Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 132 – 148

Апроксимативні характеристики функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

Сергій Я. Янченко, Сергій А. Стасюк

(*Представлена С. Я. Махном*)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < q < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції Ω.

We obtain order estimates of approximation of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < q < \infty$, by entire functions of exponential type with supports of their Fourier transforms in sets generated by the level surfaces of a function Ω.

2010 MSC. 41A25, 42A35.

Ключові слова та фрази. Простори Нікольського–Бєсова, мішаний модуль неперервності, найкраще наближення, ціла функція експоненціального типу, перетворення Фур'є.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик

У статті продовжено дослідження апроксимативних характеристик функцій з класів Нікольського–Бєсова $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ [1, 2]. Встановлено точні за порядком оцінки наближення таких функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції Ω у випадку, коли $1 < p < q < \infty$.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$,

Стаття надійшла в редакцію 07.04.2018

позначимо простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q} := \|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty} := \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо різницю l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, за змінною x_j з кроком h_j, яка визначається таким чином:

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ..., x_d).$$

Також означимо мішану кратну різницю l-го порядку функції f з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$:

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d} \big(\Delta^l_{h_{d-1}} ... (\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x})) \big).$$

Мішаний модуль неперервності порядку l функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначається згідно з формулою

$$\Omega_l(f, \boldsymbol{t})_q := \sup_{|\boldsymbol{h}| \leqslant \boldsymbol{t}} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\cdot)\|_q,$$

де $|\boldsymbol{h}| = (|h_1|, ..., |h_d|)$, а нерівності типу $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_d)$ та $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_d)$ тут і надалі розуміємо покоординатно, тобто $a_j \leqslant b_j$ ($a_j > b_j$), $j = \overline{1, d}$. Також будемо використовувати запис $\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0}$, якщо $t_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$.

Нехай $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, яка визначена і неперервна на $\mathbb{R}^d_+$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{0}$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неспадна за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Додатково будемо вимагати, щоб функція Ω задовольняла умови (S^α) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [3]. Сформулюємо їх:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S^α), якщо існує таке $\alpha > 0$, що $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує таке γ, $0 < \gamma < l$, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Будемо вважати, що Ω задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо Ω задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при всіх фіксованих значеннях змінних t_i, $i \neq j$. У випадку, коли для Ω виконана умова (S^α), будемо говорити, що Ω належить множині S^α, а якщо умова (S_l), то — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції ω однієї змінної), використовуватимемо запис $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $(\omega \in \Phi_{\alpha,l})$, $l \in \mathbb{N}$, де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{при} \quad t_j > 0, \ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{при} \quad \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1;\ \log_2 \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, ..., d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e := \{j_1, ..., j_m\}$, $m \leqslant d$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < ... < j_m \leqslant d$, $\boldsymbol{t}^e = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_m})$, $\bar{\boldsymbol{t}}^e := (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d)$, де

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_i, & i \in e, \\ 1, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S^\Omega_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ для $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ і $\Omega \in \Psi_l$ означаються таким чином (див., наприклад, [1])

$$S^\Omega_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \ \|f\|_{S^\Omega_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^\Omega_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_p + \sum_{\substack{e \subset e_d \\ e \neq \varnothing}} \left(\int\limits_0^2 \cdots \int\limits_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, \boldsymbol{t}^e)_p}{\Omega(\bar{\boldsymbol{t}}^e)} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, та

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_p + \sum_{\substack{e\subset e_d\\ e\neq\varnothing}} \sup_{\boldsymbol{t}^e>\boldsymbol{0}} \frac{\Omega_{l^e}(f,\boldsymbol{t}^e)_p}{\Omega(\bar{\boldsymbol{t}}^e)},$$

