Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 2, 194 – 209

Апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича

Станіслав О. Чайченко, Андрій Л. Шидліч

(*Представлена О. А. Довгошиєм*)

Анотація. В роботі знайдено точні значення величин найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим деяких множин образів мультиплікаторів в модулярних просторах Орлича $l_{\mathbf{M}}$. Описано також простір $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ всіх мультиплікаторів з простору $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$.

2010 MSC. 47A58, 41A46, 46B45.

Ключові слова та фрази. Модулярі простори Орлича, найкраще наближення, базисний поперечник, поперечник за Колмогоровим, мультиплікатор.

1. Вступ

Модулярні простори Орлича $l_{\mathbf{M}}$ [1, розділ 4] досліджуються математиками з 40-х років минулого століття. Дані простори подібні до більш вивчених просторів l_M, введених В. Орличем в роботі [2], однак вони визначаються не однією фіксованою функцією Орлича M, а цілою послідовністю таких функцій $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$. Тому простори $l_{\mathbf{M}}$ володіють не лише основними властивостей просторів Орлича l_M, а й збігаються у випадку, коли функції $M_k(t) = t^{p_k}$, $p_k \geq 1$, з відомими просторами $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування, які були введені В. Орличем в роботі [3].

Робота [3] заклала початок цілій теорії просторів типу Орлича. У ній В. Орлич, окрім просторів послідовностей $l_{\mathbf{p}}$, ввів також аналогічні функціональні простори зі змінним показником $L^{p(\cdot)}$, які у випадку сталої функції p збігаються з відомими просторами Лебега.

Робота виконана за часткової підтримки гранту Президента України за конкурсним проектом (Ф78/206-2018) Державного фонду фундаментальних досліджень та гранту H2020-MSCA-RISE-2014, номер проекту 645672 (AMMODIT: Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools).

ISSN 1810 – 3200.

З того часу теорія таких просторів активно розробляється багатьма математиками у різних напрямах. Її результати знаходять своє застосування в теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів, варіаційному численні [4–8]. Значний внесок в дослідження функціональних просторів $L^{p(\cdot)}$ зі змінним показником було зроблено Л. Дінінгом, який зокрема, довів [9] обмеженість максимального оператора в цих просторах за природних і досить оптимальних умов (див. також [10, 11]). Простори $l_{\mathbf{p}}$ активно вивчалися А. Неквіндою [12–14]. Так в роботі [12] ним були знайдені необхідні та достатні умови еквівалентності норм у просторах $l_{\mathbf{p}}$ і $l_{\mathbf{q}}$ та умови обмеженості операторів зсуву, в [13] досліджувались властивості оператора усереднення та максимального оператора, а в [14] – знайдено умови вкладення для просторів $l_{\mathbf{p}}$. Властивості звичайних просторів Орлича l_M вивчалися, зокрема, в роботах [15–18] та ін., а модулярних просторів Орлича – зокрема, в роботах [7, 8, 19, 20] та ін. Окремо слід відзначити монографії [1, 21] та [22], в яких викладено основні результати теорії просторів типу Орлича та їх застосування, а також фундаментальну працю Ю. Мусєлака [23], присвячену модулярним просторам Орлича, в зв'язку з якою останні іноді також називають просторами Мусєлака–Орлича.

В даній роботі розглянуто апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича $l_{\mathbf{M}}$. Знайдено точні значення величин найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим деяких множин образів мультиплікаторів в цих просторах, а також описано простір $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ всіх мультиплікаторів з $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$. Одержані результати, зокрема, розповсюджують на простори $l_{\mathbf{M}}$ відповідні результати робіт [17, 24] та [25] для згаданих вище просторів l_M та $l_{\mathbf{p}}$.

