

Ергодичні деформації нелінійних гамільтонових систем та локальна гомеоморфність метричних просторів

ТАРАС О. БАНАХ, АНАТОЛІЙ К. ПРИКАРПАТСЬКИЙ

(Представлена А. М. Самойленком)

Анотація. Досліджуються орбіти повільно збурених гамільтонових систем та асоційовані з ними ергодичні деформації лагранжевих многовидів. Основні результати базуються на підході Дж. Мазера [18, 19] до побудови гомологій інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують деякі лагранжеві функціонали, а також на еліптичній теорії Громова–Саламона–Зендера–Флоера [7, 9, 12, 20, 26] побудови інваріантних многовидів. В праці конструюються інваріантні підмноговиди, котрі є носіями інваріантних ергодичних мір та мають структуру локально гомеоморфних метричних просторів. Аналізується проблема конструювання ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульованої проф. А. М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій нелінійних гамільтонових систем та їх адиабатичних інваріантів. Встановлено, що відображення $f : X \rightarrow Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X в однозв'язний (зокрема, стягуваний) простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f локальним гомеоморфним і прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожньою компактною підмножиною в X .

Вступ

За останні роки методи симплектичної геометрії в застосуванні до вивчення широкого класу гамільтонових динамічних систем зазнали досить бурхливого розвитку [1, 2, 4, 7]. Зокрема, при аналізі структури періодичних розв'язків неавтономних гамільтонових систем на симплектичних многовидах були запропоновані нові математичні методи їх дослідження, що ґрунтуються на аналогу теорії Морса для нескінченно-вимірних многовидів петель [20, 26] та симплектичній геометрії лагранжевих многовидів [9, 17, 18]. Так, вивчаючи

Стаття надійшла в редакцію 20.05.2018

ергодичні міри, асоційовані з лагранжевими динамічними системами на дотичних просторах до конфігураційних замкнутих многовидів, Дж. Мазер [18] запропонував новий підхід до вивчення відповідних інваріантних ймовірнісних мір за допомогою спеціально сконструйованих функціоналів на групі гомологій лагранжевого многовиду, котрі дають, зокрема, можливість ефективно описати так звані гомології інваріантних ймовірнісних мір, що мінімізують відповідний лагранжевий функціонал дії. Як було показано в [5, 23–25], підхід Дж. Мазера допускає нетривіальне узагальнення на випадок опису ергодичних мір, що пов'язані натурально з заданою неавтономною періодичною гамільтоновою системою на замкненому симплектичному многовиді. Грунтуючись, зокрема, на варіанті еліптичної техніки М. Громова [2, 9, 20], в праці конструюються скінченновимірні інваріантні підмноговиди петель, асоційованих з лагранжевим многовидом неавтономної гамільтонової системи, які є носіями відповідних інваріантних ергодичних мір. Оскільки побудовані інваріантні многовиди мають структуру локально гомеоморфних метричних просторів, в праці досліджується важлива проблема [3, 8, 22] побудови ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульована проф. А.М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій нелінійних гамільтонових систем та їх адіабатичних інваріантів. Нами встановлено, що відображення $f : X \rightarrow Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфого простору X в однозв'язний (зокрема, стягуваний) простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f локальним гомеоморфним і прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожньою компактною підмножиною в X .

1. Симплектичний аналіз неавтономних періодичних гамільтонових систем

Нехай як вище $(M^{2n}, \omega^{(2)})$ є замкнутий симплектичний многовид з умовою слабкої точності $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$. Кожній достатньо гладкій функції $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ відповідає неавтономне векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow T(M^{2n})$, яке задовольняє умову

$$i_{K_H} \omega^{(2)} = -dH. \quad (1.1)$$

Відповідне векторне поле на $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ може бути записане як

$$du/ds = K_H(u; t), \quad dt/ds = 1, \quad (1.2)$$

де $t \in \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, а $(u; t) : \mathbb{R} \rightarrow M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є орбітою відповідного повного потоку $\psi^s : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M^{2n} \times \mathbb{S}^1$, визначеного для всіх