де

$$\Omega_{\boldsymbol{l}^e}(f,\boldsymbol{t}^e)_q := \sup_{|\boldsymbol{h}^e|\leqslant \boldsymbol{t}^e} \|\Delta^{\boldsymbol{l}^e}_{\boldsymbol{h}^e} f(\boldsymbol{x})\|_q, \quad \boldsymbol{h}^e := (h_{j_1},\ldots,h_{j_m}),$$

$$\Delta^{\boldsymbol{l}^e}_{\boldsymbol{h}^e} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_{j_m}}\big(\Delta^l_{h_{j_{m-1}}}...(\Delta^l_{h_{j_1}} f(\ldots,x_{j_1},\ldots,x_{j_m},\ldots))\big).$$

Зауважимо, що простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням відомих просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ [4, 5], що визначаються при явному заданні функції Ω, а саме $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$. Нагадаємо, що простори $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d) = S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ були вперше розглянуті С. М. Нікольським [4], простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, при $1 \leqslant \theta < \infty$ були введені Т. І. Амановим [5] (див. також [6]). Надалі будемо використовувати скорочені позначення $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H$ відповідно для $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$.

Дослідження класів Нікольського–Бєсова з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$, з точки зору знаходження порядкових оцінок деяких апроксимативних характеристик проводилися, зокрема, у роботах Wang Heping і Sun Yongsheng [7], Wang Heping [8]. З основними результатами щодо дослідження класів Нікольського–Бєсова з домінуючою мішаною похідною у періодичному випадку можна ознайомитися в монографії В. Н. Темлякова [9], якщо $\theta = \infty$ (для класів Нікольського), та у монографії А. С. Романюка [10], якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ (для класів Бєсова). На даний час є значний інтерес до дослідження різних аналогів класів Нікольського–Бєсова, які визначаються гладкісним параметром Ω, що підпорядкований деяким додатковим умовам: Н. Н. Пустовойтов [11, 12], Wang Heping і Sun Yongsheng [13], Liqin Duan [14] та ін.

В [1] встановлено еквівалентне нормування лінійних просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ опосередковано через, так зване, декомпозиційне представлення елементів цих просторів (див. нижче Теорему 1.1). Зазначимо, що для просторів Нікольського–Бєсова функцій мішаної гладкості, вперше декомпозиційне представлення та відповідне йому нормування з'явилося у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [15] і, як з'ясувалося пізніше, відіграло ключову роль у дослідженнях, які пов'язані з апроксимацією класів функцій. Оскільки у формулюванні результату з [1], щодо нормування простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, присутні величини, які означаються за допомогою перетворення Фур'є функцій, що визначені на $\mathbb{R}^d$, то наведемо відповідні означення.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $\left(x_1^2 + \ldots + x_d^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ (див., наприклад, [16]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції повільного росту. Якщо $f \in S'$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення функціонала f на пробній функції $\varphi \in S$.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається згідно з формулою:

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Обернене перетворення Фур'є задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є (обернене перетворення Фур'є) узагальнених функцій $f \in S'$ визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S,$$

$$(\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in S).$$

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Також будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Зазначимо, що для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі, для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо множину

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} := Q^*(\boldsymbol{s}) := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) : \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j},$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1, d} \Big\},$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1$, $t > 0$.

Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через $\chi_{\mathcal{A}}$ характеристичну функцію множини $\mathcal{A}$ і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F}f\big).$$

Теорема 1.1. [1] *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. *Функція* f *належить простору* $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\{\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant\mathbf{0}} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left\{\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant\mathbf{0}} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1.1}$$

де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Функція f *належить простору* $S^{\Omega}_{p,\infty}B$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{\boldsymbol{s}\geqslant\mathbf{0}} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\geqslant\mathbf{0}} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}. \tag{1.2}$$

Тут і надалі по тексту для додатних величин A і B використовується запис $A \asymp B$, який означає, що існують такі додатні сталі C_3 та C_4, які не залежать від одного істотного параметра у величинах A і B (наприклад, у вище наведених співвідношеннях (1.1) і (1.2) — від функції f), що $C_3 A \leqslant B \leqslant C_4 A$. Якщо тільки $B \leqslant C_4 A$ $\big(B \geqslant C_3 A\big)$, то пишемо $B \ll A$ $\big(B \gg A\big)$. Всі сталі C_i, $i = 1, 2, ...$, які зустрічаються у роботі, залежать, можливо, лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ будемо розуміти множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leqslant 1$ і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті ж самі позначення, що і для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Перейдемо до означення апроксимативних характеристик.