2. Означення та деякі властивості просторів $l_{\mathbf{M}}$

Нехай $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \geq 0$, – довільна послідовність функцій Орлича, тобто, при кожному $k \in \mathbb{N}$ функція $M_k(t)$ є неспадною опуклою вниз функцією, для якої $M_k(0) = 0$ і $M_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Модулярним простором $l_{\mathbf{M}}$, що визначається даною послідовністю функцій $\mathbf{M}$, називають лінійний простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких є скінченною величина

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|/\alpha) \leq 1 \right\}.$$

Зазначимо, що коли всі функції M_k однакові: $M_k(t) \equiv M(t)$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_{\mathbf{M}}$ збігаються з просторами Орлича l_M послідовностей $x =$

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких є скінченною величина

$$\|x\|_{l_M} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) \le 1\right\}.$$

Якщо $M_k(t) = t^{p_k}$, $p_k \ge 1$, то $l_{\mathbf{M}}$ збігаються з просторами $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування, норма у яких визначається рівністю

$$\|x\|_{l_{\mathbf{p}}} = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|/\alpha)^{p_k} \le 1\right\},$$

якщо ж всі $M_k(t) = t^p$, $p \ge 1$, то простори $l_{\mathbf{M}}$ є звичайними просторами l_p з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Система $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, де $e_i = \{e_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$, $e_{ik} = 0$ при $k \ne i$ і $e_{ii} = 1$, є базисом простору $l_{\mathbf{M}}$.

Важливим підпростором простору $l_{\mathbf{M}}$ є простір $h_{\mathbf{M}}$ послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$, для яких при будь-якому $\alpha > 0$ виконується співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|/\alpha) < \infty.$$

Кажуть, що послідовність функцій Орлича $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє в нулі рівномірну Δ_2-умову, якщо існують додатна стала $C > 0$ і натуральне число $k^* \in \mathbb{N}$ такі, що при всіх $k > k^*$ і $t \in (0, \frac{1}{2})$ справджується нерівність $M_k(2t) \le CM_k(t)$.

Як показано у [1, розділ 4], якщо послідовність $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє в нулі рівномірну Δ_2-умову, то має місце рівність $l_{\mathbf{M}} = h_{\mathbf{M}}$.

3. Найкращі наближення та базисні поперечники в просторах $l_{\mathbf{M}}$

Нехай $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ та $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — дві довільні послідовності функцій Орлича, $l_{\mathbf{M}}$ та $l_{\mathbf{N}}$ — простори Орлича, які відповідають цим послідовностям, і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел. Якщо для кожної послідовності $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$ маємо $\lambda x = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{N}}$, то кажуть, що послідовність λ визначає мультиплікатор, який діє з простору $l_{\mathbf{M}}$ у простір $l_{\mathbf{N}}$. Простір всіх послідовностей, які визначають мультиплікатори з $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$ позначають через $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$.

Нехай, далі, $B_{l_{\mathbf{M}}}$ — одинична куля простору $l_{\mathbf{M}}$, а $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ — образ цієї кулі під дією мультиплікатора λ. Для будь-якого фіксованого набору γ_n із $n \in \mathbb{N}$ різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) := E_{\gamma_n}(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}})$$
$$= \sup_{x \in B_{l_{\mathbf{M}}}} E_{\gamma_n}(\lambda x, l_{\mathbf{N}}) = \sup_{x \in B_{l_{\mathbf{M}}}} \inf_{a_i} \|\lambda x - P_{\gamma_n}\|_{l_{\mathbf{N}}}$$

найкращого наближення в просторі $l_{\mathbf{N}}$ множини $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли

$$0 < N_k(t) \leq M_k(t), \quad t \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

а послідовність λ задовольняє умову

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0, \tag{3.2}$$

для довільного $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$ маємо $\lambda x \in l_{\mathbf{N}}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, поклавши $\lambda^* := \max\limits_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$, в такому випадку з урахуванням неспадання функцій $M_k(t)$ та $N_k(t)$ для довільного $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$ будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda^*}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \leq 1.$$

Звідси випливає, що $\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \leq \lambda^* < \infty$ і $\lambda x \in l_{\mathbf{N}}$.

Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності функції Орлича, що задовольняють співвідношення* (3.1) *і рівності*

$$\inf\{\alpha > 0 : M_k(1/\alpha) \leq 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N_k(1/\alpha) \leq 1\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2)*. Тоді для довільного набору* γ_n *із* $n \in \mathbb{N}$ *різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{N}}$. Оскільки для будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\gamma_n} N_k(|x_k - a_i|/\alpha) + \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha) \geq \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha),$$

то

$$E_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{E}_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{N}}) := \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_{\mathbf{N}}}$$
$$= \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha) \leq 1\right\},$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k\in\gamma_n} x_k e_k$.

Покладемо $\lambda_{k^*} = \lambda_{k^*}(\gamma_n) = \max\limits_{k\notin\gamma_n} \lambda_k$. Тоді для будь-якої послідовності $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$

$$\sum_{k\notin\gamma_n} N_k\left(\frac{\lambda_k|x_k|}{\lambda_{k^*}}\right) \leq \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|)$$
$$\leq \sum_{k\notin\gamma_n} M_k(|x_k|) \leq \sum_{k\notin\gamma_n} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) \leq \lambda_{k^*} = \max_{k\notin\gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку, покладемо $x^* := e_{k^*}/\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}}$. Внаслідок (3.3)

$$\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\{\alpha > 0 : M_{k^*}(1/\alpha) \leq 1\}$$
$$= \inf\{\alpha > 0 : N_{k^*}(1/\alpha) \leq 1\} = \|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{N}}},$$

тому $\|x^*\|_{l_{\mathbf{M}}} = \|x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} = 1$ і $x^* \in B_{l_{\mathbf{M}}}$. Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(\lambda x^*, l_{\mathbf{N}}) = \inf\left\{\alpha > 0 : N_{k^*}\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \leq 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 : N_{k^*}\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{N}}}}\right) \leq 1\right\} = \lambda_{k^*}.$$

Таким чином, дійсно має місце рівність (3.4). □

Зазначимо, що умова (3.3) еквівалентна тому, що норми векторів базисної системи $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ в просторах $l_{\mathbf{M}}$ та $l_{\mathbf{N}}$ однакові: $\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}} = \|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}$ або ж тому, що при кожному натуральному k функції M_k

та N_k досягають значення 1 в одних і тих самих точках: $M_k(t_k) = N_k(t_k) = 1$, де t_k — деякі додатні числа.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (3.4) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (3.4) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неспадна перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

Тому з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільні послідовності функцій Орлича, які задовольняють співвідношення* (3.1) *та* (3.3), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{D}_n(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— незростаюча перестановка чисел* λ_k.

Величину $\mathcal{D}_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{D}_n(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}})$ називають базисним поперечником множини $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ в просторі $l_{\mathbf{N}}$.

Зазначимо, що для згаданих вище просторів Орлича l_M та просторів $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування твердження, аналогічні твердженням теореми 1 та наслідку 1, були отримані у роботах [24] та [25] відповідно. Для просторів l_p твердження теореми 1 та наслідку 1 випливають відповідно з теорем 4.1 та 4.3 роботи [26].

4. Колмогорівські поперечники

Конструкція апроксимативних агрегатів, які будуть нами далі використовуватися, визначаються характеристичними послідовностями $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, що визначаються наступним чином [26].

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (3.2). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність всіх значень величин λ_k, впорядковану за незростанням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ позначимо систему множин

$$g_n := g_n^{\lambda} = \{k \in \mathbb{N} : \ \lambda_k \ \geq \varepsilon_n\}, \tag{4.1}$$

а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Враховуючи умову (3.2), послідовності $\varepsilon(\lambda)$ та $g(\lambda)$ можна означити наступними співвідношеннями

$$\varepsilon_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k, \quad g_1 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_1\},$$
$$\varepsilon_n = \sup_{k\bar{\in} g_{n-1}} \lambda_k, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_n\}.$$

Зауважимо, що за такого означення кожне число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам g_n^λ з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

Надалі зручно через $g_0 = g_0^\lambda$ позначати порожню множину і вважати, що $\delta_0 = 0$.