$s \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що векторне поле в (1.2) є 2π -періодичне по еволюційній змінній $t \in \mathbb{S}^1$. Проекція $\psi_{t_0}^s := \psi^s|_{M^{2n}}$, $s \in \mathbb{R}$, для фіксованого параметра $t_0 \in \mathbb{S}^1$ задовольняє, очевидно, умову типу (1.1), тобто

$$\psi_{t_0}^{s,*} \omega^{(2)} = \omega^{(2)} \quad (1.3)$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$. Таке відображення $\psi_{t_0}^s : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, яке задовольняє умову (1.3), є симплектичним, див. [1, 4].

Розглянемо тепер 1-форму $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ таку, що $\int_{D^2} (\omega^{(2)} - d\alpha^{(1)}) = 0$ для всякого компактного двовимірного диску $D^2 \subset M^{2n}$. Така 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ існує [9, 12] завдяки умові $\omega^{(2)}(\pi_2(M^{2n})) = 0$.

Розглянемо тепер деякий $(n+1)$ -вимірний підмноговид $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ такий, що для кожної замкнутої стягувальної гладкої кривої $\gamma \subset \mathcal{L}^{n+1}$ виконується наступна інтегральна рівність:

$$\oint_{\gamma} (\alpha^{(1)}(s) - H(t_0 + s) ds) = 0, \quad (1.4)$$

де $\gamma : \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \ni s \rightarrow \gamma(s) \in M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є відповідна параметризація кривої $\gamma \subset \mathcal{L}^{n+1}$. Структуру підмноговиду $\mathcal{L}^{n+1} \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ опишемо наступним чином. Нехай $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$ є деякий компактний лагранжевий підмноговид, тобто, за визначенням, $\omega^{(2)}|_{\mathcal{L}_{t_0}^n} = 0$. Тоді за допомогою симплектоморфізма $\psi_{t_0}^s : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$, $s \in \mathbb{R}$, можна записати вкладення

$$\{\psi_{t_0}^s \mathcal{L}_{t_0}^n, t_0 + s : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}^{n+1}, \quad (1.5)$$

яке слідує з визначення (1.4). Зокрема, для всіх $t_0 + s \in \mathbb{R}$ можна визначити в околі лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$ відображення $\mathcal{A}_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ з $d\mathcal{A}_{t_0}(s) = \alpha^{(1)}(s) - H(s + t_0) ds$, яке є породжуючою функцією для визначеної вище неперервної множини симплектоморфізмів $\psi_{t_0}^s \in \text{Diff}(M^{2n})$, $s \in \mathbb{R}$. Більше того, вираз (1.4) дає можливість визначити природнім чином наступний функціонал типу Пуанкаре–Картана на множині всіх майже скрізь диференційованих кривих $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M^{2n} \times \mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) := \frac{1}{\tau} \int_{\gamma} (\alpha^{(1)}(s) - H(s + t_0) ds), \quad (1.6)$$

де $\gamma(\tau) = \psi^\tau(\gamma(0))$, $\text{supp } \gamma \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$ і $U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ є деяким відкритим околком лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, що задовольняє умову $\psi_{t_0}^s U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\Sigma_{t_0}(H)$ підмножину кривих γ із носієм в $U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$ і фіксованими кінцями як вище і таких, що мінімізують функціонал (1.6). Якщо мінімум реалізується, то кожна така крива $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$ розв'язує динамічну систему (1.2). Щоб описати структуру множини кривих $\Sigma_{t_0}(H)$ більш детально, виберемо згідно [9, 12, 26] майже комплексну структуру $J : M^{2n} \rightarrow \text{End}(T(M^{2n}))$ на симплектичному многовиді M^{2n} , де, за визначенням, $J^2 = -\mathbf{1}$, і яка сумісна з симплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M^{2n})$. Тоді вираз

$$\langle \xi, \eta \rangle := \omega^{(2)}(\xi, J\eta), \quad (1.7)$$

де $\xi, \eta \in T(M^{2n})$, визначає природнім чином ріманову метрику на M^{2n} . По відношенню до цієї метрики наше гамільтонове векторне поле $K_H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow T(M^{2n})$ представляється як $K_H = J\nabla H$, де $\nabla : \mathcal{D}(M^{2n}) \rightarrow T(M^{2n})$ позначає градієнтне відображення стосовно введеної вище ріманової метрики (1.7).

