Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 2, 154 – 176

К теории отображений класса Соболева с критическим показателем

Елена С. Афанасьева, Владимир И. Рязанов, Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье установлено, что любой гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с внешней дилатацией $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\rm loc}$ является так называемым нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(x)=K_O(x,f)$, а также кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(x)=K_O^{n-1}(x,f)$.

Это позволяет применить теорию граничного поведения кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов. В частности, найдены условия на внешнюю дилатацию $K_O(x,f)$ и границы областей, при которых всякий гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ допускает непрерывное и гомеоморфное продолжение на границу.

2010 MSC. Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

Ключевые слова и фразы. Кольцевые Q-гомеоморфизмы, нижние Q-гомеоморфизмы, классы Соболева, отображения с конечным искажением, непрерывное продолжение, гомеоморфное продолжение, модули.

1. Введение

В работе получены приложения теории так называемых кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию граничного поведения гомеоморфизмов с обобщенными производными по Соболеву, см., например, монографию [32], а также статьи [1, 13] и [19].

Как известно, любой гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с локально интегрируемой дилатацией K_f на плоскости является как кольцевым, так и нижним $Q-$гомеоморфизмом с $Q=K_f$, см. [22] и [23]. Кроме того, в работе [25], в частности, было показано, что гомеоморфизмы f класса $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, являются так называемыми нижними Q-гомеоморфизмами с функцией $Q(x)$, равной внешней дилатации $K_f(x)$ отображения f, и кольцевыми Q_*-гомеоморфизмами с $Q_*(x)=[K_f(x)]^{n-1}$.

ISSN 1810 – 3200.

Случай с критическим показателем $p = n - 1$ оставался неизученным, чему и посвящена данная работа. Это продвижение оказалось возможным, прежде всего, благодаря статье [47].

2. Определения и предварительные замечания

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot |J_f(x)| \tag{2.1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ — якобиева матрица f, $J_f(x) := \det f'(x)$ — якобиан отображения f, а $\|f'(x)\|$ — её операторная норма: $\|f'(x)\| := \sup\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Напомним также, что впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [15], см. также [14]. Впоследствии это условие было заменено требованием $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагавшим однако дополнительно, что $J_f \in L^1_{\rm loc}$, см., напр., монографию [14], а также дальнейшие ссылки в монографии [32].

Всюду далее m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2.1. Заметим, что условие $J_f \in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в D, существует множество E лебеговой меры ноль, такое что f обладает (N)-свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int\limits_A |J_f(x)|\, dm(x) = m(f(A)) \tag{2.2}$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$ (см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [6]).

Пусть $J_f(x)$ — якобиан отображения f, имеющего все первые частные производные в точке x. Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством

$$K_O(x, f) \;=\; \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}\;, \tag{2.3}$$

если $J_f(x) \neq 0$; $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренней дилатацией отображения f в точке x называется величина

$$K_I(x,f) \;=\; \frac{|J_f(x)|}{l\,(f'(x))^n} \tag{2.4}$$

где $l\,(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках.

Замечание 2.2. Известно, что

$$K_I(x,f) \leqslant K_O^{n-1}(x,f)\ , \tag{2.5}$$

см., напр., раздел 1.2.1 в [40].

Следуя [32, разд. 9.2], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называем произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называем число прообразов

$$N(S,y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega :\ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.6}$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, т.е.

$$N(S,y) \;\geq\; \liminf_{m\to\infty}\; N(S,y_m)$$

для любой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$, $m = 1,2,\ldots$, такой что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$, см., напр., [38], с. 160. Таким образом, функция $N(S,y)$ измерима по Борелю и поэтому измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., напр., секцию II.7 в [45].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S,y)\, dH^k y. \tag{2.7}$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{2.8}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$.

Модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,. \tag{2.9}$$

В дальнейшем через $\Delta(E, F; G)$ обозначаем совокупность всех кривых $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, соединяющих произвольные множества E и F во множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (0,1)$.