Нехай $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d_+$ — деяка обмежена множина. Покладемо

$$Q(\mathcal{L}) = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} Q^*(\boldsymbol{s})$$

і позначимо

$$G\big(Q(\mathcal{L})\big) = \Big\{f \in L_q(\mathbb{R}^d) \colon \operatorname{supp}\mathfrak{F}f \subseteq Q(\mathcal{L})\Big\}.$$

Відомо, що елементами множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$ є цілі функції експоненціального типу.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, означимо величину

$$E\big(f, G\big(Q(\mathcal{L})\big)\big)_q := E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q := \inf_{g\in G(Q(\mathcal{L}))} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_q,$$

яка називається найкращим наближенням функції f цілими функціями з множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q(\mathcal{L})}(F)_q = \sup_{f\in F} E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q. \tag{1.3}$$

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$S_{Q(\mathcal{L})} f(\boldsymbol{x}) = S_{Q(\mathcal{L})}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

і означимо

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q := \|f(\cdot) - S_{Q(\mathcal{L})} f(\cdot)\|_q, \quad \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_q := \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q. \tag{1.4}$$

Наші дослідження величин (1.3) та (1.4) проводяться у випадку, коли $F = S^{\Omega}_{p,\theta}B$, а множина $\mathcal{L}$ певним чином пов'язана з функцією Ω.

Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ покладемо

$$\kappa(\Omega, N) := \kappa(N) := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ : \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \geqslant \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(\kappa(N)) := Q(N) =: \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} Q^*(\boldsymbol{s}),$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$.

Зазначимо, що множини $Q(N)$ породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Якщо

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega_1(\boldsymbol{t}) / \prod_{j=1}^{d} t_j^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

і $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, одержимо множини $Q(N)$, які називаються східчастими гіперболічними хрестами.

Зазначимо, що наближення класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій мішаної гладкості тригонометричними поліномами зі спектром у східчастому гіперболічному хресті та у множинах $Q(N)$ розглядалися, зокрема, у роботах [17–23]. З детальною історією питання можна ознайомитися в оглядовій статті [24].

Формулювання допоміжних результатів та доведення основних потребує означення ще деяких множин в $\mathbb{Z}_+^d$.

Покладемо

$$\kappa^{\perp}(\Omega, N) := \kappa^{\perp}(N) := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{N} \right\},$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N) \backslash \kappa^{\perp}(2^l N),$$

тобто

$$\Theta(N) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon \frac{1}{2^l N} \leqslant \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{N} \right\}. \tag{1.5}$$

У [20] показано, що має місце співвідношення

$$|\Theta(N)| \asymp \left(\log_2 N \right)^{d-1}, \tag{1.6}$$

де через $|A|$ позначено кількість елементів скінченної множини A.

Мають місце такі твердження.

Лема 1.1. [20] *Нехай Ω — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умову (S^{α}), $\alpha > 0$. Тоді для $0 < \mu < \infty$*

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}))^{\mu}. \tag{1.7}$$

Лема 1.2. [20] *Нехай Ω — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умову (S^{α}), при $\alpha > \beta > 0$. Тоді для $0 < \mu < \infty$*

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|s\|_1 \beta} \right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|s\|_1 \beta} \right)^{\mu}. \tag{1.8}$$

Як наслідок з (1.7), (1.8), (1.5) та (1.6) для $0 < \mu < \infty$ маємо

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\mu} <$$

$$< \left(\frac{1}{N} \right)^{\mu} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(N)} 1 = \left(\frac{1}{N} \right)^{\mu} |\Theta(N)| \asymp \left(\frac{1}{N} \right)^{\mu} \left(\log_2 N \right)^{d-1}. \tag{1.9}$$

