Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 4, 516 – 535

Рациональная гомотопическая теория шейпово односвязных пространств

Владимир В. Марченко

(*Представлена В. А. Деркачом*)

Аннотация. В настоящей работе определяется рациональный шейповый тип, а также сильный рациональный шейповый тип для класса шейпово односвязных пространств – естественного обобщения класса односвязных пространств, для которого в работе [10] была построена рациональная гомотопическая теория. С использованием категории обратных систем результат [10] об эквивалентности гомотопических теорий распространяется на класс шейпово односвязных пространств.

2010 MSC. 55P55, 55P62.

Ключевые слова и фразы. Гомотопическая теория, рациональная гомотопическая теория, теория шейпов, рациональная шейповая теория.

1. Введение

В 60–70-х годах XX века была построена теория рационального гомотопического типа односвязных топологических пространств. Ее авторами считаются Д. Квиллен [10] и Д. Салливан [11], хотя вклад в её создание внесли многие видные топологи мира. Ее появление явилось результатом того, что к этому времени была осознана сложность классической теории гомотопий, в частности вычисления гомотопических групп сфер. Теория существенно упрощается, если при изучении пространств игнорировать кручения в гомотопических группах, т. е. вместо данного пространства рассматривать другое, гомотопические группы которого изоморфны группам данного, тензорно умноженным на $\mathbb{Q}$. Этим и занимается рациональная гомотопическая теория. Одной из наиболее полных монографий, посвященных теории рационального гомотопического типа, является [5].

Статья поступила в редакцию 08.04.2018
Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100".

ISSN 1810 – 3200.

Подход Салливана состоит в переходе от пространств к т. н. минимальным $\mathbb{Q}$-алгебрам, которые полностью определяют рациональный гомотопический тип пространств. Однако этот переход позволяет изучать лишь сами пространства, но не отображения между ними. Другими словами, при таком подходе отсутствует функториальность. Однако преимущество этого подхода состоит в наглядности и легкости вычислений. Это, в частности, позволило в работе [2] распространить подход Салливана на случай нильпотентных множеств конечного ранга, а в [7] теория Сулливана распространяется на случай локально нильпотентных симплициальных множеств произвольного ранга.

Подход Квиллена менее удобный с вычислительной точки зрения, однако является функториальным.

При этом как общая, так и рациональная гомотопические теории являются содержательными лишь для некоторого (достаточно узкого) класса топологических пространств. Одновременно с появлением теории рациональных гомотопий получила развитие теория шейпов — обобщение гомотопической теории на более широкий класс пространств. Ее автором является польский математик К. Борсук [1]. В работе [8] для изложения теории шейпов используется оригинальный подход, основанный на обратных системах. Дальнейшее развитие теории привело к построению сильной теории шейпов (см. [7–9]).

Целью настоящей работы является определение (сильной) рациональной шейповой категории шейпово односвязных пространств и обобщение на этот случай результатов Д. Квиллена.

2. Рациональная теория CW-комплексов

Рассматриваемые в этой главе топологические пространства будем предполагать связными и имеющими гомотопический тип CW-комплекса.

Рациональная гомотопическая теория есть изучение топологических пространств по модулю кручения. Это означает, что топологическое пространство X заменяется другим, более простым т. н. $\mathbb{Q}$-пространством X_0, гомотопические группы $\pi_*(X_0)$ которого являются векторными пространствами над $\mathbb{Q}$ и изоморфны группам $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. При этом для некоммутативной группы $\pi_1(X)$ группа $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ понимается как пополнение по Мальцеву.

Определение 2.1. Локализацией пространства X называется такое $\mathbb{Q}$-пространство X_0 вместе с отображением $f_0\colon X \to X_0$, что для любого $\mathbb{Q}$-пространства Y и любого отображения $f\colon X \to Y$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $g\colon X_0 \to Y$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f_0"] & & X_0 \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна, т. е. $g \circ f_0 \simeq f$.

Для построения локализации односвязного пространства может быть использована, например, конструкция *башни Постникова.* Более широкий класс пространств, для которых существует локализация, – это класс нильпотентных пространств.

Определение 2.2. Пространство X называется нильпотентным, если группа $\pi_1(X)$ нильпотентна и её действие на группах $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$, нильпотентно, т. е. существует последовательность вложенных подгрупп

$$\pi_n(X) = \Pi_0 \supset \Pi_1 \supset \ldots \supset \Pi_s = \{0\},$$

каждая из которых инвариантна относительно действия $\pi_1(X)$, причём индуцированное действие $\pi_1(X)$ на фактор-группах Π_{i-1}/Π_i тривиально.

Теорема 2.1. *1. Всякое нильпотентное пространство X допускает локализацию $f\colon X \to X_0$;*

2. Для того чтобы отображение f являлось локализацией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:

- $\pi_n(X_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;
- $H_n(X_0;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;
- $H^n(X_0;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

В случае если топологическое пространство не является CW-комплексом, описанная теория, вообще говоря, не работает. Примером может служить т. н. “варшавская окружность” W – замыкание $\bar{G}$ в $\mathbb{R}^2$ графика G функции $y = \sin\dfrac{\pi}{x}$, $x \in (0;1]$, объединённое с простой дугой с концами $(0;1)$, $(1;0)$, пересекающейся с $\bar{G}$ лишь в этих двух точках. Гомотопические группы $\pi_*(W)$ (а значит, и рациональные гомотопические группы $\pi_*(W)\otimes\mathbb{Q}$) все равны нулю, хотя W не гомотопно точке. В этом случае теорема Уайтхеда перестаёт быть верной и, таким образом, обычная гомотопическая теория оказывается непригодной для изучения пространства W.

3. Обратные системы и категория шейпов

Теорию шейпов в настоящем параграфе изложим, следуя [8].

