Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 4, 475 – 489

Метод наименьших квадратов в теории нетеровых дифференциально-алгебраических краевых задач

Сергей М. Чуйко

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Найдены условия существования и конструкция наилучшего по методу наименьших квадратов псевдорешения дифференциально-алгебраической краевой задачи, а также наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием.

2010 MSC. 34A09, 34B, 65B10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциально-алгебраические системы, нетеровы краевые задачи, метод наименьших квадратов.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ линейной нетеровой $(k \neq n)$ дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

здесь $A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$ – непрерывные матрицы, $f(t)$ – непрерывный вектор-столбец, $\ell z(\cdot)$ – линейный ограниченный функционал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}_n[a,b] \to \mathbb{R}^k$, $k \neq m$; далее, по традиции, нижний индекс последнего пространства вектор-столбцов будем опускать. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной.

Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1–6]. В статьях [7, 8] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция

Статья поступила в редакцию 11.12.2018

обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. Существенным отличием дифференциально-алгебраической системы (1) является бесконечномерность пространства ее решений, в отличие от от систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3], [9, с. 959].

Пусть $\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ \dots \ , \ \varphi_j(t), \ \dots$ – система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим $(n \times \nu)-$ матрицу

$$\varphi(t) := \Big[\varphi_1(t) \ \ \varphi_2(t) \ \ \dots \ \ \varphi_\nu(t)\Big].$$

Приближение к решению дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) ищем в виде $z^\dagger(t) = \varphi(t) \cdot \gamma, \ \gamma \in \mathbb{R}^\nu$. Потребуем

$$F(\gamma) := \Big|\Big| A(t)z'(t) - B(t)z(t) - f(t) \Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Big|\Big| \ell z(\cdot) - \alpha \Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^k} \to \min$$

для фиксированной матрице $\varphi(t)$; при этом

$$F(\gamma) = \int_a^b \Big\{\Phi(t)\gamma - f(t)\Big\}^* \Big\{\Phi(t)\gamma - f(t)\Big\} dt + \Big\{\Psi\gamma - \alpha\Big\}^* \cdot \Big\{\Psi\gamma - \alpha\Big\} \to \min.$$

2. Наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи

Необходимое условие минимизации функции $F(\gamma)$ приводит к уравнению

$$\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big] \cdot \gamma = \int_a^b \Phi^*(t) f(t)\, dt + \Psi^*\alpha,$$

разрешимому относительно вектора

$$\gamma^\dagger = \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^+ \Big\{\int_a^b \Phi^*(t) f(t)\, dt + \Psi^*\alpha\Big\}$$

при условии

$$\mathcal{P}_\varphi \Big\{\int_a^b \Phi^*(t) f(t)\, dt + \Psi^*\alpha\Big\} = 0; \qquad (2)$$

здесь

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) := \int_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)\, dt, \quad \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) := \Psi^*\Psi$$

– матрицы Грама [10],

$$\mathcal{P}_{\varphi} := P_{[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\ell\varphi(\cdot))]^*} : \ \mathbb{R}^{\nu} \to \mathbb{N}\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\Big]^*$$

– $(\nu \times \nu)$– матрица-ортопроектор [11],

$$\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^+$$

– псевдообратная (по Муру–Пенроузу) матрица [11],

$$\Phi(t) := A(t)\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{m\times\nu}[a,b], \quad \Psi := \ell\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times\nu}.$$

Таким образом, найдено наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение $z(t) = \varphi(t)\cdot\gamma^{\dagger}$ дифференциально-алгебраической краевой задачи (1), условия существования которого определяет следующая лемма.

Лемма. *Для фиксированной матрицы $\varphi(t)$ при условии (2) наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) имеет вид*

$$z^{\dagger}(t) = \varphi(t)\cdot\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^+ \left\{\int_a^b \Phi^*(t)f(t)\,dt + \Psi^*\alpha\right\}.$$

В случае разрешимости дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) при надлежащем выборе матрицы $\varphi(t)$ наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение $z^{\dagger}(t,\varphi)$ дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) является точным решением. Утверждение леммы является обобщением соответствующих утверждений [12] на случай дифференциально-алгебраической краевой задачи (1).

