Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 3, 345 – 357

Оценки произведений внутренних радиусов для частично неналегающих областей комплексной плоскости

Инна Я. Дворак

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В данной работе изучается две проблемы об описании экстремальных конфигураций, которые максимизируют произведение внутренних радиусов взаимно неналегающих областей. Первые две теоремы посвящены решению известной задачи поставленной в 1988 году в работе В. Н. Дубинина. Проблема 1 исследована в несколько более общей ситуации: вместо неналегающих областей рассматриваются области с условием частичного неналегания. Во второй части рассматривается задача о максимуме функционала с дополнительным условием симметрии определяемым областью G_0. Теорема 3 и Теорема 4 дают частичное решение этой задачи.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус, неналегающие области, n-лучевая система точек, "управляющий" функционал, квадратичный дифференциал.

1. Необходимые определения и обозначения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{U} := \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$.

Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ – функция Жуковского, $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [1–11].

Системой неналегающих областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Статья поступила в редакцию 30.06.2018
Выражаю благодарность профессору А. К. Бахтину за постановку задачи и внимание к работе.

ISSN 1810 – 3200.

Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Любой n-лучевой системы точек сопоставим следующий набор областей $P_k(A_n) = P_k = \{w \in \mathbb{C} : \arg a_k < w < \arg a_{k+1}, a_{n+1} = a_1\}, k = \overline{1,n}$. Пусть

$$\zeta = \pi_k(w) = -i \left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $\pi_k(w)$ та однозначная ветвь многозначной аналитической функции, которая однолистно и конформно отображает P_k на правую полуплоскость. Введем обозначения $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2, \alpha_0 = \max \alpha_k$.

Открытое множество D удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $\{0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty\} \in D$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – n-лучевая система точек, если множества $D_k(0), D_k(a_k), D_k(a_{k+1}), D_k(\infty)$ попарно не пересекаются при каждом фиксированном k, $k = \overline{1,n}$, где $D_k(0)$ – связная компонента $D \cap \overline{P_k}$, содержащая точку 0; $D_k(a_k)$ – связная компонента $D \cap \overline{P_k}$, содержащая точку a_k; $D_k(a_{k+1})$ – связная компонента $D \cap \overline{P_k}$, содержащая точку a_{k+1}; $D_k(\infty)$ – связная компонента $D \cap \overline{P_k}$, содержащая точку ∞.

Система областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условию частичного неналегания относительно системы точек $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$, если открытое множество $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$. В дальнейшем такие системы областей будем называть системами частично неналегающих областей относительно указанных систем точек.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ рассмотрим следующий "управляющий" функционал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|.$$

2. Постановка задач и основные результаты

В данной работе рассматриваются задачи об экстремизации некоторых функционалов, заданных на системах частично неналегающих областей.

Задача 1. Найти максимум функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{2.1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем частично неналегающих областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$, таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

При $\gamma = 1/2$ и $n \geqslant 2$ точная оценка для функционала 2.1 для систем неналегающих многосвязных областей была впервые получена в работе [10]. Для односвязных областей в работе [16] получены оценки функционала 2.1 при $\gamma \in (0, \frac{n^2}{8}]$, $n \geqslant 2$. Задача об оценке функционала 2.1 при начальных значениях натурального параметра n рассматривалась в [3,4]. В работе [7] в случае систем произвольных взаимно неналегающих многосвязных областей Задача 1 решена для $n \geqslant 7$ при $\gamma \in (0, 0.08n^2)$. В данной работе Задача 1 решена для более широкого интервала значений параметра γ.

Пусть

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)). \tag{2.2}$$

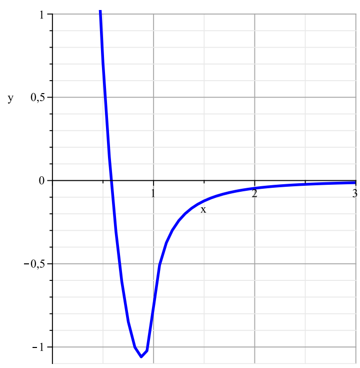

Рис. 1: График функции $F'(x)$

$F(x)$ выпуклая функция на интервале $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. $y_0 = \min F'(x)$ $x \in (0; +\infty), F'(x_0) = y_0, y_0 \approx -1.06$. Уравнение $F'(x) = t$ при $t > 0$ имеет единственное решение. Если $t < 0$, то это уравнение имеет два решения: $x_1(t), x_2(t), x_1(t) \in (0; x_0), x_2(t) \in (x_0; \infty)$ (см. Рис. 1).