Розглянемо тепер простір $\Omega := \Omega(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$ всіх майже срізь неперервно диференційованих кривих в $M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ із фіксованими кінцевими точками. Тоді можна визначити на Ω функціонал виду (1.6) і обчислити відображення $\text{grad } \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)} : \Omega \rightarrow T(\Omega)$:

$$(\text{grad } \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma), \xi) := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \langle J(\gamma_{t_0})\dot{\gamma}_{t_0}(s) + \nabla H(\gamma_{t_0}; s + t_0), \xi \rangle ds, \quad (1.8)$$

де $\gamma := \{\gamma_{t_0}^{(s)}; t_0 + s \pmod{2\pi} : s \in [0, \tau]\} \in \Omega$ і елемент $\xi \in T(\Omega)$. Оскільки всі критичні криві $\gamma \in \Sigma_{t_0}(H)$, що мінімізують функціонал (1.6) розв'язують рівняння Гамільтона (1.2), це дає можливість побудови інваріантної підмножини $\Omega_H \subset \Omega$ такої, що $\Omega_H := \Omega(U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1)$. А саме, визначимо криву $\gamma \in \Omega_H(\gamma^{(-)}) \subset \Omega_H$ як таку, що задовільняє наступний градієнтний потік в $U(\mathcal{L}_{t_0}^n) \times \mathbb{S}^1$:

$$\partial u_{t_0} / \partial z = -\text{grad } \mathcal{A}_{t_0}(u), \quad \partial t / \partial z = 0 \quad (1.9)$$

для всіх $z \in \mathbb{R}$ при таких асимптотичних умовах:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} u_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}(s), \quad (1.10)$$

де $s \in [0, \tau]$ і криві $\gamma_{t_0}^{(-)}, \gamma_{t_0} : [0, \tau] \rightarrow M^{2n}$ задовольняють систему (1.2). Більше того, крива $\gamma_{t_0}^{(-)} : [0, \tau] \rightarrow M^{2n}$ вважається гіперболічною із носієм $\text{supp } \gamma_{t_0}^{(-)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, де параметер $t_0 \in [0, 2\pi]$ є фіксованим. Тепер ми можемо побудувати, варіюючи криву $\gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, аналог так

званого нестійкого многовиду $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ до цієї гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(-)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, згідно описаній вище конструкції, функціональний многовид $W^u(\gamma_{t_0}^{(-)})$ при умові його компактності в слабкій гладкій топології Вітні [12, 20] може бути вкладеним як точковий компактний підмноговид в M^{2n} , тим самим інтерпретуючи носії кривих, що розв'язують (1.9) та (1.10), із $\text{supp } \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, як компактний окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ шуканого вище компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$.

Цілком подібна конструкція може бути проведена для випадку, коли умови (1.10) замінено на

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \gamma_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \gamma_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}(s), \quad (2.10a)$$

або на

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \gamma_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}^{(-)}(s), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \gamma_{t_0}(s; z) = \gamma_{t_0}^{(+)}(s), \quad (2.10b)$$

де $\gamma_{t_0}^{(\pm)} : [0, \tau] \rightarrow M^{2n}$ є дві різні строго неперетинні гіперболічні криві в M^{2n} з носіями $\text{supp } \gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ і які розв'язують систему рівнянь (1.2).

Використовуючи умови (2.10a) можна побудувати аналогічно стійкий підмноговид $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ до гіперболічної кривої $\gamma_{t_0}^{(+)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ і далі відповідний точковий окіл $\mathcal{L}_{t_0}^{(+)}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, що є важливим для вивчення властивостей трансвервального перетину стійкого $W^s(\gamma_{t_0}^{(+)})$ та нестійкого $W^u(\gamma_{t_0})$ многовидів. Аналогічно, використовуючи умови (2.10b) можна побудувати околи $\mathcal{L}_{t_0}^{\pm}(H) \subset U(\mathcal{L}_{t_0}^n)$ компактного лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, які є важливими при вивченні так званих адіабатичних збурень інтегровних за Ліувіллем-Арнольдом гамільтонових систем на симплектичному многовиді M^{2n} .

