Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 94 – 102

Экстремальная задача для частично неналегающих областей на римановой сфере

Андрей Л. Таргонский, Ирина И. Таргонская

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. Результаты этой работы получены в хорошо известном направление геометрической теории функций комплексного переменного – экстремальным задачам на классах непересекающихся областей. Его начало положено с классической работы Лаврентьева [1], в которой, в частности, был впервые решена задача о произведении конформных радиусов двух непересекающихся областей. Сейчас этот раздел геометрической теории функций комплексного переменного испытывает активное развитие. Основные классические результаты можно найти в работах [2–8]. С некоторыми другими результатами можно ознакомиться в работах [9–13]. Результаты этой работы усиливают некоторые результаты работы [7].

2010 MSC. 30C70, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Inner radius of domain, quadratic differential, radial systems of points, non-overlapping domains, open set, partially non-overlapping domains.

1. Основные определения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множество натуральных, действительных и комплексных чисел, соответственно, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Тогда пусть, $l, m, d \in \mathbb{N}$, причем $m = ld$. Рассмотрим набор натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{l}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{l} m_k = m. \tag{1.1}$$

Системы точек

$$A_{l,d} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} :\ k = \overline{1, l},\ p = \overline{1, m_k}\right\},$$

Статья поступила в редакцию 26.03.2018

будем называть обобщенными (l,d)-равномерно лучевыми системами точек, если $A_{l,d}$ удовлетворяет условию (1.1), и для всех $k=\overline{1,l}$, $p=\overline{1,m_k}$ справедливы соотношения:

$$\begin{array}{l} 0<|a_{k,1}|<\ldots<|a_{k,m_k}|<\infty; \\ \arg a_{k,1}=\arg a_{k,2}=\ldots=\arg a_{k,m_k}=\frac{2\pi}{l}(k-1). \end{array} \tag{1.2}$$

Для произвольной обобщенной (l,d)-равномерно лучевой системы точек $A_{l,d}$ рассмотрим набор областей $\{P_k\}_{k=1}^{l}$, где

$$P_k:=\left\{w\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:\ \frac{2\pi}{l}(k-1)<\arg w<\frac{2\pi}{l}k\right\},\ k=\overline{1,l}.$$

Введем в рассмотрения для произвольной обобщенной (l,d)-равномерно лучевой системы точек $A_{l,d}$ следующий "управляющий", функционал:

$$\mu\left(A_{l,d}\right):=\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k}\left[\chi\left(\left|a_{k,p}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right],$$

где $\chi(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(t+t^{-1}\right).$

Пусть D, $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ — произвольное открытое множество и $w=a\in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту множества D, которая содержит точку a. Для произвольной обобщенной (l,d)-равномерно лучевой системы точек и открытого множества D, $A_{l,d}\subset D$ обозначим через $D_k\left(a_{s,p}\right)$ связную компоненту множества $D\left(a_{s,p}\right)\bigcap\overline{P_k}$, которая содержит точку $a_{s,p}$, $k=\overline{1,l}$, $s=k,k+1$, $p=\overline{1,m_k}$, $a_{l+1,p}:=a_{1,p}$. Обозначим $D_k(0)$ (соответственно $D_k(\infty)$) связную компоненту множества $D(0)\bigcap\overline{P_k}$ (соответственно $D(\infty)\bigcap\overline{P_k}$), содержащую точку $w=0$ (соответственно $w=\infty$).

Будем говорить, что открытое множество D, $A_{l,d}\subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $A_{l,d}$ если:

$$\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k,u})\right]\bigcup$$
$$\bigcup\left[D_k(a_{k+1,s})\bigcap D_k(a_{k+1,u})\right]=\varnothing, \tag{1.3}$$

$k=\overline{1,l}$, $p,s,u=\overline{1,m_k}$, $s\neq u$ для всех углов $\overline{P_k}$.

Открытое множество D, $\{0\}\cup A_{l,d}\subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $\{0\}\cup A_{l,d}$ если:

$$\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup\left[D_k(0)\bigcap D_k(a_{k,p})\right]\bigcup$$
$$\bigcup\left[D_k(0)\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k,u})\right]\bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(a_{k+1,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,u})\Big] = \varnothing, \qquad (1.4)$$

$k = \overline{1,l}$, $p, s, u = \overline{1, m_k}$, $s \neq u$ для всех углов $\overline{P_k}$.

Открытое множество D, $\{\infty\} \cup A_{l,d} \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $\{\infty\} \cup A_{l,d}$ если:

$$\Big[D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,p})\Big] \bigcup \Big[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{k,p})\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{k+1,p})\Big] \bigcup \Big[D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k,u})\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(a_{k+1,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,u})\Big] = \varnothing, \qquad (1.5)$$

$k = \overline{1,l}$, $p, s, u = \overline{1, m_k}$, $s \neq u$ для всех углов $\overline{P_k}$.