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{C}$ – произвольная категория. Обратная система $X = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ над категорией $\mathfrak{C}$ состоит из направленного множества индексов Λ, объектов X_λ из $\mathfrak{C}$, $\lambda \in \Lambda$, и морфизмов $p_{\lambda\lambda'}\colon X_{\lambda'} \to X_\lambda$ из $\mathfrak{C}$ для $\lambda \leqslant \lambda'$. Более того, должны быть выполнены следующие условия:

1. $p_{\lambda\lambda} = \mathbf{1}_{X_\lambda}\colon X_\lambda \to X_\lambda$ — тождественный морфизм (часто его кратко обозначают $\mathbf{1}_\lambda$);

2. $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$ всякий раз, когда $\lambda \leqslant \lambda' \leqslant \lambda''$.

Морфизмы $p_{\lambda\lambda'}\colon X_{\lambda'} \to X_\lambda$ будем называть *граничными морфизмами.*

Определение 3.2. Морфизм обратных систем $(f_\mu, \phi)\colon \underline{X} \to \underline{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ состоит из функции $\phi\colon M \to \Lambda$ и набора морфизмов $f_\mu\colon X_{\phi(\mu)} \to Y_\mu$ в $\mathfrak{C}$ (для каждого μ — единственный морфизм f_μ), причем для каждой пары индексов $\mu \leqslant \mu' \in M$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda \geqslant \phi(\mu), \phi(\mu')$ и $f_\mu p_{\phi(\mu),\lambda} = q_{\mu\mu'} f'_\mu p_{\phi'(\mu),\lambda}$, т. е. следующая диаграмма коммутативна.

$$
\begin{tikzcd}
& X_\lambda \arrow[dl, "p_{\phi(\mu),\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{\phi'(\mu),\lambda}"] & \\
X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & & X_{\phi'(\mu)} \arrow[d, "f'_\mu"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"']
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

Если $\underline{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ — обратная система в $\mathfrak{C}$ и $(g_\nu, \psi)\colon \underline{Y} \to \underline{Z}$ – ещё один морфизм обратных систем, композицию $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \phi) = (h_\nu, \chi)\colon \underline{X} \to \underline{Z}$ определим следующим образом: $\chi = \phi\psi\colon N \to \Lambda$ и $h_\nu = g_\nu f_{\psi(\nu)}\colon X_{\chi(\nu)} \to Z_\nu$. Можно проверить, что определённый таким образом морфизм действительно удовлетворяет всем условиям определения 3.2 (см. [8]).

Тождественный морфизм систем $\underline{X} \to \underline{X}$ состоит из тождественной функции $\mathbf{1}_\Lambda \colon \Lambda \to \Lambda$ и набора тождественных морфизмов $\mathbf{1}_\lambda \colon X_\lambda \to X_\lambda$. Так как $p_{\lambda\lambda} = \mathbf{1}_\lambda$, то диаграмма (3.1) в этом случае действительно коммутативна.

Заметим, что $(f_\mu, \phi)(\mathbf{1}_\lambda, \mathbf{1}_\Lambda) = (f_\mu, \phi)$ и $(\mathbf{1}_\mu, \mathbf{1}_M)(f_\mu, \phi) = (f_\mu, \phi)$.

Таким образом, построена категория inv-$\mathfrak{C}$, объектами которой являются все обратные системы в $\mathfrak{C}$, а морфизмами – морфизмы обратных систем, описанные выше.

Определение 3.3. Говорят, что два морфизма $(f_\mu, \phi), (f'_\mu, \phi') \colon \underline{X} \to \underline{Y}$ обратных систем эквивалентны, и пишут $(f_\mu, \phi) \sim (f'_\mu, \phi')$, если для всякого индекса $\mu \in M$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda \geqslant \phi(\mu), \phi'(\mu)$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{\phi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & & X_{\phi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\ & Y_\mu & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

коммутативна.

Введенное отношение действительно удовлетворяет всем аксиомам отношения эквивалентности (см. [8]).

Далее, если $(f_\mu, \phi) \sim (f'_\mu, \phi')$, $(g_\nu, \psi) \sim (g'_\nu, \psi')$, то $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \phi) \sim (g'_\nu, \psi')(f'_\mu, \phi')$. Таким образом, может быть корректно определена композиция классов $\mathbf{f} \colon \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\mathbf{g} \colon \underline{Y} \to \underline{Z}$ эквивалентных морфизмов обратных систем как класс, содержащий композицию $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \phi)$.

Определим $\mathbf{1}_{\underline{X}} \colon \underline{X} \to \underline{X}$ как класс, содержащий морфизм $(\mathbf{1}_\lambda, \mathbf{1}_\Lambda)$. Тогда, по определению композиции, будем иметь $\mathbf{1}_{\underline{Y}} f = f$, $f \mathbf{1}_{\underline{X}} = f$ для любого класса $\mathbf{f} \colon \underline{X} \to \underline{Y}$ эквивалентных морфизмов.

Таким образом, может быть дано

Определение 3.4. Категорией pro-$\mathfrak{C}$ для категории $\mathfrak{C}$ называется категория, объектами которой являются обратные системы в $\mathfrak{C}$, а морфизмами – классы эквивалентных морфизмов обратных систем.

Определение 3.5. Морфизм

$$(f_\lambda, \varphi) \colon \underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \to \underline{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

двух обратных систем с одним и тем же множеством индексов будем называть *уровневым*, если

1. $\varphi = \mathbf{1}_\Lambda$;

2. для $\lambda \leqslant \lambda'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\lambda & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[d, "f_{\lambda'}"] \\ Y_\lambda & Y_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[from=1-1, to=2-1, "f_\lambda"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определение 3.6. Упорядоченное множество $(\Lambda, \leqslant)$ называется кофинитным, если для всякого $\lambda \in \Lambda$ множество $\{\lambda' \in \Lambda |\, \lambda' \leqslant \lambda\}$ всех его предшественников конечно.

В [8] получены следующие результаты.