Теорема 1.2. (Літтлвуда–Пелі) (див., наприклад, [25, с. 81], [26]) *Нехай задано $1 < p < \infty$. Існують такі додатні числа C_5, C_6, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ виконуються співвідношення*

$$C_5\|f\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant C_6\|f\|_p.$$

У подальших міркуваннях нами буде використана лема, яка є аналогом відповідної леми у періодичному випадку [9, гл. 1, § 3].

Лема 1.3. [7] *Нехай задано $1 < p < q < \infty$ і $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^q \, 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < q < \infty$

Наша мета полягає у встановленні порядкових по параметру N оцінок величин $E_{Q(\mathcal{L})}(F)_q$ та $\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_q$ для $F = S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у випадку, коли $\mathcal{L} = \kappa(N)$, при певних обмеженнях на параметри p, q, θ та Ω.

При цьому зазначимо, що при $1 < q < \infty$ і $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ має місце співвідношення (див., наприклад, [15])

$$E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q \leqslant \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q \leqslant C E_{Q(\mathcal{L})}(f)_q, \tag{2.1}$$

де $C \geqslant 1$ — деяка стала.

Теорема 2.1. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, тоді мають місце порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \asymp E_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{2.2}$$

де $a_+ = \max\{0, a\}$.

Зауважимо, що умова $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, з деяким $\alpha > \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ забезпечує те, що для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ маємо $f \in S^{\Omega_1}_{q,\theta}B \subset L_q$, $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \Omega(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{-\beta}$ і $\|f\|_{S^{\Omega_1}_{q,\theta}B} \ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ (див., наприклад, [27]).

Доведення. Спочатку встановимо в (2.2) оцінки зверху. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ і $1 < p < q < \infty$. Тоді, скориставшись співвідношенням (2.1) і лемою 1.3, можемо записати

$$E_{Q(N)}(f)_q \asymp \mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q = \Big\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_q = \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_q$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^q 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.3)$$

Далі розглянемо декілька співвідношень між параметрами q і θ.

1) Нехай $q < \theta$. Тоді, для $1 < \theta < \infty$, застосувавши до (2.3) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$ та співвідношення (1.9), одержуємо

$$E_{Q(N)}(f)_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\times \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \asymp \frac{1}{N} \big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то для $f \in S^{\Omega}_{p,\infty}B$, згідно з означенням, має місце співвідношення $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})$. Тому, скориставшись (1.9), будемо мати

$$E_{Q(N)}(f)_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{q}}$$

$$\asymp \frac{1}{N} \big(\log_2 N\big)^{\frac{d-1}{q}}.$$

2) Нехай тепер $1 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$. Скориставшись нерівністю (див., [28, с. 43]),

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2} \right)^{\frac{1}{v_2}} \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{v_1} \right)^{\frac{1}{v_1}}, \ 0 < v_1 \leqslant v_2 < \infty \ ,$$

беручи до уваги, що $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ та врахувавши (1.5), із (2.3) отримуємо

$$E_{Q(N)}(f)_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\theta} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^{\theta} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})$$

$$\leqslant \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \sup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll \frac{1}{N}.$$

Оцінки зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього при певних значеннях параметрів p, q і θ достатньо вказати функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_q$ співпадають за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$ в (2.2). Спочатку означимо функцію, на основі якої буде здійснюватися побудова таких функцій f.

Для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ покладемо

$$D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+,$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j+1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1}.$$

У роботі [7] показано, що для перетворення Фур'є функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ справедлива рівність

$$\mathfrak{F} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_n(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & a_j^{n-1} < |\lambda_j| < a_j^n, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = a_j^{n-1} \text{ або } |\lambda_j| = a_j^n, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |\lambda_j| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = 1, \\ 0, & |\lambda_j| > 1. \end{cases}$$

Для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}) = D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Зазначимо, що має місце оцінка [7]

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_p \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \tag{2.4}$$

де

$$\rho_+(\boldsymbol{s}) := \Big\{\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_d) :\ \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant k_j < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d}\Big\}.$$

Далі розглянемо декілька випадків у залежності від значень параметрів p, q і θ.