Пример 1. *Требованиям леммы удовлетворяет периодическая дифференциально-алгебраическая задача*

$$A(t)z'(t) = B(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0, \tag{3}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

кроме того

$$B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\varphi(t) := \operatorname{diag} \begin{pmatrix} \psi(t) & \psi(t) & \psi(t) & \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

при этом условие (2) выполнено; здесь

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) = \begin{pmatrix} 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi \\ 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\pi \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big) = 0, \quad \det\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) = 0,$$

а также

$$\mathcal{P}_\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической задачи (3)

$$z^\dagger(t,\varphi) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*$$

является точным решением.

Следствие. *Для фиксированной матрицы* $\varphi(t)$ *при условии*

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big] \neq 0$$

наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) *имеет вид*

$$z^\dagger(t) = \varphi(t)\cdot\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^{-1}\left\{\int_a^b \Phi^*(t)f(t)\,dt + \Psi^*\alpha\right\}.$$

Пример 2. *Требованиям следствия удовлетворяет периодическая дифференциально-алгебраическая задачи*

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0, \tag{4}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix},$$

кроме того

$$B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi(t) := I_3$, при этом выполнено условие

$$\det\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big] = 4\,\pi^3 \neq 0.$$

Наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение периодической дифференциально-алгебраической задачи (4)

$$z^\dagger(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

является точным решением этой задачи.

Для фиксированной матрицы $\varphi(t)$ при условии (2) наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) представимо в виде

$$z^\dagger(t) = X_\delta(t)\, c_\delta + H[f(s), \varphi(s), \alpha](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta;$$

здесь

$$\begin{aligned} &H[f(s), \varphi(s), \alpha](t) \\ &\qquad := \varphi(t) \cdot \left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\right]^+ \left\{\int_a^b \Phi^*(t) f(t)\, dt + \Psi^* \alpha\right\}; \end{aligned}$$

матрицу $X_\delta(t) := \varphi(t)\, \mathcal{P}_{\varphi_\delta} \in \mathbb{C}^1[a,b]$ определяет матрица $\mathcal{P}_{\varphi_\delta}$, составленная из δ линейно независимых столбцов матрицы $\mathcal{P}_\varphi$. Поскольку матрицы Грама $\Gamma(\varphi(\cdot))$ и $\Gamma(\ell\varphi(\cdot))$ симметричны относительно главной диагонали, постольку матрица-ортопроектор

$$P_{[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\ell\varphi(\cdot))]} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]$$

совпадает с ортопроектором

$$\mathcal{P}_\varphi := P_{[\Gamma(\varphi(\cdot))+\Gamma(\ell\varphi(\cdot))]^*} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}\left[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\ell\varphi(\cdot)\Big)\right]^*.$$

При условии

$$F(\gamma^\dagger) = 0, \quad P_{\Omega^*}\left\{\alpha - \ell H[f(s), \varphi(s), \alpha](\cdot)\right\} = 0 \tag{5}$$

наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1) является решением этой задачи; здесь P_{Ω^*} – матрица-ортопроектор: $P_{\Omega^*} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}[\Omega^*]$, $\Omega := \ell X_\delta(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times\delta}$. Таким образом, при условии (5) наилучшее по методу наименьших квадратов решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)

$$\begin{aligned} &z^\dagger(t) = X_\delta(t)\, c_\delta + H[f(s), \varphi(s), \alpha](t), c_\delta \\ &\qquad\qquad = \Omega^+\left\{\alpha - \ell H[f(s), \varphi(s), \alpha](\cdot)\right\} + P_{\Omega_\rho} c_\rho, c_\rho \in \mathbb{R}^\rho \end{aligned}$$

является решением этой задачи. Матрица P_{Ω_ρ} составлена из ρ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора: $P_\Omega: \ \mathbb{R}^\delta \to \mathbb{N}[\Omega]$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для фиксированной матрицы $\varphi(t)$ при условиях* (2) *и* (5) *наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1) $z^\dagger(t) = X_r(t)\, c_r + G[f(s), \varphi(s), \alpha](t), c_r \in \mathbb{R}^r$ *является решением этой задачи. Здесь*

$$G[f(s), \varphi(s), \alpha](t)$$
$$:= H[f(s), \varphi(s), \alpha](t) + X_\delta(t)\, \Omega^+ \Big\{ \alpha - \ell H[f(s), \varphi(s), \alpha](\cdot) \Big\}$$