Теорема 3.1. *Для всякой обратной системы $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in$ pro-$\mathfrak{C}$ существует изоморфная ей в pro-$\mathfrak{C}$ обратная система $\underline{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ с кофинитным множеством индексов M.*

Теорема 3.2. *Пусть $(f_\mu, \phi)\colon \underline{X} \to \underline{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big) \in$ pro-$\mathfrak{C}$ – морфизм обратных систем. Тогда существует морфизм систем $(g_\mu, \psi)\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, такой, что функция ψ является возрастающей и морфизмы (g_μ, ψ) и (f_μ, ϕ) равны в pro-$\mathfrak{C}$.*

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbf{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ – морфизм в pro-$\mathfrak{C}$. Тогда существуют обратные системы $\underline{X}'$, $\underline{Y}'$ с одним и тем же кофинитным направленным множеством индексов. Более того, существуют изоморфизмы $\mathbf{i}\colon \underline{X} \to \underline{X}'$ и $\mathbf{j}\colon \underline{Y} \to \underline{Y}'$, а также морфизм $\mathbf{f}'\colon \underline{X}' \to \underline{Y}'$ в pro-$\mathfrak{C}$, такие, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \underline{X}' \arrow[d, "\mathbf{f}'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "\mathbf{j}"'] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

коммутативна. При этом в классе f' существует представитель, являющийся уровневым морфизмом.

Пусть $HTop$ – гомотопическая категория топологических пространств, объектами которой являются топологические пространства, а морфизмами – классы гомотопных отображений. Пусть также HCW – полная подкатегория $HTop$, объектами которой являются CW-комплексы.

Определение 3.7. Резольвентой Мардешича топологического пространства X будем называть обратную систему $\underline{X} = \{X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\}$ над категорией $HTop$ вместе с отображением в *pro-HTop* $p\colon X \to \underline{X}$[1], обладающие следующим универсальным свойством.

Для любой обратной системы $\underline{Y} = \left\{Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right\}$ над HCW и любого морфизма в *pro-HTop* $q\colon X \to \underline{Y}$ существует единственный такой морфизм в *pro-Top* $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \underline{X} \arrow[dl, dashed, "f"] \\ \underline{Y} & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f \circ p = q$.

Теорема 3.4. *Резольвента Мардешича топологического пространства всегда существует. Если существуют две резольвенты* $p\colon X \to \underline{X}$ *и* $p'\colon X \to \underline{X}'$, *то* $\underline{X}$ *и* $\underline{X}'$ *естественно изоморфны.*

Предположим, что $p\colon X \to \underline{X}$, $p'\colon X \to \underline{X}'$ – две резольвенты Мардешича пространства $X \in HTop$, $q\colon Y \to \underline{Y}$, $q'\colon Y \to \underline{Y}'$ – две резольвенты Мардешича пространства $Y \in HTop$, $i\colon \underline{X} \to \underline{X}'$, $j\colon \underline{X} \to \underline{X}'$ – соответствующие естественные изоморфизмы.

Определение 3.8. Говорят, что морфизмы $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ и $f'\colon \underline{X}' \to \underline{Y}'$ в *pro-HTop* эквивалентны, $f \sim f'$, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \underline{X}' \arrow[d, "f'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "j"] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

коммутативна в *pro-HTop*.

Очевидно, что введённое отношение есть действительно эквивалентность. Заметим также, что для заданных морфизмов p, q, f, p', q' существует единственный такой морфизм f', что $f \sim f'$.

Определение 3.9. Шейповым морфизмом двух топологических пространств $X \to Y$ будем называть класс экивалентности отображения $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ в *pro-HTop*.

[1]При этом X рассматривается как тривиальная обратная система.

Таким образом, шейповый морфизм $F\colon X \to Y$ задаётся следующей диаграммой.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[d, "f"'] & X \arrow[l, "p"'] \\ \underline{Y} & Y \arrow[l, "q"'] \end{tikzcd}$$

Композиция шейповых морфизмов $F\colon X \to Y$ и $G\colon Y \to Z$ определяется через композицию представителей $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ и $g\colon \underline{Y} \to \underline{Z}$. Тождественный морфизм $1_X\colon X \to X$ определяется как $1_{\underline{X}}\colon \underline{X} \to \underline{X}$. Класс морфизмов $\{X \to Y\}$ есть множество, т. к. множеством является $(pro\text{-}HTop)\,(\underline{X}, \underline{Y})$.

Теорема 3.5. *Для любого морфизма $f\colon X \to Y$ в $HTop$ и для резольвент $\underline{p}\colon X \to \underline{X}$, $\underline{q}\colon Y \to \underline{Y}$ существует единственный морфизм в $pro\text{-}HTop$ $\underline{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[d, "\underline{f}"'] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "f"] \\ \underline{Y} & Y \arrow[l, "\underline{q}"] \end{tikzcd}$$

коммутативна в $pro\text{-}HTop$. При этом если $\underline{p}'\colon X \to \underline{X}'$, $\underline{q}'\colon Y \to \underline{Y}'$ суть резольвенты, а $\underline{f}'\colon \underline{X}' \to \underline{Y}'$ – такой морфизм в $pro\text{-}HTop$, что $\underline{f}' \circ \underline{p}' = \underline{q}' \circ f$, то $\underline{f} \sim \underline{f}'$.

Следовательно, для каждого морфизма $f \in HTop\,(X, Y)$ поставлен в соответствие единственный шейповый морфизм $Sh(f)\colon X \to Y$, т. е. класс эквивалентности $\underline{f} \in pro\text{-}HTop\,(\underline{X}, \underline{Y})$.