Нехай $\theta = \infty$. Розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_7 \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

При певному виборі сталої $C_7 > 0$ дана функція належить до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ оскільки, скориставшись оцінкою (2.4), можемо записати

$$\|f_1(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} = \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}$$

$$= \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} C_7 \frac{\Big\|\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Big\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \leqslant C_8,\ C_8 > 0.$$

Для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ покладемо

$$\Delta(\boldsymbol{s}) = \Big\{\boldsymbol{x} : 2^{-s_j-1} \leqslant x_j < 2^{-s_j},\ j = \overline{1,d}\Big\},$$

і зауважимо, що $\Delta(\boldsymbol{s}) \cap \Delta(\boldsymbol{s}') = \varnothing$, якщо $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$. Таким чином, беручи до уваги, що $S_{Q(N)}(f_1,\cdot) = 0$, скориставшись теоремою 1.2 та врахувавши, що (див., наприклад, [7])

$$\Big| \sum_{k\in\rho(s)} D_k(x)\Big| = \Big| \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j)\Big| = \Big| \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=\eta(s_j)2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} D_{k_j}(x_j)\Big|$$

$$= \Big| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j}x_j - \sin \eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\Big|,$$

а також (1.5) і (1.6), будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q(N)}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_1)_q = \|f_1(\cdot)\|_q$$

$$\gg \Bigg\| \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg\|_q \geqslant \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \Big| \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \Big|^q d\boldsymbol{x} \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \Big)^q \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \Big| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \Big|^q d\boldsymbol{x} \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Big)^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{2^l N} |\Theta(N)|^{\frac{1}{q}}$$

$$\asymp \frac{1}{N} \big(\log_2 N\big)^{\frac{d-1}{q}}. \tag{2.5}$$

Нехай тепер $1 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$. Розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) := C_9 \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) 2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_k(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{\boldsymbol{s}} \in \Theta(N), \quad C_9 > 0.$$

Згідно з (2.4) маємо

$$\|f_2(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\|_p^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \Bigg(\big(\Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\big)^{-\theta} \big(\Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\big)^{\theta} 2^{-\theta\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Big\|_p^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp \Big(2^{-\theta\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\theta\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \Big)^{\frac{1}{\theta}} = 1,$$

а отже, $f_2 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ при певному значенні сталої C_9.

Врахувавши, що $S_{Q(N)}(f_2,\cdot) = 0$, (2.4) та (1.5), отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_2)_q = \|f_2(\cdot)\|_q$$

$$\gg \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\Bigg\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Bigg\|_q$$

$$\asymp \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \geqslant \frac{1}{2^l N}.$$

У випадку $1 < q < \theta < \infty$ для функції

$$f_3(\boldsymbol{x}) = C_{10}|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

скориставшись співвідношенням (2.4), отримаємо

$$\|f_3(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_3,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\theta}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right.$$

$$\left.\times\Bigg\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Bigg\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_3 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ для деякого значення $C_{10} > 0$.

Враховуючи, що $S_{Q(N)}(f_3,\cdot) = 0$, та провівши міркування, аналогічні до тих, що використовувалися для встановлення оцінки (2.5), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \geqslant \mathcal{E}_{Q(N)}(f_3)_q = \|f_3(\cdot)\|_q \gg \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінки знизу в (2.2) встановлено. Теорему 2.1 доведено. $\square$

На завершення зробимо коментарі щодо одержаних результатів.