Зазначимо також, що якщо $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ – незростаюча перестановка чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то справджується рівність

$$\bar{\lambda}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Тому з теореми 1 легко отримати наступний наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *– довільні послідовності функцій Орлича, які задовольняють співвідношення* (3.1) *і* (3.3), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$

$$E_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) :=$$
$$= \sup_{x\in B_{l_{\mathbf{M}}}} \mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda x, l_{\mathbf{N}}) = \varepsilon_n, \tag{4.2}$$

де ε_n *–* n*-й член характеристичної послідовності* $\varepsilon(\lambda)$.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли послідовність $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ є строго спадною, при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ маємо $\varepsilon_n(\lambda) = \lambda_n$ і $g_n^\lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_n(\lambda) = n$, і тому для довільної послідовності $x \in l_{\mathbf{M}}$ величини $E_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_{\mathbf{M}})$ та $\mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_{\mathbf{M}})$ мають відповідно вигляд

$$E_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_{\mathbf{M}}) = E_{n-1}(x, l_{\mathbf{M}}) = \inf_{a_i} \Big\| x - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \Big\|_{l_{\mathbf{M}}}$$

та

$$\mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_{\mathbf{M}}) = \mathcal{E}_{n-1}(x, l_{\mathbf{M}}) = \Big\| x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \Big\|_{l_{\mathbf{M}}}.$$

Нехай, далі, X та Y – лінійні нормовані простори, B_X – замкнена одинична куля простору X і $\lambda : X \to Y$ – обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(\lambda : X \to Y) := d_n(\lambda(B_X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{u \in F_n} \|\lambda x - u\|_Y,$$

де $\mathcal{F}_n$ – множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають поперечником за Колмогоровим множини $\lambda(B_X)$ в просторі Y.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільна послідовність функцій Орлича,* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2)*. Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = \ldots$$

$$= d_{\delta_n-1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = E_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = \varepsilon_n, \tag{4.3}$$

в яких δ_s *і* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *– елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ*, а* $\delta_0 = 0$.

Доведення. Нехай спочатку $n > 1$. Підпростір Φ_{n-1}^{λ} поліномів

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^{\lambda}} a_k e_k \tag{4.4}$$

має розмірність δ_{n-1}. З урахуванням (4.2) знаходимо

$$\varepsilon_n = E_{g_{n-1}^{\lambda}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq d_{\delta_{n-1}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}})$$

$$\geq d_{\delta_{n-2}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq \ldots \geq d_{\delta_n-1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}).$$

Тому для доведення рівності (4.3) залишається переконатися, що

$$d_{\delta_n-1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

Для цього скористаємось відомою теоремою про поперечник кулі [27, §10.2], згідно з якою, якщо множина $\mathfrak{M}$ лінійного нормованого простору $\mathfrak{X}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ містить кулю $\gamma U_{\nu+1}$ радіуса γ деякого $(\nu+1)$-мірного підпростору $U_{\nu+1}$ з $\mathfrak{X}$, тобто, якщо

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y : \ y \in U_{\nu+1}, \ \|y\|_{\mathfrak{X}} \leq \gamma\},$$

то

$$d_{\nu}(\mathfrak{M})_{\mathfrak{X}} = \inf_{F_\nu \in G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} \|f - u\|_{\mathfrak{X}} \geq \gamma,$$

де G_ν – множина всіх ν-мірних підпросторів в $\mathcal{X}$.

Нехай $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ – перетин кулі радіуса ε_n в $l_{\mathbf{M}}$ з простором Φ^λ_n (розмірності δ_n) поліномів вигляду (4.4):

$$\varepsilon_n U^\lambda_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^{(\lambda)}_n \ : \ \|\Phi_n\|_{l_{\mathbf{M}}} \le \varepsilon_n\}. \tag{4.6}$$

Тоді з урахуванням (4.1), (4.6) та монотонності функцій $M_k(t)$ для довільного полінома $\Phi_n = \sum_{k\in g^\lambda_n} a_k e_k \in \varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ маємо

$$\sum_{k\in g^\psi_n} M_k(|a_k|/\lambda_k) \le \sum_{k\in g^\psi_n} M_k(|a_k|/\varepsilon_n) \le 1.$$