Скористаємося тепер підходом робіт [9, 12, 20, 26] до вивчення структури функціональної множини Ω_H . Для функції Гамільтона $H : M^{2n} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ загального положення множина Ω_H , виявляється, володіє властивістю компактності в слабкій топології Вітні та скінченної розмірності. Це веде до можливості побудови відповідних компактних точкових многовидів $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ як околів лагранжевого підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$. Щоб побачити наглядніше цей перехід до відповідного точкового компактного підмноговиду, розглянемо наступний

диференціальний оператор першого порядку як лінеаризацію рівняння (1.9) в напрямку векторного поля $\xi \in T(\Omega_H)$:

$$F_{t_0}(u)\xi = \nabla_z \xi + J(u)\nabla_s \xi + \nabla_\xi J(u) \frac{\partial u}{\partial s} + \nabla_\xi \nabla H(u; t_0 + s), \quad (1.11)$$

де $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ задовольняє наступне рівняння:

$$\partial u / \partial z + J(u)\partial u / \partial s + \nabla H(u; s + t_0) = 0 \quad (1.12)$$

і ∇_z, ∇_s та ∇_ξ позначають тут відповідні коваріантні похідні по відношенні до метрики (1.7) на M^{2n} . Якщо $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ є обмеженою і задовольняє рівняння (1.12), крива γ_{t_0} в M^{2n} має носій $\text{supp } \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ і криві $\gamma^{(\pm)}$ мають носії $\text{supp } \gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, будучи гіперболічними і невивродженими [12, 26], то лінійне відображення $F_{t_0}(u) : T(\Omega_H) \rightarrow T(\Omega_H)$, визначене в (1.11), є фредгольмовим оператором [13] між відповідними просторами Соболева. При цьому пара відображень (H, J) , де $J : M^{2n} \rightarrow \text{End } T(M^{2n})$ задовольняє (1.7), називається регулярною [26], якщо кожний гіперболічний розв'язок (1.2) невивроджений і оператор $F_{t_0}(u)$ є сюр'єкцією на $T(\Omega_H)$ для всіх $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$. В загальному випадку можна встановити, що простір $(\mathcal{H}, J)_{reg} \subset (\mathcal{H}, J)$ регулярних пар $(H, J) \in (\mathcal{H}, J)$ є щільним по відношенні до C^∞ -топології. Таким чином, для регулярних пар з теореми про неявну функцію [1, 13] слідує, що для будь-якої кривої $\gamma_{t_0}^{(-)}$ із $\text{supp } \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$ простір $\Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ дійсно є скінченновимірним слабо компактним за Вітні функціональним підмноговином, локальна розмірність якого біля точки $u \in \Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ збігається з індексом Фредгольма оператора $F_{t_0}(u)$. Із скінченності виміру та компактності функціонального простору $\Omega_H(\gamma_{t_0}^{(-)})$ випливає компактність відповідної точкової множини $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H)$, яку можна розглядати як компактний інваріантний окіл лагранжевого підмноговида $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$.

Щоб дати більш детальний опис компактного околу $\mathcal{L}_{t_0}^{(-)}(H)$, скористаємося результатами Флоера та Громова [2, 9, 20]. Зокрема, з їхньою допомогою можна проаналізувати структуру простору обмежених розв'язків проблеми (1.9)–(1.10). Легко встановлюється, що для будь-яких двох кривих $\gamma^{(-)}, \gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{L}_{t_0}^n \times \mathbb{S}^1$, що задовольняють рівняння (1.2), наступний додатний функціонал

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds \int_{\mathbb{R}} dz (|\partial u / \partial z|^2 + |\partial u / \partial s - K_H(u; s + t_0)|^2) \quad (1.13)$$