Определение 3.10. Объектами *шейповой категории* $Sh\,(HTop)$ являются топологические пространства, а морфизмами – шейповые морфизмы топологических пространств. Ковариантный функтор $Sh\colon HTop \to Sh(HTop)$ называется *шейповым функтором.*

4. Замкнутые модельные категории и гомотопические теории Квиллена

Определение 4.1. Категория $\mathcal{C}$ называется замкнутой модельной категорией (в смысле Квиллена), если в ней выделены три класса морфизмов, называемых *расслоениями*, *корасслоениями* и *слабыми эквивалентностями*, так, что выполнены условия:

- Категория $\mathcal{C}$ замкнута относительно конечных прямых и обратных пределов;

- Если в последовательности $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \in \mathcal{C}$ любые два из отображений f, g, gf являются слабыми эквивалентностями, то слабой эквивалентностью является и третье отображение;

- Если отображение f является ретрактом отображения g, т. е. если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\tilde{u}"] & Y \arrow[r, "\tilde{v}"] & W \end{tikzcd}$$

  такая, что $v \circ u = id_V$, $\tilde{v} \circ \tilde{u} = id_W$, и g — слабая эквивалентность, расслоение или корасслоение, — то и f — слабая эквивалентность, расслоение или корасслоение соответственно;

- В любой коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[r, "v"] & B \end{tikzcd}$$

  где i – корасслоение, p – расслоение, существует отображение $f \colon X \to E$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "f"] & B \end{tikzcd}$$

  коммутативна (в этом случае еще говорят, что i обладает свойством левого поднятия относительно p или что p обладает свойством правого поднятия относительно i) в каждом из следующих случаев:

  – i – слабая эквивалентность,

  – p – слабая эквивалентность;

- Любое отображение f из $\mathcal{C}$ может быть двумя способами разложено в композицию:

– $f = pi$, где i – корасслоение и слабая эквивалентность, p – расслоение,

– $f = qj$, где j – корасслоение, q – расслоение и слабая эквивалентность.

Структура замкнутой модельной категории $\mathcal{C}$ может быть обобщена на обратные системы pro-$\mathcal{C}$ и inj-$\mathcal{C}$ (см. [6], §3.3), если частично упорядоченное направленное множество индексов Λ является кофинитным.

В частности, отображение $\underline{f}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$, которое есть набор послойных отображений $f_\lambda\colon X_\lambda \to Y_\lambda$, есть *слабая эквивалентность*, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение f_λ является слабой эквивалентностью.

Для всякой замкнутой модельной категории $\mathcal{C}$ Квиллен построил гомотопическую категорию $Ho(\mathcal{C})$. Ее объектами являются объекты из $\mathcal{C}$, а морфизмы получены путем формального обращения слабых эквивалентностей. Им показано, что $Ho(\mathcal{C})$ эквивалентна другой гомотопической категории $ho(\mathcal{C})$, в которой объектами являются фибрантно-кофибрантные объекты из $\mathcal{C}$, а отображениями – гомотопические классы отображений.

5. Функторы Квиллена

В [10] рассмотрены следующие категории:

- $\mathfrak{T}_2$ – категория односвязных топологических пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, сохраняющих отмеченную точку;

- $\mathfrak{S}_2$ – категория 2-редуцированных симплициальных множеств (полная подкатегория категории симплициальных множеств, состоящая из таких K, что K_q содержит лишь вырожденный симплекс для $q = 0, 1$);

- $(SGP)_1$ – категория редуцированных симплициальных групп (полная подкатегория категории симплициальных групп, состоящая из таких G, что $G_0 = \{e_0\}$);

- $(SCHA)_1$ – категория редуцированных симплициальных полных алгебр Хопфа над $\mathbb{Q}$;

- $(SLA)_1$ – категория редуцированных симплициальных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;

- $(DGL)_1$ – категория редуцированных дифференциальных градуированных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;
- $(DGC)_2$ – категория 2-редуцированных дифференциальных градуированных (кокоммутативных, коассоциативных) коалгебр над $\mathbb{Q}$.

На каждой из указанных категорий, за исключением категории $\mathfrak{T}_2$, Квиллен вводит структуру замкнутой модельной категории. Вместо $\mathfrak{T}_2$ рассматривается категория $\mathfrak{T}\,(2, \mathbb{Z}_0)$, состоящая из односвязных топологических пространств со следующими тремя выделенными классами отображений:

- корасслоения: такие отображения $f\colon X \to Y$, которые являются ретрактами последовательных композиций CW-отображений;
- слабые эквивалентности: отображения, индуцирующие изоморфизмы для функтора $\mathbb{Z}_0^{-1}\pi_*$;
- расслоения: расслоения Серра, такие, у которых слой $\pi_* X$ является $\mathbb{Z}_0$-однозначноделимой гомотопической группой[2].

Для каждой из этих категорий K Квиллен строит локализацию $Ho_{\mathbb{Q}}K = S^{-1}K$, где S – семейство рациональных гомотопических эквивалентностей, т.е. таких отображений f, что $\pi_* f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ есть изоморфизм.

Определение 5.1. *Рациональная гомотопическая категория* односвязных пространств $Ho\mathfrak{T}\,(2, \mathbb{Z}_0)$ есть локализация категории $\mathfrak{T}\,(2, \mathbb{Z}_0)$ относительно семейства слабых эквивалентностей.

Далее, Квилленом построена цепочка сопряженных функторов:

$$\mathfrak{T}_2 \underset{|\,|}{\overset{E_2Sing}{\rightleftarrows}} \mathfrak{S}_2 \underset{\overline{W}}{\overset{G}{\rightleftarrows}} (SGP)_1 \underset{\mathcal{G}}{\overset{\widehat{Q}}{\rightleftarrows}} (SCHA)_1 \underset{\mathcal{P}}{\overset{\widehat{U}}{\rightleftarrows}} (SLA)_1 \underset{N}{\overset{N^*}{\rightleftarrows}} (DGL)_1 \underset{\mathcal{C}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} (DGC)_2,$$

где

- $|\,|, E_2Sing$: $|\,|$ – функтор геометрической реализации, $SingX$ – сингулярный комплекс пространства X. Для симплициального множества с отмеченной точкой K E_2K есть подкомплекс Эйленберга, состоящий из симплексов комплекса K с точкой в качестве одномерного остова.

[2]То есть каноническое отображение $\pi_* X \to {\mathbb{Z}_0}^{-1}\pi_* X$ является изоморфизмом.

- $G, \bar{W}$: Для редуцированного симплициального множества K GK есть симплициальная группа, построенная Каном, играющая роль пространства петель для K. Для симплициальной группы G $\bar{W}G$ есть симплициальное множество, действующее как его классифицирующее пространство.