Звідси випливає, що Φ_n є образом деякої послідовності з одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{M}}}$. Таким чином, куля $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ δ_n-мірного підпростору $\Phi_n(\lambda)$ з $l_{\mathbf{M}}$ міститься в образі $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{M}}}$ при дії мультиплікатора λ, що на підставі наведеної вище теореми і дає співвідношення (4.5). Таким чином, у випадку $n > 1$ теорему доведено. При $n = 1$ її доведення залишається без змін, якщо вважати, що підпростір $\Phi_0(\lambda)$ складається з нульової послідовності $\theta = (0, 0, \ldots)$ і його розмірність дорівнює нулю. $\square$

Зазначимо, що для просторів l_M та $l_{\mathbf{p}}$ твердження наслідку 2 та теореми 2 отримані в роботах [24] та [25] відповідно. Для просторів l_p дані твердження випливають відповідно з теорем 1 та 2 роботи [28] (див. також [29, гл.11] теореми 3.1 та 3.2). У випадку скінченновимірних просторів l^d_p твердження, аналогічне до теореми 2, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії [30].

5. Мультиплікатори в модулярних просторах Орлича

Розглянемо послідовність функцій

$$Q_k(y) := \sup_{t\in[0,1]} \Big(N_k(yt) - M_k(t)\Big), \quad y \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

кожна з яких, відповідно до означення, є функцією Орлича і задовольняє нерівність

$$N_k(yt) \le M_k(t) + Q_k(y), \quad y \ge 0,\ t \in [0, 1], \tag{5.2}$$

що є аналогом класичної нерівності Юнга.

Лема 1. *Якщо $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$, де послідовність $\mathbf{Q} = \{Q_k(t)\}^\infty_{k=1}$ визначається співвідношенням (5.1), то $\lambda = \{\lambda_k(t)\}^\infty_{k=1}$ визначає мультиплікатор з простору $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$. Крім того для всіх $x \in l_{\mathbf{M}}$ виконується нерівність*

$$\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \cdot \|x\|_{l_{\mathbf{M}}}. \tag{5.3}$$

Перед доведення даної леми встановимо таке допоміжне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\mathbf{M}=\{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність функцій Орлича, яка визначає простір* $l_{\mathbf{M}}$. *Якщо для деякої послідовності* $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *маємо* $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}>1$, *то*

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}\le\sum_{k=1}^{\infty}M_k(|x_k|), \tag{5.4}$$

якщо ж $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}<1$, *то*

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}\ge\sum_{k=1}^{\infty}M_k(|x_k|). \tag{5.5}$$

Доведення. Дійсно, переконаємось, наприклад, в справедливості (5.4) за умови $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}>1$. Нерівність (5.5) за умови $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}<1$ доводиться аналогічно.

Виберемо число $\varepsilon>0$ так, щоб $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon>1$. Тоді на підставі нерівності

$$M(\alpha t)\le\alpha M(t),\quad 0\le\alpha\le1, \tag{5.6}$$

яка виконується для довільної функції Орлича (див., наприклад, [21, гл. 1], [17, 25]), а також означення норми у просторі $l_{\mathbf{M}}$, знаходимо

$$1<\sum_{k=1}^{\infty}M_k\Big(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon}\Big)\le\frac{1}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}M_k(|x_k|).$$

Звідси, переходячи до границі при $\varepsilon\to0$, отримуємо (5.4). □

Доведення леми 1. Нехай $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_{\mathbf{Q}}$ і $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_{\mathbf{M}}$ – довільні фіксовані послідовності і $\varepsilon>0$ — будь-яке число. Тоді внаслідок (5.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}N_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon}\cdot\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon}\Big)$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}M_k\Big(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon}\Big)\le2. \tag{5.7}$$

Розглянемо послідовності $\tilde\lambda=\{\tilde\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\tilde x=\{\tilde x_k\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$\tilde\lambda_k:=\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon},\quad \tilde x_k:=\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon},$$