при умові його обмеженості задовольняє характеристичну рівність

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(-)}) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) \quad (1.14)$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{S}^1$ і $\tau \in \mathbb{R}$. Тим самими, якщо права частина рівності (1.14) не зануляється, функціональний простір $\Omega_H(\gamma^{(-)})$ буде *a priori* нетривіальним. Подібним чином, для обмеженого розв'язку $u \in \Omega_H|_{M^{2n}}$ рівняння (1.12) отримується, що

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(+)}), \quad (2.14a)$$

де відповідна крива $\gamma_{t_0}^{(+)} : [0, \tau] \rightarrow M^{2n}$ задовольняє систему (1.2) і є гіперболічною, причому носій $\text{supp } \gamma_{t_0} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$, і накінець, для $u \in \mathcal{L}_{t_0}(H)$

$$\Phi_{t_0}^{(\tau)}(u) = \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(-)}) - \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma^{(+)}), \quad (2.14b)$$

де криві $\gamma^{(\pm)} : [0, \tau] \rightarrow M^{2n} \times \mathbb{S}^1$ є строго відмінні, гіперболічні з носіями $\text{supp } \gamma_{t_0}^{(\pm)} \subset \mathcal{L}_{t_0}^n$. Випадок, коли $\gamma_{t_0}^{(-)} = \gamma_{t_0}^{(+)}$, очевидно, приводить тільки до точок $u \in \mathcal{L}_{t_0}^n$. Таким чином, нами сконструйовані відповідні інваріантні компактні околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ компактного підмноговиду $\mathcal{L}_{t_0}^n \subset M^{2n}$, які складаються з точок обмежених розв'язків рівнянь (1.9), (1.10) та (2.10a) і (2.10b). Грунтуючись на цих даних та аналітичних виразах (1.14) та (2.14a) і (2.14b), можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 1.1. *Всі околи $\mathcal{L}_{t_0}^{(\pm)}(H)$ та $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ побудовані за схемою, запропонованою вище, є компактними і інваріантними по відношенню до гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \text{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$.*

Розглянемо тепер випадок компактного інваріантного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Попередній опис простору кривих Ω_H дає можливість, використовуючи підхід Дж. Мазера [6, 18], вивчити інші важливі властивості компактного околу $\mathcal{L}_{t_0}(H)$, зокрема, структуру простору ймовірнісних борелівських мір $\mathcal{M}_{t_0}(H) := \mathcal{M}(T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1)$ із компактним носієм, інваріантних по відношенню до нашого гамільтонового потоку дифеоморфізмів $\psi^s \in \text{Diff}(M^{2n} \times \mathbb{S}^1)$, $s \in \mathbb{R}$, розширеного природним чином на простір $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$. Цей гамільтонів ψ -потік завдяки твердженню 1.1 може бути редукованим інваріантним чином на компактний інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1 \subset M^{2n} \times \mathbb{S}^1$. З метою більш детального вивчення цього редукованого ψ -потіку на підмноговиді $\mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}^1$, припустимо надалі, що наш розширений гамільтоновий ψ_* -потік на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$ є ергодичним, тобто

границя $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma)$ не залежить від початкових точок $(u_0, \dot{u}; t_0) \in T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}^1$.

Пригадаймо тепер результат [10, 13–15] з функціонального аналізу, який стверджує, що множина ймовірнісних мір на компактному метричному просторі X є підмножиною дуального простору $C^*(X)$ до простору Банаха $C(X)$ неперервних функцій на X . Ця множина є, очевидно, опуклою і, як відомо [19], є метризованим компактом по відношенню до слабкої топології на $C^*(X)$, яку часто ще називають називають слабкою $(*)$ -топологією. Обмеження цієї топології до множини борелівських мір часто ще називають нечіткою топологією на них.