3. О кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмах

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение

$$M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x)\eta^n(|x - x_0|)dm(x) \tag{3.1}$$

выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D, которые принадлежат разным компонентам дополнения в $\mathbb{R}^n$ кольца

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, 0 < \ r_1 \ < r_2 \ < \infty,$$

и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1$. Также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ есть *кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма впервые было введено в работе [44] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай в работе [42], см. также монографии [10] и [32].

Говорят, см. [32, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$ – мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_{S} \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{3.2}$$

для почти всех $S \in \Gamma$, т.е. за исключением подсемейства Γ нулевого модуля.

Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если

$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext\,adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{3.3}$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области* D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие нижнего Q-гомеоморфизма введено в работе [19] и теория таких отображений нашла интересные приложения в изучении краевых задач для уравнений Бельтрами, а также локального и граничного поведения классов Орлича-Соболева, см., например, статьи [23, 25] и монографию [26].

Следующее утверждение устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q-гомеоморфизмами в $\mathbb{R}^n$, см. следствие 5 в [25].

Предложение 3.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и функция $Q : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ интегрируема в степени $n - 1$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Если $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0, то f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.*

Замечание 3.1. В определениях нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D или продолжить нулем вне D. По замечанию 8 в [25], заключение предложения 3.1 остается в силе, если функция Q интегрируема в степени $n-1$ лишь на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0.

4. О некоторых свойствах отображений класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$

По теореме 1.1 из недавней работы [47] имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое дискретное отображение класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с локально интегрируемой внутренней дилатацией. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду.*

При $n \geqslant 3$ этот результат был новым даже для гомеоморфизмов. При $n = 2$ по известной теореме Геринга-Лехто любое непрерывное открытое отображение, имеющее п.в. частные производные, дифференцируемо п.в., см., например, [8] или [28]. Заметим, что последний результат для гомеоморфизмов был доказан еще Меньшовым в работе [31] и его доказательство без изменений проходило и для непрерывных открытых отображений. По теореме Вяйсяля заключение сохраняет силу для непрерывных открытых отображений класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при любых $p > n-1$ и $n \geqslant 3$, см. лемму 3 в [49]. В то же время, известны примеры функций $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$, которые нигде не дифференцируемы, см., например, [46].

Следствие 4.1. *Если открытое дискретное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет внешнюю дилатацию локально интегрируемую в степени $n-1$, то f дифференцируемо почти всюду.*

Далее, по теореме 1.3 работы [5] имеем следующий важный результат.

Предложение 4.2. *Пусть $f : C \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — гомеоморфизм класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(C)$ в единичном кубе $C := (0,1)^n$. Тогда f обладает (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$ – мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$, т.е., для любого множества $E \subset \mathcal{P}$, если $H^{n-1}(E) = 0$, то $H^{n-1}(f(E)) = 0$.*

Этот результат был распространен на произвольные непрерывные открытые дискретные отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$, см. предложение 3.3 в [47]. Более того, любое непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ обладает указанным свойством, см., например, теорему 3 в [25]. Однако, это неверно даже для гомеоморфизмов $f : D \to \mathbb{R}^n$ в классах $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ ни при каком $p < n-1$. Действительно, известны примеры С. П. Пономарева гомеоморфизмов $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, принадлежащих классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $p < n$, и не обладающих (N)-свойством Лузина, см. [37]. Если теперь $g(x)$ — такой пример в $\mathbb{R}^{n-1}$, то $f(x,y) := (g(x), y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, не удовлетворяет (N)-свойству Лузина на всех гиперплоскостях $y = \mathrm{const}$.