У випадку, коли $\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 1$, нерівність (5.3) очевидна. Тому далі вважаємо, що $\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} > 1$. Враховуючи нерівності (5.4) і (5.7), знаходимо

$$\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \sum_{k=1}^{\infty} N_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} + \varepsilon} \cdot \frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} + \varepsilon}\Big) \le 2,$$

звідки одержуємо оцінку

$$\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 2\Big(\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} + \varepsilon\Big)\Big(\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} + \varepsilon\Big),$$

яка з урахуванням довільності числа $\varepsilon > 0$ і доводить нерівність (5.3). $\square$

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна пара послідовностей функцій Орлича, які задовольняють умову*

$$\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}} \le K_1\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}} \le K_2, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.8}$$

де K_1 *та* K_2 *— деякі додатні сталі,* $K_2 \ge K_1 \ge 1$. *Тоді простори* $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ *і* $l_{\mathbf{Q}}$, *де* $\mathbf{Q} = \{Q_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, *визначається співвідношеннями* (5.1), *збігаються як множини, та крім того, є ізоморфними як банахові простори.*

Доведення. Розглянемо у просторі мультиплікаторів $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ норму

$$\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = \sup\Big\{\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \quad \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\}. \tag{5.9}$$

З леми 1 випливає, що $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}} \supset l_{\mathbf{Q}}$. Дійсно, якщо $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$, то з нерівності (5.3) отримуємо

$$\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \cdot \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}.$$

Отже, для доведення теореми потрібно переконатися, що справджується обернене вкладення $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}} \subset l_{\mathbf{Q}}$ і виконується оцінка для норм

$$\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le 2K_2\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}. \tag{5.10}$$

Нехай k – будь-яке натуральне число. Візьмемо довільну послідовність невід'ємних чисел $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty} \in S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$, для якої $\|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/(2K_1)$ і позначимо $\lambda_k^{**} = \lambda_k^*/\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тоді

$$\lambda_k^* = \|\lambda^{**} e_k\|_{l_{\mathbf{N}}} = \frac{\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}}{\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}} \cdot \Big\|\lambda^* e_k/\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}\Big\|_{l_{\mathbf{N}}}$$

$$\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \ \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} = K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \tag{5.11}$$

Оскільки функції M_k та N_k є неперервними, то існує таке $x_k^* \in [0,1]$, що

$$Q_k(\lambda_k^{**}) := N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) - M_k(x_k^*). \tag{5.12}$$

Нехай $\mu := \lambda_k^{**} x_k^* e_k$. Оскільки

$$\|\mu\|_{l_{\mathbf{N}}} = \inf\Big\{\alpha > 0: \ N_k\Big(\frac{\lambda_k^{**} x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} = \lambda_k^* x_k^* \le \frac{1}{2},$$

то на підставі твердження 1 $N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\mu\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 1/2$. Таким чином, при довільному $k \in \mathbb{N}$

$$M_k(x_k^*) = N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) - Q_k(\lambda_k^{**}) \le \frac{1}{2}. \tag{5.13}$$

Далі, скориставшись методом математичної індукції, покажемо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k^*) \le \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Дійсно, при $n = 1$ співвідношення (5.14) випливає з (5.13). Припустимо, що (5.14) справджується при деякому $m = n$ і переконаємося в його справедливості при $m = n + 1$. Для цього позначимо $\tau := \sum_{k=1}^{n+1} x_k^* e_k$. Внаслідок співвідношення (5.13) та припущення індукції

$$\sum_{k=1}^{n+1} M_k(x_k^*) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k^*) + M_{n+1}(x_{n+1}^*) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

тому

$$\|\tau\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\Big\{\alpha > 0: \ \sum_{k=1}^{n+1} M_k\Big(\frac{x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} \le 1.$$

і тоді з урахуванням (5.8) та (5.9) маємо

$$\|\lambda^{**}\tau\|_{l_{\mathbf{N}}} = \inf\Big\{\alpha > 0: \ \sum_{k=1}^{n+1} N_k\Big(\frac{\lambda_k^{**} x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\}$$

$$= \inf\Big\{\alpha > 0: \ \sum_{k=1}^{n+1} N_k\Big(\frac{\lambda_k^* x_k^*}{\alpha \|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}} \cdot \frac{\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}}{\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}}\Big) \le 1\Big\}$$

$$\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \ \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} = K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \tag{5.15}$$