Обозначим через

$$\mu_n = \min_t((n-1)x_1(t) + x_2(t)), \gamma_n^0 = (\frac{\mu_n}{2})^2. \tag{2.3}$$

Следует отметить, что система круговых областей Λ_0, Λ_∞, Λ_k, $k = \overline{1,n}$ квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2, \tag{2.4}$$

представляет из себя систему взаимно неналегающих односвязных областей, таких что $0 \in \Lambda_0$, $\infty \in \Lambda_\infty$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, $\lambda_k = exp(i\frac{2\pi(n-1)}{n})$, $k = \overline{1,n}$.

Для частично неналегающих областей $B_0, B_1, ..., B_n, B_\infty$ таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ D_k справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \gamma < \gamma_n^0$, $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, что* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и любого набора частично неналегающих областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2$) – *круговые области и полюсы квадратичного дифференциала 2.4, соответственно.*

Теорема 2. *Пусть* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 0,72$, $\gamma_3 = 1,40$, $\gamma_4 = 2,27$, $\gamma_5 = 3,33$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geqslant 7$. *Тогда для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, что* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и любого набора частично неналегающих областей* B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_∞ ($0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2$) — *круговые области и полюсы квадратичного дифференциала 2.4, соответственно.*

Систему взаимно неналегающих областей $G_1, G_2, ..., G_n$ будем называть системой неналегающих областей с дополнительным условием симметрии определяемым областью G_0, если выполнено условие $\cup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{ G_0 \cup \widetilde{G_0} \right\}$, где $G_0 \neq \mathbb{U}$, $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\widetilde{G_0}$ – область симметричная G_0 относительно единичной окружности. Очевидно, что $G_0, G_1, ..., G_n$ – система взаимно неналегающих областей.

Задача 2. Найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = [r\left(G_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right) \tag{2.5}$$

при $0 < \gamma \leqslant n$, $n \geqslant 2$, для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такой, что $\mathcal{M}(A_n) = 1$, и любого набора взаимно неналегающих областей $G_0, G_1, ..., G_n$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $G_0 \neq \mathbb{U}$, где $G_1, ..., G_n$ – система неналегающих областей с дополнительным условием симметрии относительно G_0.

В данной работе представлены два результата, дающие частичное решение Задачи 2.

Теорема 3. *Пусть $\gamma_n^1 = 2\gamma_n^0$, $0 < \gamma < \gamma_n^1$, $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такой, что $\mathcal{M}(A_n) = 1$ и любого набора взаимно неналегающих областей G_0, $G_1, ..., G_n$, такого, что $G_0 \subset \mathbb{U}$, $G_0 \neq \mathbb{U}$, $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ – система неналегающих областей с дополнительным условием симметрии определяемым областью G_0, $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ справедливо неравенство*

$$[r\left(G_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right) \leqslant [r\left(\Lambda_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

области Λ_0, Λ_k и точки 0, λ_k ($k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$,) – соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{2.6}$$

Теорема 4. *Пусть $0 < \gamma \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant 9, n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, такой, что $|a_k| = 1$ и системы взаимно неналегающих областей $G_0, G_1, ..., G_n$, такой,* *что* $G_0 \neq \mathbb{U}$, $\{G_k\}_{k=1}^n$ *– система неналегающих областей с дополнительным условием симметрии относительно* G_0, $0 \in G_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in G_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *справедливо неравенство*

$$[r(G_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(G_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

области Λ_0, Λ_k *и точки* 0, λ_k ($k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 9$) *– круговые области и полюсы квадратичного дифференциала 2.6, соответственно.*

3. Доказательство Теорем

3.1. Доказательство Теоремы 1.

Для дальнейшего исследования используем метод разделяющего преобразования, разработанный в работах [10, 11].

Пусть $D = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_n \cup B_\infty$, тогда $r(B_k,a_k) \leqslant r(D,a_k)$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_0,0) \leqslant r(D,0)$, $r(B_\infty,\infty) \leqslant r(D,\infty)$. Отсюда следует, что

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant [r(D,0)\, r(D,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k),$$

Рассмотрим систему функций, определенных формулой (1.1).