Так як простір $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ є метризованим і може бути компактифікованим, множина борелівських ймовірнісних мір на \mathcal{P}_{t_0} є також метризованим опуклим компактом у дуальному просторі до банахового простору неперервних функцій на \mathcal{P}_{t_0} . Відповідна множина $\mathcal{M}_{t_0}(H)$ буде тоді також компактною опуклою підмножиною цього компакту борелівських ймовірнісних мір на \mathcal{P}_{t_0} .

Добре відомий класичний результат Крилова і Боголюбова [16, 21] твердить, що будь-який ψ -потік на компактному метричному просторі X має інваріантну ймовірнісну міру. Цей результат може бути адаптованим до нашого метричного компактифікованого простору $\mathcal{P}_{t_0} := T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ наступним чином. Візьмемо траєкторію $\gamma \in \Omega_H$ розширеного ψ_* -потіку на \mathcal{P}_{t_0} із носієм $\text{supp } \gamma \subset \mathcal{L}_{t_0}(H) \times \mathbb{S}$, визначеним на інтервалі $[0, \tau] \subset \mathbb{R}$, і покладемо, щоб міра μ_τ на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$ була рівномірно розподілена вздовж орбіти $\gamma \in \Omega_H$. Позначимо через μ точку згущення множини $\{\mu_\tau : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ коли $\tau \rightarrow \infty$ по відношенню до раніше визначеної нечіткої топології. Ми тепер бачимо, що сконструйована міра, тобто міра $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$ є нормованою і інваріантною по відношенню до розширеного гамільтонового ψ_* -потіку на \mathcal{P}_{t_0} .

Отже, у випадку ергодичності ψ_* -потіку на \mathcal{P}_{t_0} згадана вище границя

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{t_0}^{(\tau)}(\gamma) = \int_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H) d\mu, \quad (1.15)$$

де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ розглядається як функція $\alpha^{(1)} : \mathcal{P}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}$, так як підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H)$ за побудовою є компактным і інваріантно вкладеним в M^{2n} завдяки результату твердження 1.1. Таким чином

є натуральним вивчати властивості функціоналу

$$\mathcal{A}_{t_0}(\mu) := \int_{\mathcal{P}_{t_0}} (\alpha^{(1)} - H) d\mu \quad (1.16)$$

на просторі мір $\mathcal{M}_{t_0}(H)$, де ми для простоти опустили природне відображення обмеження 1-форми $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M^{2n})$ на інваріантний підмноговид $\mathcal{L}_{t_0}(H) \subset M^{2n}$. Будучи зацікавленими саме ергодичними властивостями ψ_* -орбіт на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$, можна дослідити відповідні ергодичні компоненти міри $\mu \in \mathcal{M}_{t_0}(H)$, які мінімізують функціонал (1.16), і які є важливими для вивчення властивостей регулярності ψ_* -потoku на $T(\mathcal{L}_{t_0}(H)) \times \mathbb{S}$. Ці результати можуть бути далі поширені на адіабатично збурені гамільтонові системи, які залежать від малого додатного параметра $\varepsilon \downarrow 0$, зауваживши, що неперервна гамільтонова функція $H(t) := \tilde{H}(\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$, де $\tilde{H}(\tau + 2\pi) = \tilde{H}(\tau)$ для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, задовольняє необхідні властивості розглядуваних систем на M^{2n} . При цьому можна також дослідити існування так званих адіабатичних інваріантів із компактними носіями в $\mathcal{L}_{t_0} \subset M^{2n}$, що мають різні застосування в математичній фізиці та механіці. Деякі з отриманих вище результатів можуть бути застосовані до дослідження важливої проблеми трансверсального перетину відповідних стійких та нестійких многовидів до гіперболічних кривих і сингулярних точок, що характеризують згідно з ідеями А. Пуанкаре існування в нашій гамільтоновій системі сильно іррегулярних рухів. Оскільки побудовані інваріантні многовиди мають структуру метричних просторів, локально гомеоморфних між собою, є важливим дослідити проблему знаходження ефективних критеріїв їх глобальної гомеоморфності, сформульовану проф. А.М. Самойленком при дослідженні ергодичних деформацій нелінійних гамільтонових систем та їхніх адіабатичних інваріантів.