Об'єднуючи (5.12), (5.15) та використовуючи твердження 1, отримуємо необхідну нерівність:

$$\sum_{k=1}^{n+1} M_k(x_k^*) \le \sum_{k=1}^{n+1} N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\lambda^{**}\tau\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \frac{1}{2}.$$

Таким чином, нерівність (5.14) виконується для довільного натурального числа n, і тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(x_k^*) \le \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $x^* = \{x_k^*\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$,

$$\|x^*\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big(\frac{|x_k^*|}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} \le 1,$$

і при цьому

$$\begin{aligned} \|\lambda^{**}x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} &\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \ \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} \\ &= K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Використовуючи твердження 1, на підставі співвідношень (5.12) та (5.16) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(\lambda_k^{**}) \le \sum_{k=1}^{\infty} N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\lambda^{**}x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \frac{1}{2}.$$

Таким чином, послідовність λ^{**} належить $l_{\mathbf{Q}}$ і виконується нерівність $\|\lambda^{**}\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le 1$. Тоді з огляду на (5.8) послідовність λ^* теж належить $l_{\mathbf{Q}}$ і при цьому $\|\lambda^*\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le K_2/K_1$.

Нехай тепер λ – довільна послідовність з множини $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$. Покладемо $\lambda^* := \lambda/\Big(2K_1\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}\Big)$. Оскільки $\|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/(2K_1)$, то як показано вище, $\lambda^* \in l_{\mathbf{Q}}$ і справджується співвідношення

$$K_2/K_1 \ge \|\lambda^*\|_{l_{\mathbf{Q}}} = \Big\|\lambda/\Big(2K_1\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}\Big)\Big\|_{l_{\mathbf{Q}}},$$

з якого випливає, що $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$ і має місце нерівність (5.10). □

Зазначимо, що для звичайних просторів Орлича l_M твердження, аналогічні до тверджень леми 1 та теореми 3, отримано в роботі [17].

Нехай $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільні послідовності додатних чисел, таких що

$$1 \le r_k < p_k \le K, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.17}$$

де K – додатна стала. Розглянемо послідовності функцій $\mathbf{P} = \{t^{p_k}/p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{R} = \{t^{r_k}/r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Зрозуміло, що кожна функція з цих послідовностей є функцією Орлича і справджується співвідношення

$$1/K \le \|e_k\|_{l_{\mathbf{P}}} = \inf\left\{\alpha > 0 : \ \frac{1}{\alpha p_k} \le 1\right\} = \frac{1}{p_k}$$

$$< \frac{1}{r_k} = \inf\left\{\alpha > 0 : \ \frac{1}{\alpha r_k} \le 1\right\} = \|e_k\|_{l_{\mathbf{R}}} \le 1,$$

звідки випливає, що послідовності $\mathbf{P}$ і $\mathbf{R}$ задовольняють умову (5.8).

Оскільки при кожному фіксованому $y \in [0,1]$ різниця $\delta(t) := \frac{(yt)^{r_k}}{r_k} - \frac{t^{p_k}}{p_k}$ досягає свого максимального значення при $t = y^{r_k/(p_k-r_k)} \in [0,1]$, то

$$Q_k(y) = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{(yt)^{r_k}}{r_k} - \frac{t^{p_k}}{p_k}\right| = \frac{y^{q_k}}{q_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де

$$q_k = \frac{p_k r_k}{p_k - r_k}, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{5.18}$$

Тому з теореми 3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай* $\mathbf{P} = \{t^{p_k}/p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{R} = \{t^{r_k}/r_k\}_{k=1}^{\infty}$, *де* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності, що задовольняють умову* (5.17). *Тоді простори* $S_{\mathbf{P},\mathbf{R}}$ *і* $l_{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{Q} = \{t^{q_k}/q_k\}_{k=1}^{\infty}$, *де числа* q_k *визначається співвідношенням* (5.18), *співпадають як множини, та крім того, є ізоморфними як банахові простори.*

Література

[1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I: Sequence Spaces*, Berlin, 1977.