Нехай $\omega(\tau)$ — функція однієї змінної, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, і функція типу мішаного модуля неперервності порядку l задається таким чином

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1,\ldots,t_d) = \omega\Bigg(\prod_{j=1}^{d} t_j\Bigg), \quad \Omega \in \Phi_{\alpha,l}, \quad \alpha > 0.$$

При такому вигляді функціонального параметру Ω оцінки величини $E_{\bar{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$, у випадку $1 < p < q < \infty$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, де $\bar{Q}_n = \bigcup\limits_{\|\boldsymbol{s}\|_1 < n} Q(\boldsymbol{s})$, встановлено у роботі [27] і, зокрема, у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < l$ — в [7]. Зазначимо, що в [7] розглядався також випадок, коли $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $j = \overline{1, d}$.

Автори висловлюють вдячність А. С. Романюку та В. С. Романюку за їх увагу до роботи та обговорення одержаних результатів.

Література

[1] S. A. Stasyuk, S. Ya. Yanchenko, *Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness* // Anal. Math., **41** (2015), 311–334.

[2] С. Я. Янченко, *Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у рівномірній метриці* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 12, 1705–1714.

[3] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[4] С. М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера* // Сиб. мат. журн., **4** (1963), No. 6, 1342–1364.

[5] Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$* // Тр. Мат. ин-та АН СССР., **77** (1965), 5–34.

[6] Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Казах. ССР, Алма-Ата, Наука, 1976.

[7] Wang Heping, Sun Yongsheng, *Approximation of multivariate functions with a certain mixed smoothness by entire functions* // Northeast. Math. J., **11** (1995), No. 4, 454–466.

[8] Heping Wang, *Representation and approximation of multivariate function with bounded mixed smoothness by hyperbolic wavelets* // J. Math. Anal. Appl., **291** (2004), 698–715.

[9] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР., **178** (1986), 1–112.

[10] А. С. Романюк, *Аппроксиматиные характеристики классов периодеческих функций многих переменных*, Киев, Ин-тут математики НАН Украины, 2012.

[11] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20** (1994), 35–48.

[12] Н. Н. Пустовойтов, *О поперечниках по Колмогорову классов функций с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **38** (2012), No. 1, 41–64.

[13] Sun Yongsheng and Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та РАН., **219** (1997), 356–377.

[14] Liqin Duan, *The best m-term approximations on generalized Besov classes $\boldsymbol{MB^{\Omega}_{q,\theta}}$ with regard to orthogonal dictionaries* // J. of Approx. Theory, **162** (2010), 1964–1981.

[15] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187** (1989), 143–161.

[16] П. И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **105** (1969), 89–167.

[17] Динь Зунг, *Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами* // Мат. сб., **131(173)** (1986), No. 2(10), 251–271

[18] А. С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q* // Укр. мат. журн., **43** (1991), No. 10, 1398–1408.

[19] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **44** (1992), No. 5, 662–672.

[20] Н. Н. Пустовойтов, *Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности* // Мат. заметки, **65** (1999), No. 1, 107–117.

[21] С. А. Стасюк, *Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$* // Мат. заметки, **87** (2010), No. 1, 108–121.

[22] С. А. Стасюк, *Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\boldsymbol{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **20** (2014), No. 1, 247–257.

[23] Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов, *Оценки поперечников Фурье классов периодических функцй со смешанным модулем гладкосты* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **21** (2015), No. 4, 78–94.

[24] Dinh Dũng, Vladimir N. Temlyakov, Tino Ullrich, *Hyperbolic Cross Approximation*, arXiv:1601.03978v3 [math.NA] 21 Apr 2017.

[25] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1969.

[26] П. И. Лизоркин, *Теорема типа Литтльвуда–Палея для кратных интегралов Фурье* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **89** (1967), 214–230.

[27] С. Я. Янченко, *Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 1, 123–135.

[28] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, М., Изд-во иностр. лит., 1948.

Відомості про авторів

Сергій Якович Янченко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: `Yan.Sergiy@gmail.com`

Сергій Андрійович Стасюк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: `stasyuk@imath.kiev.ua`, `stas.serg.a@gmail.com`