Лемма 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда $\|f'\| \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$.*

Доказательство. Пусть V — компакт в D. Тогда, применяя неравенство Гёльдера с показателями $p = n$ и $p' = \frac{n}{n-1}$, будем иметь

$$\int\limits_V \|f'(x)\|^{n-1}\, dm(x) \;=\; \int\limits_V K_O^{\frac{n-1}{n}}(x) \cdot J_f^{\frac{n-1}{n}}(x)\, dm(x)$$

$$\leqslant \left(\int\limits_V K_O^{n-1}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int\limits_V J_f(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-1}{n}} \;<\; \infty$$

и заключение леммы следует из замечания 2.1. □

Следствие 4.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда $f \in W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$.*

5. Лемма об абсолютной непрерывности

Лемма 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ и пусть C — куб в $\mathbb{R}^n$ с гранями параллельными координатным гиперплоскостям, такой что $\overline{C} \subset D$. Тогда сужение отображения f на C абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$ – мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких гиперплоскостях $\mathcal{P}$ выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset \mathcal{P}$.*

Доказательство. По лемме 4.1 $\|f'(x)\| \in L^{n-1}(C)$ и по теореме Фубини, см., например, теорему III(8.1) в [45], на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$,

$$\int\limits_{C\cap\mathcal{P}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} < \infty\ ,$$

а по следствию 4.1 и предложению 4.2 можно считать дополнительно, что отображение f дифференцируемо в почти всех точках множества $C \cap \mathcal{P}$ и обладает там (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$ – мерной меры Хаусдорфа. Зафиксируем произвольную гиперплоскость $\mathcal{P}_*$ с указанными свойствами.

Тогда каждое измеримого множество $E \subset C \cap \mathcal{P}_*$ допускает разложение $E = E_0 \cup E_*$, где $H^{n-1}(E_0) = 0$, и $E_* := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k, $k = 1, 2, \ldots$, — измеримые множества, такие, что отображения $f_k := f|_{E_k}$ являются липшицевыми, см. теорему 3.1.8 в [6]. По построению $H^{n-1}(f(E_0)) = 0$, а каждое отображение f_k допускает липшицево продолжение на всю гиперплоскость $\mathcal{P}_*$ по теореме Кирсбрауна, см., например, теорему 2.10.43 в [6]. Таким образом, по теореме 3.2.5 в [6] и счетной аддитивности интеграла имеем равенство:

$$H^{n-1}(f(E)) \ = \int\limits_{\mathbf{E}_*} J_{n-1}(x)\ d\mathcal{A}\ ,$$

где J_{n-1} обозначает $(n-1)$ – мерный якобиан отображения f на гиперплоскости $\mathcal{P}_*$ и, наконец, по пункту 1.7.6 в [6] получаем оценку

$$H^{n-1}(f(E)) \ \leqslant \int\limits_{\mathbf{E}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A}\ .$$

Отсюда приходим к абсолютной непрерывности отображения f на гиперплоскости $\mathcal{P}_*$ в силу абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, а также — ко второму заключению леммы. $\Box$

Заметим тот очевидный факт, что хаусдорфовы меры квазиинвариантны при квазиизометриях, а классы Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ инвариантны, см., например, секцию 1.1.7 в монографии [35]. По свойству Линделефа в $\mathbb{R}^n$, см., например, секцию I.5.XI в [27], множество $D \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $D \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0, и каждый такой сегмент может быть отображен на единичный куб в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии, переводящих куски сфер в куски гиперплоскостей. Поэтому, применяя лемму 6.1, а также предложение 4.2, приходим к следующим выводам, сравни со следствием 3.4 в работе [47].

Следствие 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда отображение f обладает (N)-свойством Лузина относительно $(n-1)$ – мерной* *меры Хаусдорфа на почти всех сферах S с центром в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Более того, если дополнительно $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$, то отображение f на почти всех таких сферах S локально абсолютно непрерывно и, кроме того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset S$.*

6. Основная лемма и ее следствие

Лемма 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда гомеоморфизм f является нижним Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_O(x, f)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство. Обозначим через B (борелевское) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., например, соответственно теоремы 2.10.43 и 3.1.2 в [6], заключаем, что множество B представляет собой счетное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [6]. Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f' = 0$.

По следствию 4.1 множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет лебегову меру нуль. Поэтому $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$ для почти всех гиперповерхностей S в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, см., например, теорему 2.4 в [21] или теорему 9.1 в [32]. Таким образом, по следствию 5.1 получаем, что $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0 = \mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*))$ для почти всех S_r, где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и $\rho(x) := \rho_*(f(x))\|f'(x)\|$ при $x \in D \setminus B_0$.