– обобщенный оператор Грина краевой задачи (1)*. Матрица $X_r(t)$, составленная из r линейно независимых столбцов матрицы $X_\rho(t) := X_\delta(t) P_{\Omega_\rho}$, – наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение однородной части дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1)*, определяет решение $X_r(t)\, c_r$ однородной части этой задачи.*

Пример 3. *Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет линейная периодическая дифференциально-алгебраическая задача* (3)*.*

При той же матрице $\varphi(t)$, что и в примере 1, выполнено условие (5), следовательно наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение

$$z^\dagger(t) = X_\delta(t)\, c_\delta + H[f(s), \varphi(s), \alpha](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^6$$

дифференциально-алгебраической краевой задачи (3) определяет решение

$$z(t, c_r) = X_r(t)\, c_r + G[f(s), \varphi(s), \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

этой задачи; здесь

$$G[f(s), \varphi(s), \alpha](t) = H[f(s), \varphi(s), \alpha](t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

кроме того

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \\ -\cos t & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Матрица $X_r(t)$, составлена из $r = 2$ линейно независимых столбцов матрицы $X_\rho(t) := X_\delta(t) P_{\Omega_\rho}, \Omega = 0 \in \mathbb{R}^{4\times 2}$; здесь $P_{\Omega_\rho} = P_\Omega = I_2$. Матрица $\mathcal{P}_{\varphi_\delta}$ составлена из $\delta = 6$ линейно независимых столбцов матрицы $\mathcal{P}_\varphi$, найденной ранее в примере 1.

3. Наилучшее по методу наименьших квадратов псевдорешение дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием

Исследуем далее задачу о построении приближенного решения

$$z(t) \in \mathbb{C}[0,T], \quad z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{j\Delta\}_I\Big\}, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$$

линейной дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием (6)

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + C(t)z(t-\Delta) + f(t),\ t \in [\Delta, T], \tag{6}$$

непрерывного в точках $t = k\Delta$, и удовлетворяющих краевому условию (7)

$$\ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^k \tag{7}$$

с начальной функцией $z(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}^1[0,\Delta]$. В точках $t = j\Delta,\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$ искомое решение краевой задачи (6), (7), возможно, претерпевает ограниченный разрыв производной. Здесь $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[0,T], f(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ – непрерывные матрицы, $T := (q+1)\,\Delta$. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной; $\ell z(\cdot)$ – линейный ограниченный вектор-функционал:

$$\mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{k\Delta\}_I\Big\} \cap \mathbb{C}[0,T] \to \mathbb{R}^k.$$

Пусть $\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \dots\ ,\ \psi_\mu(t),\ \dots$ – система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим $(n\times\mu)-$матрицу

$$\Psi_0(t) := \Big[\psi_1(t)\ \ \psi_2(t)\ \ \dots\ \ \psi_\mu(t)\Big].$$

Приближение к решению дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7), наилучшее по методу наименьших квадратов, ищем в виде [15, 16]

$$z_0^\dagger(t) = \Psi_0(t)\gamma_0, \quad t \in [\Delta, 2\Delta], \quad \gamma_0 \in \mathbb{R}^\nu.$$

Из равенства $\Psi_0(\Delta)\gamma_0 = \varphi(\Delta)$, при условии $P_{\Psi_0^*(\Delta)}\varphi(\Delta) = 0$, находим

$$\gamma_0^\dagger = \Psi_0^+(\Delta)\varphi(\Delta) + P_{\Psi_{\rho_0}}\delta_0, \quad \delta_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0};$$

здесь $P_{\Psi_0^*(\Delta)}\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(\Psi_0^*(\Delta))$ – матрица-ортопроектор. Матрица $P_{\Psi_{\rho_0}}$ составлена из ρ_0 линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{\Psi_0(\Delta)}\ :\ \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}(\Psi_0(\Delta))$. Таким образом, наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (6) представимо в виде

$$z_0^\dagger(t) = y_0(t)+U_0(t)\delta_0,\ t \in [\Delta, 2\Delta],\ y_0(t) := \Psi_0(t)\Psi_0^+(\Delta)\varphi(\Delta),\ \delta_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