[2] W. Orlicz, *Über Räume* (L^M) // Bull. intern. de l'Acad. Pol., (1936), Serie A, Cracovie.

[3] W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentenfolgen* // Studia Math., (1931), No. 3, 200–211.

[4] L. Diening, M. Ružička, *Calderon-Zygmund operators on generelized Lebesgue spaces* $L^{p(x)}$ *and problems related to fluid dynamics* // J. Reine Angew. Math., **563** (2003), 197–220.

[5] M. Ružička, *Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory*, Lect. Notes Math. Springer, **1748**, 2000.

[6] S. G. Samko, *On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: Maximal and Singular operators* // Integral Transforms Spec. Funct., **16** (2005), No. 5–6, 461–482.

[7] P. Harjulehto, P. Hästö, R. Klén, *Generalized Orlicz spaces and related PDE* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **143** (2016), 155–173.

[8] P. Hästö, *The maximal operator on generalized Orlicz spaces* // J. Funct. Anal., **269** (2015), No. 12, 4038–4048.

[9] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$ // Math. Inequal. Appl., **7** (2004), No. 2, 245–253.

[10] L. Pick, M. Ružička, *An example of a space* $L^{p(x)}$ *on which the Hardy–Littlewood maximal operator is not bounded* // Expo. Math., **19** (2001), 369–371.

[11] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C. Neugebauer, *The maximal function on variable* L^p *spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **28** (2003), 223–238; Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **29** (2004), 247–249.

[12] A. Nekvinda *Equivalence of* l^{p_n} *norms and shift operators* // Math. Inequal. Appl., **5** (2002), № 4, 711–723.

[13] A. Nekvinda, *A note on maximal operator on* l^{p_n} *and* $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ // J. Funct. Spaces Appl., **5** (2007), № 1, 49–88.

[14] A. Nekvinda, *Imbeddings between discrete weighted Lebesgue spaces* // Math. Inequal. Appl., **10** (2007), № 1, 165–172.

[15] Ю. И. Грибанов, *Нелинейные операторы в пространствах Орлича* // Уч. зап. Казанского ун-та, **115** (1955), кн. 7.

[16] Ю. И. Грибанов, *К теории пространств* l_M // Уч. зап. Казанского ун-та, **117** (1957), кн. 2.

[17] P. B. Djakov, M. S. Ramanujan, *Multipliers between Orlicz Sequence Spaces* // Truk. J. Math., (2000), No. 24, 313–319.

[18] M. Aiyub, *On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz function* // Proyecciones Journal of Mathematics, **32** (2013), No. 3, 267–280.

[19] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, *Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces* // Bull. Sci. Math., **137** (2013), 76–96.

[20] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, *Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces* // Czechoslovak Math. J.,**63(138)** (2013), No. 4, 933–948.

[21] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.

[22] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Math., vol. 2017, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

[23] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Berlin: Springer, 1983.

[24] А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко, *Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах* $l_{\mathbf{p}}$ // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Інституту математики НАН України, **11** (2014), No. 4, 399–412.

[25] A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko, *Approximative Properties of Diagonal Operators in Orlicz Spaces* // Numerical Functional Analysis and Optimization, **36** (2015), No. 10, 1339–1352.

[26] А. И. Степанец, *Задачи теории приближений в линейных пространствах* // Укр. мат. журн., **58** (2006) No. 1, 47–92.

[27] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, М., Изд.-во Моск. ун-та, 1976.

[28] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p_φ // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 3, 392–416.

[29] А. И. Степанец, *Методы теории приближений:* В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, ч. 2, (2002) **40**, 468 с.

[30] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Springer–Verlag, 1985.

Відомості про авторів

Станіслав Олегович Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
E-Mail: s.chaichenko@gmail.com

Андрій Любомирович Шидліч

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: shidlich@gmail.com