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, согласно 1.7.6 в [6], получаем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \;=\; \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathcal{A} \;\geqslant\; \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}\, d\mathcal{A}_* \;\geqslant\; 1 \quad (6.1)$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., теорему 3.2.5 в [6], ввиду счетной аддитивности интеграла, получаем оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^n(x)}{K_O(x,f)}\, dm(x) \ \leqslant \int\limits_{f(D)} \rho_*^n(y)\, dm(y) \ , \tag{6.2}$$

что и завершает доказательство. □

Комбинируя предложение 3.1 и лемму 6.1, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 6.1. *Пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Тогда f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом с $Q_*(x) = K_O^{n-1}(x, f)$.*

7. О регулярных областях

Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ точки x_0, такая что множество $V \cap D$ является связным.

Говорят, что граница области D является *слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$, если для каждой окрестности U точки x_0 и любого $P > 0$ найдётся окрестность $V \subset U$ точки x_0, такая что

$$M\left(\Delta(E, F, D)\right) \geqslant P \tag{7.1}$$

для всех континуумов E и F, лежащих в области D и пересекающих ∂U и ∂V. Также говорят, что граница области D *слабо плоская*, если она является слабо плоской в каждой точке ∂D.

Наконец, говорят, что точка $x_0 \in \partial D$ является *сильно достижимой*, если для каждой окрестности U точки x_0 найдётся компакт E, лежащий в области D, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и некоторое число $\delta > 0$, такие что

$$M\left(\Delta(E, F, D)\right) \geqslant \delta \tag{7.2}$$

для всех континуумов F, лежащих в области D и пересекающих ∂U и ∂V. Говорят, что граница области является *сильно достижимой*, если каждая её точка является сильно достижимой, см., [42].

Замечание 7.1. В определениях сильно достижимой и слабо плоской границы, в качестве окрестностей U и V точки x_0, можно брать открытые (замкнутые) шары с центром в точке x_0, либо окрестности точки x_0 из любой другой фундаментальной системы окрестностей.

Замечание 7.2. Приведенные выше понятия естественным образом могут быть распространены на случай расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ и точки $x_0 = \infty$. В последнем случае в приведённых выше определениях необходимо брать соответствующие окрестности бесконечно удаленной точки.

Из определений следует, что, если область D в $\mathbb{R}^n$ является слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, то точка x_0 является сильно достижимой из D. Более того, было показано, что, если область D в $\mathbb{R}^n$ является слабо плоской в точке $x_0 \in \partial D$, то D является локально связной в этой точке, см., напр., лемму 5.1 в [19], либо лемму 3.15 в [32].

Понятия сильной достижимости и слабой плоскости, относящиеся к граничным точкам некоторой области в $\mathbb{R}^n$, впервые были введены в работе [18]. Данные понятия являются локализацией и обобщением соответствующих более ранних понятий, рассматривавшихся в предшествующих работах [33, 34]. В связи с этим упомянем также свойства P_1 и P_2 по Вяйсяля, см. [48], а также свойства квазиконформной достижимости и квазиконформной плоскости по Някки, см., напр., в [36]. Заметим, что множество результатов, связанных с гомеоморфным продолжением на границу квазиконформных отображений и их обобщений, имеют место при условии слабой плоскости границ соответствующих областей. Условие сильной достижимости играет аналогичную роль для непрерывного продолжения отображений на границу.

Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется областью *квазиэкстремальной длины*, сокр. *QED-областью*, см. [9], если при некоторой постоянной $K \geqslant 1$ и любых непересекающихся континуумов E и F в D выполнено соотношение

$$M\left(\Delta(E, F, \overline{\mathbb{R}^n}\right) \leqslant K \cdot M\left(\Delta(E, F, D)\right). \qquad (7.3)$$

Замечание 7.3. Хорошо известно, см., напр., теорему 10.12 в [48], что для произвольных множеств E и F в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пересекающих все сферы $S(x_0, \varrho)$, $\varrho \in (r, R)$, выполнено неравенство

$$M\left(\Delta(E, F, \mathbb{R}^n)\right) \geqslant c_n \log \frac{R}{r}. \qquad (7.4)$$

Следовательно, QED-области имеют слабо плоские границы. Один из примеров в [32], см. разд. 3.8, показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно даже для односвязных плоских областей.