где $U_0(t) := \Psi_0(t)P_{\Psi_{\rho_0}}$. Потребуем [15, 16]

$$F(\delta_0) := \left|\left| A(t)z_0'(t) - B(t)z_0(t) - C(t)\varphi(t-\Delta) - f(t)\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[\Delta,2\Delta]} \to \min$$

для фиксированной матрицы $\Psi_0(t)$; при этом

$$F(\delta_0) = \int_\Delta^{2\Delta} \Big\{\Phi_0(t)\delta_0 + A(t)y_0'(t) - B(t)y_0(t) - C(t)\varphi(t-\Delta) - f(t)\Big\}^*$$

$$\times\Big\{\Phi_0(t)\delta_0 + A(t)y_0'(t) - B(t)y_0(t) - C(t)\varphi(t-\Delta) - f(t)\Big\}\, dt \to \min;$$

здесь $\Phi_0(t) := A(t)U_0'(t) - B(t)U_0(t)$. Необходимое условие минимизации функции $F(\delta_0)$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\Psi_0(\cdot)\Big)\delta_0 = \int_\Delta^{2\Delta} \Phi_0^*(t)\Big[B(t)y_0(t)+C(t)\varphi(t-\Delta)+f(t)-A(t)y_0'(t)\Big]\, dt,$$

разрешимому при условии

$$\mathcal{P}_{\Psi_0^*} \int_\Delta^{2\Delta} \Phi_0^*(t)\Big[B(t)y_0(t+C(t)\varphi(t-\Delta))+f(t)-A(t)y_0'(t)\Big]\, dt = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\Gamma\Big(\Psi_0(\cdot)\Big) := \int_\Delta^{2\Delta} \Phi_0^*(t)\Phi_0(t)\, dt,$$

кроме того:

$$\mathcal{P}_{\Psi_0^*} := P_{\left[\Gamma\left(\Psi_0(\cdot)\right)\right]^*} :\ \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}\Big[\Gamma\Big(\Psi_0^*(\cdot)\Big)\Big]$$

– $(\nu \times \nu)$-матрица-ортопроектор. Таким образом, при условии (8) наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (6) представимо в виде $z_0^\dagger(t) = y_0(t) + U_0(t)\delta_0^\dagger, t \in [\Delta, 2\Delta]$; здесь

$$\delta_0^\dagger = \left[\Gamma\Big(\Psi_0(\cdot)\Big)\right]^+ \times \left\{ \int_\Delta^{2\Delta} \Phi_0^*(t)\Big[B(t)y_0(t) + C(t)\varphi(t-\Delta) + f(t) - A(t)y_0'(t)\Big]\, dt \right\}.$$

Приближение к решению (6), наилучшее по методу наименьших квадратов, при $t \in [2\Delta, 3\Delta]$ ищем в виде [15, 16] $z_1^\dagger(t) = \Psi_1(t)\gamma_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}^\nu$. Из равенства $\Psi_1(2\Delta)\gamma_1 = \varphi(2\Delta)$, при условии $P_{\Psi_1^*(2\Delta)}\varphi(2\Delta) = 0$ находим $\gamma_1^\dagger = \Psi_1^+(2\Delta)\varphi(2\Delta) + P_{\Psi_{\rho_1}}\delta_1$; здесь $\delta_1 \in \mathbb{R}^{\rho_1}$, $P_{\Psi_1^*(2\Delta)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(\Psi_1^*(2\Delta))$ – матрица-ортопроектор. Матрица $P_{\Psi_{\rho_1}}$ составлена из ρ_1 линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\Psi_1(2\Delta)} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}(\Psi_1(2\Delta))$. Таким образом, наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (6) при $t \in [2\Delta, 3\Delta]$ представимо в виде [15, 16] $z_1^\dagger(t) = y_1(t) + U_1(t)\delta_1,\ t \in [2\Delta, 3\Delta],\ \delta_1 \in \mathbb{R}^{\rho_1}$, где

$$y_1(t) := \Psi_1(t)\Psi_1^+(2\Delta)\varphi(2\Delta), \quad U_1(t) := \Psi_1(t)P_{\Psi_{\rho_1}}.$$