Аналогично, открытое множество D, $\{0, \infty\} \cup A_{l,d} \subset D$ удовлетворяет условие неналегания относительно системы точек $\{0, \infty\} \cup A_{l,d}$ если:

$$\Big[D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,p})\Big] \bigcup \Big[D_k(0) \bigcap D_k(a_{k,p})\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(0) \bigcap D_k(\infty)\Big] \bigcup \Big[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{k,p})\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{k+1,p})\Big] \bigcup \Big[D_k(0) \bigcap D_k(a_{k+1,p})\Big] \bigcup$$

$$\bigcup \Big[D_k(a_{k,s}) \bigcap D_k(a_{k,u})\Big] \bigcup \Big[D_k(a_{k+1,s}) \bigcap D_k(a_{k+1,u})\Big] = \varnothing, \qquad (1.6)$$

$k = \overline{1,l}$, $p, s, u = \overline{1, m_k}$, $s \neq u$ для всех углов $\overline{P_k}$.

Систему областей $\{B_k\}_{k=1}^{l}$, будем называть системой частично неналегающих областей относительно системы точек $A_{l,d}$, если

$$D := \bigcup_{k=1}^{l} B_k, \qquad (1.7)$$

и открытое множество D, удовлетворяет условию неналегания (1.3).

Систему областей $B_0 \cup \{B_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \in B_0$, будем называть системой частично неналегающих областей относительно системы точек $\{0\} \cup A_{l,d}$, если

$$D := \bigcup_{k=1}^{l} B_k \bigcup B_0, \qquad (1.8)$$

и открытое множество D, удовлетворяет условию неналегания (1.4).

Систему областей $B_\infty \cup \{B_k\}_{k=1}^n$, $\infty \in B_\infty$, будем называть системой частично неналегающих областей относительно системы точек $\{\infty\} \cup A_{l,d}$, если

$$D := \bigcup_{k=1}^{l} B_k \bigcup B_\infty, \tag{1.9}$$

и открытое множество D, удовлетворяет условию неналегания (1.5).

Систему областей $B_0 \cup B_\infty \cup \{B_k\}_{k=1}^n$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, будем называть системой частично неналегающих областей относительно системы точек $\{0, \infty\} \cup A_{l,d}$, если

$$D := \bigcup_{k=1}^{l} B_k \bigcup B_0 \bigcup B_\infty, \tag{1.10}$$

и открытое множество D, удовлетворяет условию неналегания (1.6).

Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [4–7, 17]).

В этой работе используются основные понятия и результаты теории квадратичных дифференциалов с которыми можно ознакомиться в работе [18].

Для произвольных чисел $l, d \in \mathbb{N}$ пусть $A_{l,d}^{(1)}$ обозначает обобщенную (l, d)-равномерно лучевую систему точек, которые являются полюсами квадратичного дифференциала $Q_1(w)dw^2$, где

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{w^{l-2}\left(1+w^l\right)^{2d-1}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} - \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1}\right]^2}\, dw^2.$$

Пусть $A_{l,d}^{(2)}$ обозначает обобщенную (l, d)-равномерно лучевую систему точек, которые являются полюсами квадратичного дифференциала $Q_2(w)dw^2$, где

$$Q_2(w)dw^2 = \frac{w^{l-2}\left(1+w^l\right)^{2d-1}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1} + \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+1}\right]^2}\, dw^2.$$

Пусть, также, $A_{l,d}^{(3)}$ обозначает обобщенную (l, d)-равномерно лучевую систему точек, которые являются полюсами квадратичного дифференциала $Q_3(w)dw^2$, где

$$Q_3(w)dw^2 = -\frac{w^{l-2}\left(1+w^l\right)^{2d}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+2} - \left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d+2}\right]^2}\, dw^2.$$

Аналогично, $A_{l,d}^{(4)}$ обозначает обобщенную (l,d)-равномерно лучевую систему точек, которые являются полюсами квадратичного дифференциала $Q_4(w)dw^2$, где

$$Q_4(w)dw^2 = -\frac{w^{l-2}\left(1+w^l\right)^{2d-2}}{\left[\left(1-iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d}+\left(1+iw^{\frac{l}{2}}\right)^{2d}\right]^2}\,dw^2.$$

Для систем точек $A_{l,d}^{(1)}$, $A_{l,d}^{(2)}$, $A_{l,d}^{(3)}$, $A_{l,d}^{(4)}$ в случае справедливости соотношений (1.2), имеем $m_k = d$, $k=\overline{1,l}$.

2. Результаты

Предметом изучения данной работы являются следующие задачи.