2. Локальні гомеоморфізми метричних просторів

У цьому розділі ми описуємо в топологічних термінах умови, за яких локальний гомеоморфізм між топологічними просторами є гомеоморфізмом.

Означення 2.1. Відображення $f : X \rightarrow Y$ між двома топологічними просторами називається

- *локальним гомеоморфізмом*, якщо кожна точка $x \in X$ має такий окіл $O_x \subset X$, що звуження $f|_{O_x} : O_x \rightarrow f(O_x)$ є гомеоморфізмом O_x на відкриту множину $f(O_x) \subset Y$;

- *накриваючим відображенням*, якщо кожна точка $y \in Y$ має окіл $O_y \subset Y$, прообраз $f^{-1}(O_y)$ якого допускає покриття \mathcal{U} попарно неперетинними відкритими множинами такими, що $f|U : U \rightarrow O_y$ є гомеоморфізмом для кожного $U \in \mathcal{U}$;
- *прокомпактним*, якщо для кожного $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ є непорожною компактною підмножиною в X .

Зауважимо, що кожне прокомпактне відображення сюр'єктивне, а кожне накриваюче відображення є сюр'єктивним локальним гомеоморфізмом.

Лема 2.1. *Прокомпактне відображення $f : X \rightarrow Y$ з гаусдорфового простору X у топологічний простір Y є локальним гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є накриваючим відображенням.*

Доведення. Припустимо, що відображення f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом. З прокомпактності f випливає, що прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є непорожнім компактом в X . Оскільки f є локальним гомеоморфізмом, кожна точка $x \in f^{-1}(y)$ має такий окіл $O_x \subset X$, що $f|O_x$ є гомеоморфізмом на відкритий окіл $f(O_x)$ точки $f(x) = y$ в Y . Тобто $O_x \cap f^{-1}(y) = \{x\}$, котре означає, що точка x є ізольованою в $f^{-1}(y)$. Тому компактний простір $f^{-1}(y)$ є дискретним, а отже скінченним. А так як простір X є гаусдорфовим, для кожної точки $x \in f^{-1}(y)$ можна знайти відкритий окіл $V_x \subset O_x$ такий, що сім'я $(V_x)_{x \in f^{-1}(y)}$ є неперетинною.

Розглянемо накінець відкритий окіл $U := \bigcap_{x \in f^{-1}(y)} f(V_x)$ точки y в Y і зауважимо, що $f^{-1}(U)$ є неперетинним об'єднанням $\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$ відкритих множин $U_x := (f|V_x)^{-1}(U)$, для кожної з яких звуження $f|U_x : U_x \rightarrow U$ є гомеоморфізмом. Це означає, що f є накриваючим відображенням. \square

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *однозв'язним*, якщо він лінійно зв'язний і має тривіальну фундаментальну групу $\pi_1(X) = 0$.

Зрозуміло, що кожний стягуваний простір є однозв'язним. Сфери виміру $n \geq 2$ є однозв'язними, проте не стягуваними.

Із твердження 1.32 [11] випливає наступний критерій гомеоморфності однозв'язних просторів.

Теорема 2.1. *Кожне накриваюче відображення $f : X \rightarrow Y$ з лінійно зв'язного простору X в однозв'язний простір Y є гомеоморфізмом.*

Із теореми 2.1 та леми 2.1 випливає наступна характеристика, що дає відповідь на проблему А. М. Самойленка.

Теорема 2.2. *Відображення $f : X \rightarrow Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X в однов'язний простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом.*

Оскільки кожен стягуваний простір є однов'язним, із теореми 2.2 випливає

Наслідок 2.1. *Відображення $f : X \rightarrow Y$ з лінійно зв'язного гаусдорфового простору X у стягуваний простір Y є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли f є прокомпактним локальним гомеоморфізмом.*

Автори щиро вдячні колегам з Інституту математики НАН України та мехмату Київського національного університету імені Тараса Шевченка за корисні обговорення отриманих результатів. Авторам особливо вдячні акад. А. М. Самойленку за обговорення метричних проблем ергодичних деформацій нелінійних неавтономних гамільтонових систем, а також професору А. М. Плічку за ряд корисних порад та консультацій з функціонального аналізу.