8. Непрерывное продолжение на границу

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение предельных множеств отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ для множеств $X \subset \overline{D}$,

$$C(X,f) := \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^n} : \; y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \; x_k \to x_0 \in X, \; x_k \in D \right\}. \quad (8.1)$$

Заметим, что для произвольного гомеоморфизма $f : D \to D'$ имеет место включение $C(\partial D, f) \subset \partial D'$, см., напр., предложение 13.5 в [32].

В силу леммы 6.1, а также теоремы 6.1 в [19], см. лемму 9.4 в [32], имеем следующее утверждение.

Лемма 8.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \partial D$. Предположим, что область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а граница области D' сильно достижима. Пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Если выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\| K_O\|_{n-1}(r)} = \infty, \quad (8.2)$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$ и

$$\| K_O\|_{n-1}(r) = \| K_O\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} K_O^{n-1}(x,f)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (8.3)$$

то отображение f продолжается в точку x_0 по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Следствие 8.1. *В частности, заключение леммы 8.1 верно, если*

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r} \right]^{n-1} \right) \quad (8.4)$$

при $r \to 0$, где $k_{x_0}(r)$ — интегральное среднее значение K_O^{n-1} по сфере $S(x_0, r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\}$.

Ввиду следствия 6.1, получаем также следующие следствия из результатов работы [29] для кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Лемма 8.2. *Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна в $x_0 \in \partial D$, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$. Предположим, что*

$$\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x,f)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \tag{8.5}$$

при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$, такая что

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0.

Замечание 8.1. Отметим также, что (8.5) выполнено, в частности, если

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon_0} K_O^{n-1}(x,f)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) < \infty \tag{8.6}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Другими словами, для продолжимости по непрерывности f в точку $x_0 \in \partial D$ достаточно, чтобы интеграл (8.6) сходился для некоторой неотрицательной функции $\psi(t)$, которая локально интегрируема на $(0,\varepsilon_0]$, но имеет неинтегрируемую особенность в нуле.

Говорят, что вещественная функция $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области $D \subset \mathbb{R}^n$, пишут $\varphi \in \mathrm{BMO}(D)$, либо просто $\varphi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|}\int\limits_B |\varphi(x)-\varphi_B|\,dm(x) < \infty, \tag{8.7}$$

где точная нижняя грань в (8.7) берётся по всем шарам B, лежащим в области D, а

$$\varphi_B = \fint_B \varphi(x)\,dm(x) := \frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi(x)\,dm(x) \tag{8.8}$$

обозначает среднее интегральное значение функции φ по шару B.

Пространство BMO, введенное Джоном и Ниренбергом в работе [16], на сегодняшний день является одним из важнейших понятий гармонического анализа, комплексного анализа, теории уравнений с частными производными и смежных областей, см. монографии [11] и [39]. В частности, BMO тесно связано с теорией квазиконформных отображений, см., напр., [2–4, 7, 17, 39] и [39].

Следуя [42], говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, сокр. $\varphi \in \mathrm{FMO}(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty\,, \tag{8.9}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$$

– интегральное среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Теорема 8.1. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, $\overline{D'}$ – компакт, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Если $K_O^{n-1}(x,f)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \overline{D}$, то f продолжим в x_0 по непрерывности в $\mathbb{R}^n$.*

Следствие 8.2. *В частности, заключение теоремы 8.1 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_O^{n-1}(x,f)\ dm(x)\ <\ \infty\ . \tag{8.10}$$

Выбирая в лемме 8.2 функцию $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 8.2. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, $\overline{D'}$ – компакт, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Если*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_O^{n-1}(x,f)\, \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{8.11}$$