Функции $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ допустимы для разделяющего преобразования области D с учетом областей $\{P_k\}_{k=1}^n$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает область $\mathbb{C}_\zeta$ полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$ со свои симметричным отображением относительно мнимой оси. $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает область $\mathbb{C}_\zeta$ полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$ со свои симметричным отображением относительно мнимой оси. $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Через $\Omega_k^{(0)}$ обозначим область $\mathbb{C}_\zeta$ полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, которое содержит точку $\zeta = 0$ со свои симметричным отображением относительно мнимой оси. $\Omega_k^{(\infty)}$ – область $\mathbb{C}_\zeta$ полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(D \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = \infty$ со свои симметричным отображением относительно мнимой оси. Пусть $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$. Из определения функций $\pi_k(w)$ следует

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to\infty,\quad w\in\overline{P_k}.$$

В работах [10, 11] получены следующие неравенства

$$r\left(D,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{3.1}$$

$$r\left(D,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},\tag{3.2}$$

$$r\left(D,\infty\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{3.3}$$

Используя неравенства (3.1)–(3.3) получаем соотношение

$$J_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{\left(|a_k||a_{k+1}|\right)^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\cdot|a_k|$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\cdot\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее,

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\cdot\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|=2^n\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|=2^n\mathcal{M}(A_n).$$

Учитывая результаты Главы 4 (Следствие 4.1.3) работы [2] получаем неравенство,

$$J_n(\gamma)\leqslant 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

где $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau\geqslant 0$, $\tau_k=\sqrt{\gamma}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$.

Далее, учитывая соотношение (2.2) и работы [10, 13] рассмотрим следующую экстремальную проблему

$$\prod_{k=1}^{n}F(x_k)\longrightarrow\max,\quad\sum_{k=1}^{n}x_k=2\sqrt{\gamma},\quad x_k=\alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Пусть $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Далее, следуя работе [13], получаем если $0<x_k^{(0)}<x_j^{(0)}$, тогда

$$F'(x_k^{(0)})=F'(x_j^{(0)}),\quad k,j=\overline{1,n},\tag{3.4}$$

$$F'(x)=4x\ln(x)-2(x-1)\ln|x-1|-2(x+1)\ln(x+1)+\frac{2}{x}$$

(см. Рис.1).

Учитывая соотношение (3.4) и то, что $\gamma\in(0,\gamma_n^0)$ покажем, что выполняется условие $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}$.

Как ранее было отмечено, для $\forall t\in[y_0,0)$ уравнение $F'(x)=t$ имеет два решения: $x_1(t)\in(0,x_0]$, $x_2(t)\in(x_0,\infty)$.

Предположим, что один из корней $x_k^{(0)}, k=\overline{1,n}$, принадлежит промежутку (x_0,∞). Тогда, учитывая (2.3), получаем, что

$$\sum x_k^{(0)}=(n-1)x_1^{(0)}+x_2^{(0)}\geqslant\mu_n=2\sqrt{\gamma_n^0}.$$

С другой стороны при $\gamma \in (0, \gamma_n^0)$ справедливо неравенство

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} \geqslant \mu_n = 2\sqrt{\gamma_n^0} > 2\sqrt{\gamma}.$$

Полученное противоречие означает, что ни одна из точек $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n^0)$ не может принадлежать промежутку $(x_0, \infty]$. Отсюда из соотношения (3.4) приходим к заключению, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Теорема 1 доказана. $\square$

3.2. Доказательство Теоремы 2

Функция $F'(x)$ (Рис. 1) монотонно убывает на $(0, x_0]$ и монотонно возрастает на $[x_0, \infty)$, пересекая ось OX в точке $x \approx 0.5814$. Учитывая доказательство теоремы 1 и то, что $0 < \gamma \leqslant \gamma_n < \gamma_n^0$ при $n \geqslant 7$, получаем следующее

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} > (n-1) \cdot 0.5814 + 0.8844 = 2\sqrt{\gamma_n} > 2\sqrt{\gamma}.$$

Полученное противоречие означает, что ни одна из точек $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$ не принадлежит промежутку (x_0, ∞). Отсюда из соотношения (3.4) приходим к заключению, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$ и $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$. Тогда для $n \geqslant 7$ *Теорема 2* доказана.