- $\hat{Q}, \mathcal{G}$: Для группы G $\hat{Q}G$ есть полная алгебра Хопфа, полученная пополнением группового кольца QG степенями его аугментационного идеала. Для полной алгебры Хопфа R $\mathcal{G}R$ есть группа, состоящая из её групповых элементов. Эти функторы распространяются по каждой размерности на симплициальные группы и симплициальные полные алгебры Хопфа и обозначаются теми же буквами.

- $\hat{U}, \mathcal{P}$: Для алгебры Ли над $\mathbb{Q}$ $\mathfrak{g}$ $\hat{U}\mathfrak{g}$ есть полная алгебра Хопфа, полученная пополнением универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ степенями её аугментационного идеала. Для полной алгебры Хопфа R $\mathcal{P}R$ есть алгебра Ли её примитивных элементов. К симплициальным объектам эти функторы применяются по каждой размерности.

- N^*, N: Для симплициальной алгебры Ли L NL есть её нормализованный цепной комплекс, который является дифференциальной градуированной алгеброй Ли со скобкой, определяемой с помощью отображения Эйленберга–Зильбера $\underline{\otimes}$. N^* есть левый сопряженный функтор для N.

- $\mathcal{L}, \mathcal{C}$: Для дифференциальной градуированной коалгебры C $\mathcal{L}C$ есть алгебра Ли примитивных элементов кобар-конструкции C. $\mathcal{C}L$ есть обобщение на дифференциальные градуированные алгебры Ли L дифференциальной градуированной коалгебры гомологий алгебры Ли.

Теорема 5.1 (Квиллен). *Указанные функторы индуцируют сопряженные эквивалентности*

$$Ho\mathfrak{T}_2 \underset{\widetilde{||}}{\overset{\widetilde{E_2 Sing}}{\rightleftarrows}} Ho\mathfrak{S}_2 \underset{\widetilde{\overline{W}}}{\overset{\widetilde{G}}{\rightleftarrows}} Ho(SGP)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{G}}}{\overset{\widetilde{\widehat{Q}}}{\rightleftarrows}} Ho(SCHA)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{P}}}{\overset{\widetilde{\widehat{U}}}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows Ho(SLA)_1 \underset{\widetilde{N}}{\overset{\widetilde{N^*}}{\rightleftarrows}} Ho(DGL)_1 \underset{\widetilde{\mathcal{C}}}{\overset{\widetilde{\mathcal{L}}}{\rightleftarrows}} Ho(DGC)_2.$$

Таким образом, рациональная гомотопическая теория односвязных пространств оказывается функториально эквивалентной гомотопическим теориям вышеуказанных алгебраических категорий.

6. Функтор Боусфилда–Кана $\mathbb{Q}_\infty$

В [4] построен функтор $\mathbb{Q}$-пополнения $\mathbb{Q}_\infty\colon \mathfrak{S}_* \to \mathfrak{S}_*$ для категории $\mathfrak{S}_*$ симплициальных множеств, обладающий следующими свойствами:

1. Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(Y,\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда оно индуцирует гомотопическую эквивалентность $\mathbb{Q}_\infty X \cong \mathbb{Q}_\infty Y$;

2. Для нильпотентного[3] пространства $X \in \mathfrak{S}_*$ с отмеченной точкой

   - пространство $\mathbb{Q}_\infty X$ и группа $\pi_*(\mathbb{Q}_\infty X)$ являются $\mathbb{Q}$-нильпотентными (см. [4], гл. 3, §5; гл. 5, §3),
   - отображение $\phi\colon X \to \mathbb{Q}_\infty X$ индуцирует изоморфизм
   $$\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Q});$$
   - группы $\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ и $\pi_*(\mathbb{Q}_\infty X)$, а также $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ и $\tilde{H}_*(\mathbb{Q}_\infty X,\mathbb{Z})$ изоморфны.

(Для цепного комплекса C

$$H_n(C) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(C), & n \neq 0, \\ \tilde{H}_0(C)\oplus\mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$$

([3], гл. 4, §3.1).)

Оказывается, что для нильпотентных пространств понятие $\mathbb{Q}$-пополнения есть не что иное, как $\mathbb{Q}$-локализация с точностью до гомотопии.

Гомотопическая теория симплициальных множеств эквивалентна гомотопической теории топологических пространств ([4], гл. 8, § 3), и понятие локализации для нильпотентных пространств эквивалентно понятию $\mathbb{Q}$-пополнению Боусфилда–Кана ([4], гл. 5, § 4).

7. Рациональная шейповая категория

Определение 7.1. Для любого топологического пространства X его *рациональной резольвентой Мардешича* назовём отображение в *pro-HTop* $\underline{p}_{\mathbb{Q}}\colon X \to \underline{X}_{\mathbb{Q}}$, где $\underline{p}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}_\infty \circ p(X)$ есть композиция резольвенты Мардешича $\underline{p}$ и функтора Боусфилда–Кана $\mathbb{Q}_\infty$.

[3] Понятие нильпотентности для симплициального множества аналогично понятию нильпотентности для топологического пространства.

Если $X \xrightarrow{p_{\mathbb{Q}}} \underline{X} \xrightarrow{\mathbb{Q}_\infty} \underline{X}_\infty$, $X \xrightarrow{p'_{\mathbb{Q}}} \underline{X}' \xrightarrow{\mathbb{Q}_\infty} \underline{X}'_\infty$ – две рациональные резольвенты Мардешича, то в силу естественной изоморфности $\underline{X}$ и $\underline{X}'$ обратные системы $\underline{X}_{\mathbb{Q}}$ и $\underline{X}'_{\mathbb{Q}}$ также естественно изоморфны.

Определение 7.2. Два морфизма $\underline{f}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_\infty \circ \underline{f}$ и $\underline{f}'_{\mathbb{Q}_\infty} = \mathbb{Q}_\infty \circ \underline{f}'$ назовём эквивалентными, если эквивалентны f и f'.

