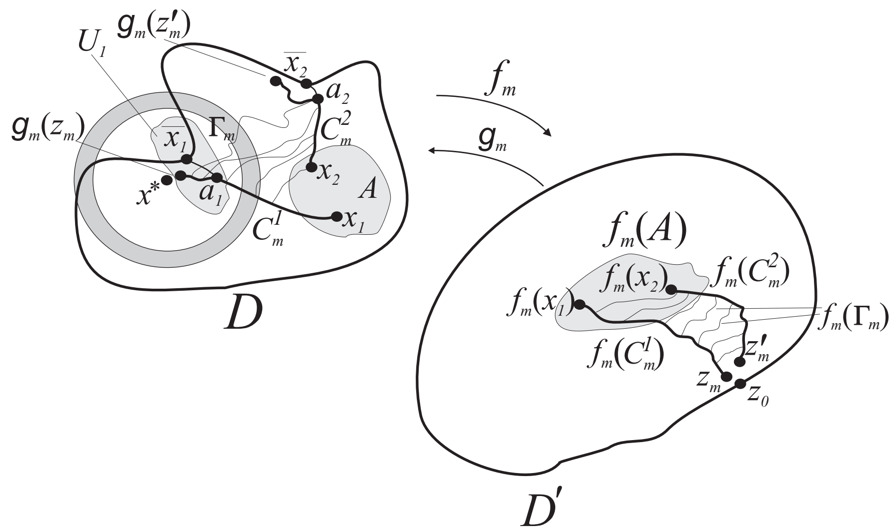

Рис. 2: К доказательству теоремы 3.1

Положим

$$C_m^1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{array} \right., \qquad C_m^2(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{array} \right. .$$

Обозначим, как обычно, $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ носители кривых C_m^1 и C_m^2, соответственно. Тогда

$$|C_m^1|\subset\bigcup_{i=1}^{N_0}B(x_i,l_0/4)\,.$$

Пусть Γ_m – семейство кривых, соединяющих $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ в D. Тогда

$$\Gamma_m=\bigcup_{i=1}^{N_0}\Gamma_{mi}\,, \tag{3.2}$$

где Γ_{mi} определим как семейство, состоящее из кривых $\gamma:[0,1]\to D$ таких, что $\gamma(0)\in B(x_i,l_0/4)\cap|C_m^1|$ и $\gamma(1)\in|C_2^m|$ при $1\leqslant i\leqslant N_0$. На основании [8, теорема 1.I.5.46] и по выбору l_0 можно показать, что при $1\leqslant i\leqslant N_0$

$$\Gamma_{mi}>\Gamma(S(x_i,l_0/4),S(x_i,l_0/2),A(x_i,l_0/4,l_0/2)\cap D)\,. \tag{3.3}$$

Полагая

$$\eta(t)=\begin{cases}4/l_0, & t\in[l_0/4,l_0/2],\\ 0, & t\notin[l_0/4,l_0/2]\end{cases}$$

и $f_m:=g_m^{-1}$, учитывая (1.3), мы получаем, что

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma(S(x_i,l_0/4),S(x_i,l_0/2),A(x_i,l_0/4,l_0/2)\cap D)))\leqslant$$
$$\leqslant(4/l_0)^{\alpha}\cdot\|Q\|_1<c_i<\infty\,, \tag{3.4}$$

где c_i – некоторая положительная постоянная, не зависящая от m, и $\|Q\|_1=\int\limits_D Q(x)\,d\mu(x)$. На основании (3.2), (3.3) и (3.4) и учитывая полуаддитивность модуля, мы заключаем, что

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m))\leqslant(4^{\alpha}N_0/l_0^{\alpha})\|Q\|_1:=c<\infty\,, \tag{3.5}$$

т.к. $Q\in L^1(D)$ по предположению. С другой стороны, по условию теоремы найдётся число $\delta>0$ такое, что $h(f_m(A),\partial D')\geqslant\delta>0$, $m=1,2,\ldots$. Отсюда вытекает существование номера $m_1\in\mathbb{N}$, такого что

$$h(f_m(|C_m^1|))\geqslant h(z_m,f_m(x_1))\geqslant(1/2)\cdot h(f_m(A),\partial D')\geqslant\delta\,,$$
$$h(f_m(|C_m^2|))\geqslant h(z_m',f_m(x_2))\geqslant(1/2)\cdot h(f_m(A),\partial D')\geqslant\delta \tag{3.6}$$

при всех $m\geqslant m_1$. Кроме того, $h(f_m(|C_m^1|),f_m(|C_m^2|))\leqslant h(z_m,z_m')\to 0$ по выбору z_m и z_m'. Тогда в силу слабо плоскости D' на её границе мы получаем, что

$$M_{\alpha'}(f_m(\Gamma_m))=M_{\alpha'}(\Gamma(f_m(|C_m^1|),f_m(|C_m^2|),D'))\to\infty$$

при $m\to\infty$. Последнее соотношение противоречит (3.6), что указывает на неверность предположения в (3.1). Теорема доказана. $\Box$

Литература

[1] Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями* // Укр. мат. журнал, **70** (2018), No. 7, 952–967; transl. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions* // Ukr. Math. J., **70,** no. 7, 2018, p. 1097–1114.

[2] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов,*Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. мат. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234; transl. V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, *Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory* // Ukr. Math. Bull., **4** (2007), No. 2, 199–233.

[3] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York, Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[4] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on metric spaces*, New York, Springer Science+Business Media, 2001.

[5] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 5, 682–689; transl. E. S. Smolovaya, *Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces* // Ukrainian Math. J., **62** (2010), No. 5, 785–793.

[6] E. A. Sevost'yanov, A. A. Markysh, *On Sokhotski-Casorati-Weierstrass theorem on metric spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations, published online https://www.tandfonline.com/doi/full/ 10.1080/17476933.2018.1557155.

[7] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[8] К. Куратовский, *Топология,* т. 2., М., Мир, 1969.

[9] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On convergence theorems for space qusiregular mappings* // Forum Math., **10** (1998), 353–375.

[10] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings* // Studia Math., **128** (1998), No. 3, 243–271.

[11] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Укр. мат. вестник, **12** (2015), No. 1, 27–66; transl. in Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 22–51.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), No. 1, 49–69.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[14] E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality* // Ann. Acad. Scie. Fenn. Math. (accepted for print).

[15] E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, N. S. Ilkevych, *On boundary behavior of mappings with two normalized conditions* // Mat. Studii, **49** (2018), No. 2, 150–157.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com

Сергей Александрович Скворцов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина
E-Mail: serezha.skv@gmail.com