Для $n = 6$, полагая $\gamma_6 = 4.64$ и учитывая данные таблицы, приведенной ниже, и результаты работы [6] следует, что

$$5x_1(t) + x_2(t) > 5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant 4.30932 = 2\sqrt{\gamma}_6, \; t \in [t_k, t_{k+1}].$$

При $0 < \gamma \leqslant \gamma_6$ получаем

$$2\sqrt{\gamma} = 5x_1^0 + x_2^0 > 4.30932 = 2\sqrt{\gamma}_6 \geqslant 2\sqrt{\gamma}.$$

Из полученного противоречия следует, что для $n = 6$ *Теорема 2* доказана. Проводя аналогичные вычисление для $n = \overline{2,5}$ получаем $\gamma_2 = 0,73$, $\gamma_3 = 1,41$, $\gamma_4 = 2,29$, $\gamma_5 = 3,36$. Теорема 2 доказана. $\square$

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$
1	- 0.01	0.5828021018	3.260279515
2	- 0.11	0.5970820203	1.545735484
3	- 0.21	0.6122971332	1.293903211
4	- 0.31	0.6286014379	1.174953460
5	- 0.32	0.6302991009	1.166313092
6	- 0.33	0.6320098820	1.158091600
7	- 0.34	0.6337340285	1.150260011
8	- 0.35	0.6354717961	1.142792181
9	- 0.36	0.6372234490	1.135664453
10	- 0.37	0.6389892608	1.128855360
11	- 0.38	0.6407695144	1.122345376
12	- 0.39	0.6425645030	1.116116696
13	- 0.40	0.6443745303	1.110153049
14	- 0.41	0.6461999112	1.104439534
15	- 0.51	0.6653767445	1.058525923
16	- 0.61	0.6865478929	1.027618247
17	- 0.71	0.7103700492	1.007406764
18	- 0.81	0.7380052769	0.9961511698
19	- 0.91	0.7719538507	0.9775830704
20	- 1.01	0.8206625498	0.9420885500

3.3. Доказательство Теоремы 4

Доказательство *Теоремы 4* основывается на методах и идеях работ [2, 13–15]. Учитывая работу [17], получаем

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(G_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

где $G_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)}=0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2.6), соответственно. Введем обозначение. Пусть

$$L_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma\left(G_0, 0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(G_k, a_k\right)}{r^\gamma\left(G_0^{(0)}, 0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right)}.$$

Как следует из метода работы [17] при $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$ ($\alpha_0 = \max \alpha_k$) для величины $L_n(\gamma)$ справедливо следующее неравенство

$$L_n(\gamma) \leqslant Y_1(\gamma,n) \cdot Y_2(\gamma,n) \cdot Y_3(\gamma,n) \cdot Y_4(\gamma,n) \cdot Y_5(\gamma,n),$$

$$Y_1(\gamma,n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}, Y_2(\gamma,n) = \left(\frac{4}{\sqrt{2\gamma}}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$Y_3(\gamma,n) = \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}, Y_4(\gamma,n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

$$Y_5(\gamma,n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Очевидно, что дальнейшее рассмотрение нужно проводить для $\gamma \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, так как в противном случае $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \leqslant 2$. Нетрудно показать, что при $n \geqslant 9$ функции $Y_k(\gamma,n), k = \overline{1,5}$ при γ из промежутка $\gamma \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ удовлетворяют следующим неравенствам: $Y_1(\gamma,n) < 0.025, Y_2(\gamma,n) < 4.52, Y_3(\gamma,n) < 1, Y_4(\gamma,n) < 1.97, Y_5(\gamma,n) < 2.72$. Тогда,$L_n(\gamma) \leqslant 0.61 < 1$. Таким образом при $n \geqslant 9$, $\gamma \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ и $\alpha_0\sqrt{2\gamma} \geqslant 2$ экстремальных конфигураций не существует.

Остается рассмотреть случай, когда $n \geqslant 9$, $\gamma \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$ $\alpha_0\sqrt{2\gamma} < 2$.

Рассмотрим $D = G_0 \cup G_1 \cup ... \cup G_n$, тогда повторяя дословно рассуждения в доказательстве Теоремы 1 этой работы, построим области $\Omega_k^{(0)}$, $\Omega_k^{(1)}$, $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$.