Потребуем

$$F(\delta_1) := \left|\left|A(t)z_1'(t) - B(t)z_1(t) - C(t)z_0^\dagger(t-\Delta) - f(t)\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[2\Delta,3\Delta]} \to \min$$

для фиксированной матрицы $\Psi_1(t)$. Необходимое условие минимизации функции $F(\delta_1)$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\Psi_1(\cdot)\Big)\delta_1 = \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\Big[B(t)y_1(t) + C(t)z_0^\dagger(t-\Delta) + f(t) - A(t)y_1'(t)\Big]\, dt,$$

разрешимому при условии

$$\mathcal{P}_{\Psi_1^*} \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\Big[B(t)y_1(t + C(t)z_0^\dagger(t-\Delta)) + f(t) - A(t)y_1'(t)\Big]\, dt = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\Phi_1(t) := A(t)U_1'(t) - B(t)U_1(t),\ \Gamma\Big(\Psi_1(\cdot)\Big) := \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\Phi_1(t)\, dt,$$

кроме того:

$$\mathcal{P}_{\Psi_1^*} := P_{\left[\Gamma\left(\Psi_1(\cdot)\right)\right]^*} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{N}\left[\Gamma\Big(\Psi_1(\cdot)\Big)\right]^*$$

– $(\nu \times \nu)$-матрица-ортопроектор. Таким образом, при условии (9) наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (6) представимо в виде $z_1^\dagger(t) = y_1(t) + U_1(t)\delta_1^\dagger, t \in [2\Delta, 3\Delta]$; здесь

$$\delta_1^\dagger = \left[\Gamma\left(\Psi_1(\cdot)\right)\right]^+$$

$$\times \left\{ \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\left[B(t)y_1(t) + C(t)z_0^\dagger(t-\Delta) + f(t) - A(t)y_1'(t)\right] dt\right\}.$$

Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для фиксированной матрицы* $\Psi(t)$ *при условии*

$$P_{\Psi_j^*((j+1)\Delta)}\varphi((j+1)\Delta) = 0, \quad j = 0, 1, \ \dots \ , \ q-1,$$

$$\mathcal{P}_{\Psi_{j+1}^*}\left\{ \int_{(j+1)\Delta}^{(j+2)\Delta} \Phi_{j+1}^*(t)\right.$$

$$\left.\times\left[B(t)y_{j+1}(t + C(t)z_j^\dagger(t-\Delta)) + f(t) - A(t)y_{j+1}'(t)\right]dt\right\} = 0 \qquad (10)$$

наилучшее по методу наименьших квадратов решение

$$z^\dagger(t) \in \mathbb{C}[0, T], \ z^\dagger(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[0, T] \setminus \{k\Delta\}_I\right\}, \quad k = 1, 2, \ \dots \ , \ q$$

дифференциально-алгебраической системы (6) *представимо в виде*

$$z^\dagger(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0; \Delta], \\ z_1^\dagger(t), & t \in [\Delta; 2\Delta], \\ \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_{q-1}^\dagger(t), & t \in [T-\Delta; T], \end{cases}$$

где

$$z_{q-1}^\dagger(t) = y_{q-1}(t) + U_{q-1}(t)\delta_{q-1}^\dagger;$$

$$y_{q-1}(t) := \Psi_{q-1}(t)\Psi_{q-1}^+(q\Delta)\varphi(q\Delta), \ U_{q-1}(t) := \Psi_{q-1}(t)P_{\Psi_{\rho_{q-1}}};$$

здесь

$$\delta_{q-1}^\dagger = \left[\Gamma\left(\Psi_{q-1}(\cdot)\right)\right]^+\left\{ \int_{T-\Delta}^{T} \Phi_{q-1}^*(t)\left[B(t)y_{q-1}(t)\right.\right.$$

$$\left.\left.+C(t)z_{q-2}^\dagger(t-\Delta) + f(t) - A(t)y_{q-1}'(t)\right] dt\right\}.$$

Пример 4. *Требованиям теоремы 2 удовлетворяет задача Коши для дифференциально-алгебраической системы*

$$A(t)\,z'(t) = B(t)z(t) + C(t)z(t-1) + f(t), \quad t \in [1,3] \tag{11}$$

с начальной функцией $z(t) = \varphi(t),\ t \in [0,1]$, *где*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) := B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \end{pmatrix}^*.$$