Література

- [1] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Comings, USA, 1978, 806p.
- [2] B. Aebischer, M. Borer et al., *Symplectic geometry: Introductory course*, Birkhauses Verlag, Basel, 1992, 79–165.
- [3] V. I. Arnol'd, *A note on weierstrass' auxiliary theorem*, Functional Analysis and Its Applications, **1** (1967), No. 3, 173–179.
- [4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М., Наука, 1989.
- [5] I. Banakh, T. Banakh, A. Plichko, A. Prykarpatsky, *On local convexity of nonlinear mappings between Banach spaces //*, Cent. Eur. J. Math., **10** (2012), No. 6, 2264–2271.
- [6] R. E. Edwards, *Functional analysis*, Holt, Rinehart and Winston Publ., New York, 1965.
- [7] Y. Eliashberg, A. Givental, H. Hofer, *Introduction to Symplectic Field Theory*, In: Alon N., Bourgain J., Connes A., Gromov M., Milman V. (eds) *Visions in Mathematics*. Modern Birkhauser Classics. Birkhauser Basel, 2000, p. 560–673.
- [8] М. Эрве, *Функции многих переменных*, М., Мир, 1985.

-
- [9] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections* // J. Diff. Geom., **28** (1988), 513–547.
- [10] P. R. Halmosh, *Lectures on the ergodic theory* // Math. Soc. of Japan Publ., Tokyo, 1956.
- [11] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [12] H. Hofer, *Lusternik-Schnirelman theory for Lagrangian intersections* // Ann. Inst. Henri Poincare, **5** (1988), 456–499.
- [13] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, М., Наука, 1977.
- [14] А. Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, М., Факториал, 1999.
- [15] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С.В. Фомин, *Эргодическая теория*, М., Наука, 1980.
- [16] N. M. Kryloff, N. N. Bogoliubov, *La theorie generale de la mesure et son application á l'etude des systemes dynamiques de la mecanique nonlineaire* // Ann.Math., II, **38** (1937), 65–113.
- [17] R. Mane, *On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems* // Nonlinearity, **5** (1992), 623–638.
- [18] J. N. Mather, *Action minimizing measures for positive definite Lagrangian systems* // Math. Zeitschr., **207** (1991), 169–207.
- [19] J. Mather, *Variational construction of connecting orbits* // Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **43** (1993), No. 5, 1349–1386.
- [20] D. McDuff, *Elliptic methods in symplectic geometry* // Bull. AMS, **23** (1990), 311–358.
- [21] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М., Гостехиздат, 1949.
- [22] R. S. Palais, *Natural operations on differential forms* // Trans. Amer. Math. Soc., **92** (1959), 125–141.
- [23] A. K. Prykarpatsky, *Symplectic field theory approach to studying ergodic measures related with nonautonomous Hamiltonian systems* // Univ. Jagellonicae Acta Math., (2004), 123–138.
- [24] Ya. A. Prykarpats'kyi, *Symplectic approach to constructing ergodic measures* // Ukrainian Mathematical Journal, **58** (2006), No. 5, 763–778.
- [25] Ya. A. Prykarpats'kyi, *Mel'nikov-Samoilenko adiabatic stability problem* // Ukrainian Mathematical Journal, **58** (2006), No. 6, 887–903.
- [26] D. Salamon, E. Zehnder, *Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index* // Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1303–1360.

- [27] A. M. Samoilenko, *Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations*, Mathematics and its Applications, Kluwer Publisher, 1991.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Тарас
Онуфрійович
Банах**

Механіко-математичний Факультет
Львівського національного університету
імені Івана Франка, Львів, Україна
E-Mail: t.o.banakh@gmail.com

**Анатолій
Карольович
Прикарпатський**

Інститут математики
Краківської політехніки,
Краків, Польща,
Інститут фізики, математики, економіки
та інноваційних технологій
Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка,
Дрогобич, Україна
E-Mail: pryk.anat@cybergal.com