Далее, используя результаты работ [10, 11], получаем неравенства

$$r\left(G_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(G_k, a_k\right) \leqslant \left[\alpha_k r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) \cdot \alpha_{k-1} r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Далее,

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} \left\{ r^{\alpha_k^2 \gamma}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, 1\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\Omega_k^{(0)}$, $\Omega_k^{(1)}$, $\Omega_k^{(2)}$ неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$. Принимая во внимание Теорему 1 работы [1] и учитывая методы работ [10, 14, 17], получим

$$[r(G_0,0)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r(G_k,a_k)$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\prod_{k=1}^{n} 2^{8}\cdot(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+4}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\Psi(x)=2^{8}\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in[0,2].$$

Аналогично доказательству Теоремы 1, приходим к заключению, что

$$\varphi'(x_k^{(0)})=\varphi'(x_j^{(0)}),\quad k,j=\overline{1,n}, \tag{3.5}$$

где $\varphi(x)=ln(\Psi(x))$, $0<x_k^{(0)}<x_j^{(0)}<2, k\neq j$ и $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольная система экстремальных точек, реализующая максимум функции $\prod\limits_{k=1}^{n}\Psi(x_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=2\sqrt{2\gamma}, x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma}, 0<x_k<2$.

Функция $\varphi'(x)$ монотонно убывает на промежутке $(0;x_0)$ и монотонно возрастает на промежутке $[x_0;2]$, $x_0\approx 1.7688$. Уравнение $\varphi'(x)=t$ при $x\in(x_1;2)$, где $x_1\approx 1.45$ имеет два корня $x_1(t),x_2(t)$, где $1.45<x_1\leqslant x_1(t)\leqslant x_0\leqslant x_2(t)<2$

Предположим, что один из корней $x_k^{(0)}, k=\overline{1,n}$, принадлежит промежутку $(x_0,2)$. Тогда имеет место неравенство $(x_1-1.45)n+(x_2-x_1)\geqslant 0, n\geqslant 9$. Отсюда следует, что $(n-1)x_1+x_2\geqslant 1,45n$. С другой стороны необходимо, чтобы $(n-1)x_1+x_2=2\sqrt{2\gamma}$. Таким образом, $2\sqrt{2\gamma}>1.45n$, что невозможно при $n\geqslant 9$, $\gamma\in\left(0;\frac{3}{2}\right]$.

Полученное противоречие означает, что ни одна из точек $x_k^{(0)}$ не может принадлежать промежутку $(x_0,2)$. Отсюда из соотношения (3.5) приходим к заключению, что $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}$. Теорема 4 доказана.

Используя результаты работы [6] и Теорему 1 данной работы получаем Теорему 3. □

Литература

[1] A. Bakhtin, G. Bakhtina, I. Denega, A*n extremal decomposition of complex plain with fixed poles* // Zb. Institute of mathematics of NAS, **14** (1) (2017), 34–38.

[2] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008.

[3] А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек* // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **8** (2011), No. 1, 12–21.

[4] А. К. Бахтін, Г. П. Бахтіна, В. Є. Вьюн, *Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей* // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **11** (2014), No. 1, 141–152.

[5] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966.

[6] I. Ya. Dvorak, *On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains* // Journal of Mathematical Sciences, **221** (2017), No. 5, 630–637.

[7] I. V. Denega, A. L.Targonskii, *Separating problem on extermal decomposition of the complex plane* // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **14** (2017), No. 1, 147–152.

[8] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

[9] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток, Дальнаука ДВО РАН, 2009.

[10] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (295) (1994), No. 1, 3–76.

[11] В. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168**, Изд–во “Наука”, Ленинград. отд., Л., (1988), 48–66.

[12] М. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

[13] Л. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. матем. сб., **2** (1996), 96–98.

[14] Л. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей* // Изв. вузов. Матем., (2000), No. 6, 80–81.

[15] Л. Ковалев, *О трех непересекающихся областях* // Дальневост. матем. журн., **1** (2000), No. 1, 3–7.

[16] Г. В. Кузьмина, Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ, **276** (2001), 253–275.

[17] L. V. Vyhivska, *On the problem of V. N. Dubinin for symmetric multiply connected domains* // Journal of Mathematical Sciences, **229** (2018), No. 1, 108–113.

Сведения об авторах

Инна Ярославовна Дворак

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

E-Mail: dvorakinna@gmail.com