Положим

$$\Psi_0(t) := \mathrm{diag}\ \begin{pmatrix} \psi(t) & \psi(t) & \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix},$$

при этом условие $P_{\Psi_0^*(\Delta)}\varphi(\Delta) = 0$, выполнено, при этом

$$y_0(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+t+t^2 \\ 0 \\ 1+t+t^2 \end{pmatrix}.$$

Условие (8) также выполнено; здесь

$$\Gamma\Big(\Psi_0(\cdot)\Big) = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 980 & -1240 & 0 & 0 & -480 & 570 \\ -1240 & 1580 & 0 & 0 & 630 & -750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -480 & 630 & 0 & 0 & 282 & -339 \\ 570 & -750 & 0 & 0 & -339 & 408 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\mathcal{P}_{\Psi_0^*} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 & -12 & -6 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 0 & 0 & 16 & 8 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (11), представимо в виде

$$z_0^{\dagger}(t) = \begin{pmatrix} t^2+t-1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2].$$

Положим $\Psi_0(t) := \Psi_1(t)$, при этом условие $P_{\Psi_1^*(2\Delta)}\varphi(2\Delta) = 0$, выполнено, при этом

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5\left(1+2\,t+4\,t^2\right) \\ 0 \\ 2+4\,t+8\,t^2 \end{pmatrix}.$$

Условие (8) также выполнено; здесь

$$\Gamma\Big(\Psi_1(\cdot)\Big) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 20 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\mathcal{P}_{\Psi_1^*} = \frac{1}{158}\begin{pmatrix} 36 & 54 & 0 & 0 & -30 & -24 \\ 54 & 81 & 0 & 0 & -45 & -36 \\ 0 & 0 & 158 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158 & 0 & 0 \\ -30 & -45 & 0 & 0 & 25 & 20 \\ -24 & -36 & 0 & 0 & 20 & 16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (11), представимо в виде

$$z_1^{\dagger}(t) = \begin{pmatrix} -23+23\,t+93\,t^2 \\ 0 \\ 102+28\,t \end{pmatrix}, \quad t \in [2,3].$$

Предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических краевых задач аналогично [7,13,14] может быть перенесена на матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических систем аналогично [17, 18] может быть перенесена на дифференциально-алгебраические краевые задачи в частных производных.

Литература

[1] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

[2] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations II*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[3] S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Canonical forms and solvable singular systems of diFFerential equations* // SIAM J. Alg. Descrete Methods, (1983), No. 4, 517–521.

[4] Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Новосибирск. Наука, 1998.

[5] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, К., Вища школа, 2000.

[6] Э. Хайрер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*, М., Мир, 1999.

[7] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem* // Siberian Mathematical Journal, **56** (2015), No. 4, 752–760.

[8] S. M. Chuiko, *On a reduction of the order in a differential-algebraic system* // Journal of Mathematical Sciences, **235** (2018), No. 1, 2–18.

[9] А. А. Бойчук, А. А. Покутный, В. Ф. Чистяков, *О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений* // Журнал вычислительной математики и математической физики, **53** (2013), No. 6, 958–969.

[10] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука, 1965.

[11] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht, Boston, VSP, 2004.

[12] S. M. Chuiko, *On approximate solution of boundary value problems by the least square method* // Nonlinear Oscillations (N.Y.), **11** (2008), No. 4, 585–604.

[13] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation* // Differential Equations, **37** (2001), No. 4, 464–471.

[14] S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation* // Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 9–21.

[15] S. M. Chuiko, *On approximate solution of boundary value problems by the least square method* // Nonlinear Oscillations, **11** (2008), No. 4, 585–604.

[16] S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, *On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case* // Nonlinear Oscillations, **14** (2012), No. 3, 445–460.

[17] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, A. Yefimushkin, *On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane* // Journal of Mathematical Sciences, **214** (2016), 200–219.

[18] I. I. Skrypnik, *Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption* // Israel Journal of Mathematics, **215** (2016), No. 1, 163–179.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск, Украина
E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`