Это отношение действительно удовлетворяет всем аксиомам эквивалентности. Таким образом, может быть дано следующее

Определение 7.3. Рациональным шейповым морфизмом двух топологических пространств $X \to Y$ назовём класс эквивалентных морфизмов $f_{\mathbb{Q}}\colon \underline{X}_{\mathbb{Q}} \to \underline{Y}_{\mathbb{Q}}$.

Таким образом, рациональный шейповый морфизм $F_{\mathbb{Q}}\colon X \to Y$ задаётся диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\underline{X}_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_{\mathbb{Q}}"] & \underline{X} \arrow[l, "\mathbb{Q}_\infty"'] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[l, "p"'] \\
\underline{Y}_{\mathbb{Q}} & \underline{Y} \arrow[l, "\mathbb{Q}_\infty"'] & Y \arrow[l, "q"']
\end{tikzcd}$$

Композиция рациональных шейповых морфизмов $F_{\mathbb{Q}}\colon X \to Y$ и $G\colon Y \to Z$ определяется через композицию представителей $f_{\mathbb{Q}}\colon \underline{X}_{\mathbb{Q}} \to \underline{Y}_{\mathbb{Q}}$ и $g_{\mathbb{Q}}\colon \underline{Y}_{\mathbb{Q}} \to \underline{Z}_{\mathbb{Q}}$, которая, в свою очередь, определяется как $g_{\mathbb{Q}} \circ f_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_\infty (g \circ f)$. Тождественный морфизм 1_X определяется как $1_{\underline{X}_{\mathbb{Q}}}\colon \underline{X}_{\mathbb{Q}} \to \underline{X}_{\mathbb{Q}}$. Класс морфизмов $\{X \to Y\}$ есть множество, т. к. множеством является $(pro\text{-}HTop)\,(\underline{X}, \underline{Y})$, а значит, и $(pro\text{-}HTop)\,\big(\underline{X}_{\mathbb{Q}}, \underline{Y}_{\mathbb{Q}}\big)$.

Для всякого морфизма $f \in HTop(X, Y)$ поставлен в соответствие единственный рациональный шейповый морфизм $\underline{f}_{\mathbb{Q}}\colon X \to Y Sh_{\mathbb{Q}}(f)$, т. е. класс эквивалентности $\underline{f}_{\mathbb{Q}} \in pro\text{-}HQTop\,\big(\underline{X}_{\mathbb{Q}}, \underline{Y}_{\mathbb{Q}}\big)$.

Определение 7.4. Объектами рациональной шейповой категории $Sh_{\mathbb{Q}}\,(HTop)$ являются топологические пространства, а морфизмами – рациональные шейповые морфизмы топологических пространств. Ковариантный функтор $Sh_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_\infty \circ Sh\colon HTop \to Sh_{\mathbb{Q}}\,(HTop)$ будем называть рациональным шейповым функтором.

8. Изоморфизм pro-категорий как замкнутых модельных категорий

Теорема 8.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – замкнутые модельные категории, а*

$$\mathcal{A}\colon \mathfrak{A}\rightleftarrows\mathfrak{B} : \mathcal{B} \tag{8.3}$$

есть пара сопряженных ковариантных функторов, индуцирующих сопряженные эквивалентности

$$Ho\mathcal{A}\colon Ho\mathfrak{A}\rightleftarrows Ho\mathfrak{B} : Ho\mathcal{B}. \tag{8.4}$$

Тогда можно построить пару сопряженных ковариантных функторов

$$\mathcal{A}\colon pro\text{-}\mathfrak{A}\rightleftarrows pro\text{-}\mathfrak{B} : \mathcal{B}, \tag{8.5}$$

которые при ограничениях на гомотопические категории дадут сопряженные эквивалентности

$$Ho\mathcal{A}\colon Ho(pro\text{-}\mathfrak{A})\rightleftarrows Ho(pro\text{-}\mathfrak{B}) : Ho\mathcal{B}. \tag{8.6}$$

Доказательство. Для каждого объекта $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$ определим $\mathcal{A}\underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{B}$ как обратную систему $(\mathcal{A}X_\lambda, \mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$.

Тот факт, что фукторы

$$\mathcal{A}\colon \mathfrak{A}\rightleftarrows\mathfrak{B} : \mathcal{B}$$

сопряжены, а функторы

$$Ho\mathcal{A}\colon Ho\mathfrak{A}\rightleftarrows Ho\mathfrak{B} : Ho\mathcal{B}.$$

эквивалентны, означает, что:

1. Существуют функторные морфизмы $\varphi\colon \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \to \mathcal{B}\mathcal{A}$ и $\psi\colon \mathbf{1}_{\mathfrak{B}} \to \mathcal{A}\mathcal{B}$, т. е. для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует отображение $\varphi_\lambda\colon X_\lambda \to \mathcal{B}\mathcal{A}X_\lambda$, такое, что для $\lambda' \geqslant \lambda$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_{\lambda'} \arrow[r, "\varphi_{\lambda'}"] \arrow[d, "p_{\lambda\lambda'}"'] & \mathcal{B}\mathcal{A}X_{\lambda'} \arrow[d, "\mathcal{B}\mathcal{A}p_{\lambda\lambda'}"] \\ X_\lambda \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & \mathcal{B}\mathcal{A}X_\lambda \end{tikzcd} \tag{8.7}$$

коммутативна. Аналогично, для $\mu' \geqslant \mu \in M$ коммутативной является диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y_{\mu'} \arrow[r, "\psi_{\mu'}"] \arrow[d, "q_{\mu\mu'}"'] & \mathcal{AB}Y_{\mu'} \arrow[d, "\mathcal{AB}q_{\mu\mu'}"] \\ Y_{\mu} \arrow[r, "\psi_{\mu}"] & \mathcal{AB}X_{\mu} \end{tikzcd} \tag{8.8}$$

2. $\mathcal{A}\varphi = \psi\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\psi = \varphi\mathcal{B}$ в гомотопических категориях $Ho\mathfrak{A}$ и $Ho\mathfrak{B}$ соответственно, т. е. для каждого $X \in \mathfrak{A}$ и $Y \in \mathfrak{B}$ отображение $\mathcal{A}\varphi(X)$ слабо эквивалентно отображению $\psi\mathcal{A}(X)$, а $\mathcal{B}\psi(Y)$ слабо эквивалентно $\varphi\mathcal{B}(Y)$.