при $\varepsilon \to 0$, то f продолжим в точку x_0 по непрерывности в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 8.2. Полагая в лемме 8.2 функцию $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, мы можем заменить условие (10.4) более слабым условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{K_O^{n-1}(x,f)\,dm(x)}{\left(|x-x_0|\,\log\frac{1}{|x-x_0|}\right)^n} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{8.12}$$

и (10.2) условием

$$k_{x_0}(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\log\,\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right). \tag{8.13}$$

Мы могли бы здесь привести целую шкалу соответствующих условий логарифмического типа, используя функции $\psi(t) = \frac{1}{(t\,\log\cdots\log 1/t)}$.

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) \;=\; \inf_{\Phi(t)\geqslant\tau} \; t\,. \tag{8.14}$$

Как обычно, inf в (8.14) равен ∞, если множество $t \in [0,\infty]$, таких что $\Phi(t) \geqslant \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей. Кроме того, заметим, что если $h : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая функция, то

$$(\varphi\circ h)^{-1} \;=\; h^{-1}\circ\varphi^{-1}\,. \tag{8.15}$$

Замечание 8.3. Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \;\leqslant\; t \qquad \forall\, t\in[0,\infty] \tag{8.16}$$

с равенством в (8.16), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Напомним, что функция $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ называется *выпуклой,* если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \;\leqslant\; \lambda\,\Phi(t_1) \;+\; (1-\lambda)\,\Phi(t_2)$$

при всех t_1, $t_2 \in [0,\infty]$ и $\lambda \in [0,1]$.

Теорема 8.3. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на границе, а D' имеет сильно достижимую границу и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если*

$$\int\limits_D \Phi\left(K_O^{n-1}(x,f)\right) dm(x) < \infty \tag{8.17}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, такой что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{8.18}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, то f имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Условие (8.18) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (8.17), см., напр., замечание 5.1 в работе [20].

9. Продолжение на границу обратных отображений

Следующая лемма о предельных множествах лежит в основе доказательства теоремы о продолжении на границу обратных гомеоморфизмов с конечным искажением. Эта лемма вытекает из леммы 9.1 в статье [19], см. лемму 9.5 в монографии [32], а также леммы 6.1.

Лемма 9.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, z_1 и z_2 — различные точки ∂D, $z_1 \neq \infty$, а $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. Предположим, что функция K_O является $(n-1)$-интегрируемой на множествах*

$$D(r) = \{x \in D : |x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r) \tag{9.1}$$

для некоторого множества E чисел $r < |z_1 - z_2|$, имеющего положительную линейную меру. Если D локально связна в точках z_1 и z_2, а $\partial D'$ является слабо плоской, то

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing. \tag{9.2}$$

Из леммы 9.1 непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 9.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на своей границе, а граница области D' является слабо плоской и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_O \in L^{n-1}(D)$. Тогда отображение f^{-1} имеет продолжение в замыкание области $\overline{D'}$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Действительно, ввиду теоремы Фубини, множество

$$E = \{r \in \mathbb{R} : K_O|_{D(r)} \in L^{n-1}(D(r))\} \tag{9.3}$$

имеет положительную лебегову меру, поскольку $K_O \in L^{n-1}(D)$. $\Box$

Замечание 9.1. Из приведенного доказательства следует, что в теореме 9.1 достаточно предполагать, что функция K_O является $(n-1)$-интегрируемой лишь в окрестности границы области D, и мы можем применить лемму 9.1.

Кроме того, ввиду леммы 6.1, по теореме 9.2 в [19], см. также теорему 9.7 в [32], мы получаем справедливость следующего заключения.

Теорема 9.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на своей границе, а граница области D' является слабо плоской. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$ и, кроме того,*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\| K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{9.4}$$

при некотором $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, где величина $\| K_O\|_{n-1}(x_0, r)$ определена в (8.3). Тогда отображение f^{-1} продолжается в замыкание области D' по непрерывности в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

10. Гомеоморфное продолжение на границу

Комбинируя результаты предыдущих двух разделов, получаем следующие теоремы.

Теорема 10.1. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, область D локально связна на своей границе, а область D' имеет слабо плоскую границу. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\| K_O\|_{n-1}(x_0,r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D, \tag{10.1}$$

где величина $\|K_O\|_{n-1}(x_0,r)$ определена в (8.3) при некотором $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$. Тогда отображение f имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Следствие 10.1. *В частности, заключение теоремы 10.1 верно, если*

$$k_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{10.2}$$

при $r \to 0$, где $k_{x_0}(r)$ — интегральное среднее значение K_O^{n-1} по сфере $S(x_0,r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\}$.

В качестве следствия из теоремы 10.1, мы получаем обобщение хорошо известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями, см. [9].

Следствие 10.2. *Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, отображение $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Если условие (10.1) выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Лемма 10.1. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, и пусть $f : D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_O \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Предположим, что*

$$\int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} K_O^{n-1}(x,f)\cdot \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \quad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{10.3}$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, *где* $\psi(t)$ — *неотрицательная измеримая функция на* $(0,\infty)$, *такая что*

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\,.$$

Тогда f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Выбирая в лемме 10.1 функцию $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 10.2. *Пусть* D *и* D' — *ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D *локально связна на границе,* $\partial D'$ — *слабо плоская, и пусть* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} K_O^{n-1}(x,f)\,\frac{dm(x)}{|x-x_0|^n} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad \forall\, x_0 \in \partial D \quad (10.4)$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Теорема 10.3. *Пусть* D *и* D' — *ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D *локально связна в* $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ — *слабо плоская, и пусть* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,n-1}_{\rm loc}$ *с* $K_O \in L^{n-1}_{\rm loc}(D)$. *Если* $K_O^{n-1}(x,f) \leqslant Q(x)$ *п.в., где* $Q \in FMO(\partial D)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Следствие 10.3. *В частности, заключение теоремы 10.3 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_O^{n-1}(x,f)\,dm(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in \partial D\,. \qquad (10.5)$$

Теорема 10.4. *Пусть* D *и* D' — *ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D *локально связна на границе, а* D' *имеет слабо плоскую границу и пусть* $f : D \to D'$ — *гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Если*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(K_O^{n-1}(x,f)\right) dm(x) < \infty \qquad (10.6)$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, *такой что*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{10.7}$$

при некотором $\delta > \Phi(0)$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Заметим, что условие (10.7) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (10.6) (см., напр., [20]).

Литература

[1] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях* // Укр. мат. вiсник, **8** (2011), No. 3, 319–342; transl. in J. Math. Sci., **181** (2012), No. 1, 1–17.

[2] Andreian Cazacu C., Stanciu V., *BMO-mappings in the plane. Topics in analysis and its applications*, 11-30, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 147, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[3] K. Astala, *A remark on quasiconformal mappings and BMO-functions* // Michigan Math. J., **80** (1983), 209–212.

[4] K. Astala, F. W. Gehring, *Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmfiller space* // J. Analyse Math., **46** (1986), 16–57.

[5] M. Csörnyei, S. Hencl, J. Maly, *Homeomorphisms in the Sobolev space* $W^{1,n-1}$// J. Reine Angew. Math., 644 (2010), 221–235.

[6] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987.

[7] F. W. Gehring, *Characteristic Properties of Quasidisks*, Les presses de l'Universite de Montreal, 1982.

[8] F. W. Gehring, O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 272 (1959), 3–8.

[9] F. W. Gehring, O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. Anal. Math., **45** (1985), 181–206.

[10] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, **26**, Springer, New York etc., 2012.

[11] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford–New York–Tokio, 1993.

[12] А. А. Игнатьев, В.И. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. мат. вiсник, **2** (2005), № 3, 395–417; transl. in Ukrainian Math. Bull., **2** (2005), № 3, 403–424.

[13] А. А. Игнатьев, В.И. Рязанов, *К теории граничного поведения пространственных отображений* // Укр. мат. вiсник, **3** (2006), № 2, 199–211; transl. in Ukrainian Math. Bull., **3** (2006), № 2, 189–201.