Определим функторные морфизмы $\varphi\colon id_{pro\text{-}\mathfrak{A}} \to \mathcal{BA}$ и $\psi\colon id_{pro\text{-}\mathfrak{B}} \to \mathcal{AB}$ следующим образом. Каждому объекту $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$ поставим в соответствие объект $\varphi\underline{X} = (\varphi X_\lambda, \mathcal{BA}p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro\text{-}\mathfrak{A}$. Аналогично, для каждого $\underline{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big) \in pro\text{-}\mathfrak{B}$ положим $\psi\underline{Y} = \big(\psi Y_\mu, \mathcal{AB}q_{\mu\mu'}, M\big) \in pro\text{-}\mathfrak{B}$.

Пусть $(f_\lambda, f)\colon \underline{\tilde{X}} \to \underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{C}$ – отображение обратных систем. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\varphi_\lambda"] & \mathcal{BA}X_\lambda \\ \tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[u, "f_\lambda"'] \arrow[r, "\phi_{\lambda'}"] & \mathcal{BA}\tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[u, "\mathcal{BA}f_\lambda"] \end{tikzcd}$$

коммутативна в силу сопряженности функторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Пусть теперь $(f'_\lambda, f')\colon \underline{\tilde{X}} \to \underline{X} \in pro\text{-}\mathfrak{C}$ – морфизм обратных систем, равный морфизму (f_λ, f), т. е. для всякого $\lambda \in \Lambda$ найдется $\lambda' \geqslant f(\lambda), f'(\lambda)$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_{\lambda'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \tilde{X}_{f'(\lambda)} \arrow[dr, "f'_\lambda"'] & & \tilde{X}_{f(\lambda)} \arrow[dl, "f_\lambda"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как функтор сохраняет композицию, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{BA}X_{\lambda'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{BA}\tilde{X}_{\mathcal{BA}f'(\lambda)} \arrow[dr, "\mathcal{BA}f'_\lambda"'] & & \mathcal{BA}\tilde{X}_{\mathcal{BA}f(\lambda)} \arrow[dl, "\mathcal{BA}f_\lambda"] \\
& \mathcal{BA}X_\lambda &
\end{tikzcd}$$

также коммутативна, т. е. морфизмы $(\mathcal{BA}f_\lambda, f)$ и $(\mathcal{BA}f'_\lambda, f)$ равны в pro-$\mathfrak{C}$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{BA}\underline{X} \\
\underline{\tilde{X}} \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{BA}\underline{\tilde{X}} \arrow[u, "\mathcal{BA}f"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогичным образом, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{AB}\underline{Y} \\
\underline{\tilde{Y}} \arrow[u, "g"'] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{AB}\underline{\tilde{Y}} \arrow[u, "\mathcal{AB}g"']
\end{tikzcd}$$

Таким образом, функторы

$$\mathcal{A}\colon pro\text{-}\mathfrak{A} \rightleftarrows pro\text{-}\mathfrak{B} : \mathcal{B},$$

сопряжены.

Более того, так как $\varphi\colon X_\lambda \to \mathcal{BA}X_\lambda$ есть изоморфизм в pro-$\mathfrak{A}$, то для всякого λ $\varphi\colon X_\lambda \to \mathcal{BA}X_\lambda$ есть слабая эквивалентность. Следовательно, $\varphi\colon \underline{X} \to \mathcal{BA}\underline{X}$, будучи морфизмом обратных систем, является послойной слабой эквивалентностью, т. е. изоморфизмом в $Ho(pro\text{-}\mathfrak{A})$. Аналогично, $\psi\colon \underline{Y} \to \mathcal{AB}\underline{Y}$ есть изоморфизм в $Ho(pro\text{-}\mathfrak{B})$. Это означает, что функторы $Ho\mathcal{A}\colon Ho(pro\text{-}\mathfrak{A}) \to Ho(pro\text{-}\mathfrak{B})$ и $Ho\mathcal{B}\colon Ho(pro\text{-}\mathfrak{B}) \to Ho(pro\text{-}\mathfrak{A})$ суть сопряженные эквивалентности. □

Следствие. Существуют сопряженные функторы

$$pro\text{-}\mathfrak{T}\,(2,\mathbb{Z}_0) \underset{pro\text{-}||}{\overset{pro\text{-}E_2Sing}{\rightleftarrows}} pro\text{-}\mathfrak{S}_2 \underset{\text{-}\overline{W}}{\overset{pro\text{-}G}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(SGP)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{G}}{\overset{pro\text{-}\widehat{Q}}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(SCHA)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{P}}{\overset{pro\text{-}\widehat{U}}{\rightleftarrows}}$$
$$\rightleftarrows pro\text{-}(SLA)_1 \underset{pro\text{-}N}{\overset{pro\text{-}N^*}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(DGL)_1 \underset{pro\text{-}\mathcal{C}}{\overset{pro\text{-}\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} pro\text{-}(DGC)_2,$$

которые индуцируют сопряженные эквивалентности

$$Ho\,(pro\text{-}\mathfrak{T}\,(2,\mathbb{Z}_0)) \underset{Ho(pro\text{-}||)}{\overset{Ho(pro\text{-}E_2Sing)}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}\mathfrak{S}_2) \underset{Ho(pro\text{-}\overline{W})}{\overset{Ho(pro\text{-}G)}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(SGP)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{G})}{\overset{Ho(pro\text{-}\widehat{Q})}{\rightleftarrows}}$$

$$\rightleftarrows Ho(pro\text{-}(SCHA)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{P})}{\overset{Ho(pro\text{-}\widehat{U})}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(SLA)_1) \underset{Ho(pro\text{-}N)}{\overset{Ho(pro\text{-}N^*)}{\rightleftarrows}}$$

$$\rightleftarrows Ho(pro\text{-}(DGL)_1) \underset{Ho(pro\text{-}\mathcal{C})}{\overset{Ho(pro\text{-}\mathcal{L})}{\rightleftarrows}} Ho(pro\text{-}(DGC)_2).$$

9. Сильная рациональная шейповая категория

Рассмотрим топологическое пространство с отмеченной точкой $(X,*)$ и его полиэдральную резольвенту $\underline{p}$: $(X,*) \to (\underline{X},*) = ((X_\lambda,*),p_{\lambda\lambda'},\Lambda)$. Такая резольвента единственна с точностью до изоморфизма в категории pro-Top.

Определение 9.1. Назовём пространство $(X,*)$ шейпово односвязным, если pro-$\pi_1(X_\lambda,*) = 0$.

Как следует из [12], это означает, что обратная система $\underline{X}$ изоморфна некоторой другой обратной системе $\underline{X}'$, все члены которой односвязны. Поэтому заранее без потери общности будем считать все X_λ односвязными.

Пример 9.1. В декартовой системе координат в $\mathbb{R}^3$ рассмотрим поверхность W^2, являющуюся графиком уравнения $x^2 + z^2 = \left(2+\sin\dfrac{1}{y}\right)^2$, с евклидовой топологией. Это топологическое пространство является обратным пределом обратной системы односвязных пространств – аппроксимирующих окрестностей и отображений вложения.

Таким образом, топологическое пространство W^2 является шейпово односвязным пространством.

Определение 9.2. Если $\mathfrak{C}$ – замкнутая модельная категория, то рациональным гомотопическим типом обратной системы $\underline{X} = (X_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda) \in pro$-$\mathfrak{C}$, назовем класс объектов, изоморфных обратной системе $\underline{X}$ в гомотопической категории $Ho(pro$-$\mathfrak{C})$.

Определение 9.3. Определим *сильный рациональный шейповый тип* шейпово односвязного пространства X как рациональный гомотопический тип обратной системы $E_2Sing\underline{X}$.

Таким образом, сильной рациональной шейповой категорией является гомотопическая категория $Ho\,(pro$-$\mathfrak{S}_2)$.

Теорема 9.1. *Сильная рациональная шейповая теория шейпово односвязных пространств эквивалентна рациональной гомотопической теории* pro-$\mathfrak{C}$, *где* $\mathfrak{C}$ *есть любая из следующих замкнутых модельных категорий:*

- *редуцированные симплициальные группы;*
- *редуцированные симплициальные полные алгебры Хопфа над* $\mathbb{Q}$*;*
- *редуцированные симплициальные алгебры Ли над* $\mathbb{Q}$*;*
- *редуцированные дифференциальные градуированные алгебры Ли над* $\mathbb{Q}$*;*
- *2-редуцированные градуированные коалгебры над* $\mathbb{Q}$*.*

Следствие (из теоремы 8.1). Рациональная гомотопическая теория обратных систем односвязных топологических пространств эквивалентна рациональной гомотопической теории обратных систем следующих пространств:

- 2-редуцированных симплициальных множеств;
- редуцированных симплициальных групп;
- редуцированных симплициальных полных алгебр Хопфа над $\mathbb{Q}$;
- редуцированных симплициальных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;
- редуцированных дифференциальных градуированных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$;
- 2-редуцированных дифференциальных градуированных коалгебр над $\mathbb{Q}$.

Утверждения следующей теоремы непосредственно следует из теорем 5.1 и 8.1 и того факта, что послойная слабая эквивалентность в замкнутой модельной категории pro-$\mathfrak{C}$ является изоморфизмом в $Ho\,(pro$-$\mathfrak{C})$.

Теорема 9.2. *Сильная рациональная шейповая теория шейпово односвязных пространств эквивалентна рациональной гомотопической теории* pro-$\mathfrak{C}$, *где* $\mathfrak{C}$ *– любая из следующих замкнутых модельных категорий:*

- *редуцированные симплициальные группы;*
- *редуцированные симплициальные полные алгебры Хопфа над* $\mathbb{Q}$*;*

- *редуцированные симплициальные алгебры Ли над $\mathbb{Q}$;*
- *редуцированные дифференциальные градуированные алгебры Ли над $\mathbb{Q}$;*
- *2-редуцированные градуированные коалгебры над $\mathbb{Q}$.*

Литература

[1] К. Борсук, *Теория шейпов*, М., Мир, 1976.

[2] О. Н. Боусфилд, В. К. А. М. Гугенхейм, *О PL-теории де Рама и рациональном гомотопическом типе*, Математика, 25, М., Мир, 1981.

[3] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, М., Мир, 1971.

[4] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math., Vol. 304, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

[5] Y. Félix, S. Galperin, J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Springer–Verlag, New-York, 2001.

[6] D. A. Edwards, H. M. Hastings, *Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology*, Lecture Notes in Math., Vol. 542, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.

[7] Ju. T. Lisica, *Rational Homotopy Type, Rational Proper Homotopy Type And Rational Homotopy Type At Infinity* // Topology Proceedings, **37** (2011), 1–51.

[8] S. Mardešić, J. Segal, *Shape Theory*, Vol. 26, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982.

[9] J. B. Quigley, *An exact sequence from the nth to $(n-1)$st fundamental group* // Fund. Math., **77** (1973), 195–210.

[10] D. G. Quillen, *Rational Homotopy Theory* // Ann. of Math., **90** (1969), 205–295.

[11] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology* // Publications Mathématiques de l'IHÉS, **47** (1977), 269–331.

[12] Š. Ungar, *n-connectedness of inverse systems and applications to shape theory* // Glasnik matematički, **13** (1978), 371–396.

Сведения об авторах

Владимир Викторович Марченко

Российский университет дружбы народов,
Москва, Россия
E-Mail: marchenko-vv@pfur.ru