[14] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

[15] T. Iwaniec, V. Šverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.

[16] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[17] P. W. Jones, *Extension theorems for BMO* // Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 41–66.

[18] Д. Ковтонюк, В. Рязанов, *К теории границ пространственных областей* // Труды ИПММ НАН Украины, **13** (2006), 110–120.

[19] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. мат. вiсник, **5** (2008), № 2, 159–184; transl. in Ukr. Math. Bull. **5** (2008), no. 2, 157–181.

[20] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *On the boundary behavior of generalized quasi-isometries* // J. Anal. Math., **115** (2011), 103–119.

[21] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *On the theory of mappings with finite area distortion* // J. Anal. Math., **104** (2008), 291–306.

[22] D. Kovtonyuk, I. Petkov, V. Ryazanov, *On the boundary behaviour of solutions to the Beltrami equations* // Complex Var. Elliptic Equ., **58** (2013), no. 5, 647–663.

[23] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанова, Р. Р. Салимов, *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами* // Алгебра и анализ, **25** (2013), № 4, 101–124; transl. in St. Petersburg Math. J., **25** (2014), No. 4, 587–603.

[24] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанова, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), № 6, 50–102; transl. in St. Petersburg Math. J., **25** (2014), no. 6, 929–963.

[25] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On mappings in the Orlicz–Sobolev classes* // Annals of the University of Bucharest (mathematical series), **3 (LXI)** (2012), 67–78.

[26] Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева* (под общей ред. Рязанова В.И.), Наукова думка, Киев, 2013.

[27] К. Куратовский, *Топология 1*, Мир, Москва, 1966.

[28] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer–Verlag, New York, 1973.

[29] Т. В. Ломако, *О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу* // Укр. мат. журн., **61** (2009), № 10, 1329–1337.

[30] J. Maly, O. Martio, *Lusin's condition* (N) *and mappings of the class* $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math., **485** (1995), 19–36.

[31] D. Menchoff, *Sur les differencelles totales des fonctions univalentes* // Math. Ann., **105** (1931), 75–85.

[32] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer, New York etc., 2009.

[33] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **30** (2005), 49–69.

[34] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Q-homeomorphisms* // Contemporary Math., **364** (2004), 193–203.

[35] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Ленинград: ЛГУ, 1985.

[36] R. Nakki, *Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., **484** (1970), 1–50.

[37] С. П. Пономарёв, *Об* N*-свойстве гомеоморфизмов класса* W_p^1 // Сиб. матем. журн., **28** (1987), № 2, 140–148.

[38] T. Rado, P.V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[39] H. M. Reimann, T. Rychener, *Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings* // Comment. Math. Helv., **49** (1974), 260–276.

[40] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[41] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. мат. вiсник, **4**, (2007), N 2, 199–234.

[42] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. матем. журн., **48** (2007), № 6, 1361–1376; transl. in Siberian Math. J., **48** (2007), no. 6, 1093–1105.

[43] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Integral conditions in the mapping theory* // Укр. мат. вiсник, **7** (2010), № 1, 73–87; transl. in Math. Sci. J., **173** (2011), No. 4, 397–407.

[44] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equation* // J. Anal. Math., **96** (2005), 117–150.

[45] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

[46] J. Serrin, *On the differentiability of functions of several variables* // Arch. Rational Mech. Anal., **7** (1961), 359–372.

[47] V. Tengvall, *Differentiability in the Sobolev space* $W^{1,n-1}$ // Calc. Var. Partial Differential Equations, **51** (2014), no. 1–2, 381–399.

[48] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer–Verlag, Berlin, 1971.

[49] J. Väisälä, *On quasiconformal mappings in space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., 298 (1961), 1–36.

Сведения об авторах

Елена Сергеевна Афанасьева
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: `es.afanasjeva@gmail.com`

Владимир Ильич Рязанов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: `vl.ryazanov1@gmail.com`

Руслан Радикович Салимов
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `ruslan.salimov1@gmail.com`