Пусть $l,m,d \in \mathbb{N}$, причем $m = ld$. Определить максимум функционалов

$$\left(r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{\frac{l^2}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

$$r^{\frac{l^2}{4}}\left(B_\infty,\infty\right)\cdot\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

$$r^{\frac{l^2}{4}}\left(B_0,0\right)\cdot\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

$$\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right),$$

для произвольной обобщенной (l,d)-равномерно лучевой системы точек, $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ – произвольная система частично неналегающих областей, $0\in B_0$, $\infty\in B_\infty$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, и определить все экстремали.

Полученные в работе результаты, переносят результаты работ [12–14] на класс частично неналегающих областей.

Theorem 2.1. *Пусть $l,m,d\in\mathbb{N}$, $m = ld$, $l\geq 2$. Тогда для произвольной обобщенной (l,d)-равномерно лучевой системы точек $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, удовлетворяющей условию* (1.2),

$$\mu\left(A_{l,d}\right)=\mu\left(A_{l,d}^{(3)}\right),$$

с множеством чисел $\{m_k\}_{k=1}^{l}$ *таких, что удовлетворяют* (1.1), *и произвольной системы частично неналегающих областей* $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$, $0 \in B_0, \infty \in B_\infty, a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_0, B_{k,p}, B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющей условию* (1.10), *справедливо неравенство:*

$$\left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{l^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{l} \prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leq \left(\frac{4}{l+m}\right)^{m} \cdot \left(\frac{l}{l+m}\right)^{l} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(3)}\right).$$

Theorem 2.2. *Пусть* $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (l, d)*-равномерно лучевой системы точек* $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, *удовлетворяющей условию* (1.2),

$$\mu\left(A_{l,d}\right) = \mu\left(A_{l,d}^{(2)}\right),$$

с множеством чисел $\{m_k\}_{k=1}^{l}$ *таких, что удовлетворяют* (1.1), *и произвольной системы частично неналегающих областей* $\{B_{k,p}, B_\infty\}$, $\infty \in B_\infty, a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_{k,p}, B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющей условию* (1.9), *справедливо неравенство:*

$$r^{\frac{l^2}{4}}\left(B_\infty, \infty\right) \cdot \prod_{k=1}^{l} \prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq \left(\frac{8}{2m+l}\right)^{m} \cdot \left(\frac{2l}{2m+l}\right)^{\frac{l}{2}} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(2)}\right).$$

Theorem 2.3. *Пусть* $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (l, d)*-равномерно лучевой системы точек* $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, *удовлетворяющей условию* (1.2),

$$\mu\left(A_{l,d}\right) = \mu\left(A_{l,d}^{(1)}\right),$$

с множеством чисел $\{m_k\}_{k=1}^{l}$ *таких, что удовлетворяют* (1.1), *и произвольной системы частично неналегающих областей* $\{B_0, B_{k,p}\}$, $0 \in B_0, a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_0, B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющей условию* (1.8), *справедливо неравенство:*

$$r^{\frac{l^2}{4}}\left(B_0, 0\right) \cdot \prod_{k=1}^{l} \prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq \left(\frac{8}{2m+l}\right)^{m} \cdot \left(\frac{2l}{2m+l}\right)^{\frac{l}{2}} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(1)}\right).$$

Theorem 2.4. *Пусть* $l, m, d \in \mathbb{N}$, $m = ld$, $l \geq 2$. *Тогда для произвольной обобщенной* (l, d)*-равномерно лучевой системы точек* $A_{l,d} = \{a_{k,p}\}$, *удовлетворяющей условию* (1.2),

$$\mu\left(A_{l,d}\right) = \mu\left(A_{l,d}^{(4)}\right),$$

с множеством чисел $\{m_k\}_{k=1}^{l}$ *таких, что удовлетворяют* (1.1), *и произвольной системы частично неналегающих областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющей условию* (1.7), *справедливо неравенство:*

$$\prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq \left(\frac{4}{ld}\right)^{ld} \cdot \mu\left(A_{l,d}^{(4)}\right).$$

3. Доказательства

Доказательство теоремы 2.1. В случае частично неналегающих областей, открытое множество введенное соотношением (1.7), удовлетворяет условию (1.6). Тогда, мы имеем

$$B_0, B_{k,p}, B_\infty \subset D, \quad k = \overline{1,l}, \qquad p = \overline{1,m_k}. \tag{3.1}$$

Из (3.1), используя результаты работ [5, 17], мы получаем

$$r\left(B_0, 0\right) \leq r\left(D, 0\right), \quad r\left(B_\infty, \infty\right) \leq r\left(D, \infty\right),$$

$$r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leq r\left(D, a_{k,p}\right), \quad k = \overline{1,l}, p = \overline{1,m_k}. \tag{3.2}$$

Перемножая неравенства (3.2), можем сделать вывод, что

$$\left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{l^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leq \left(r\left(D, 0\right) \cdot r\left(D, \infty\right)\right)^{\frac{l^2}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{l}\prod_{p=1}^{m_k} r\left(D, a_{k,p}\right).$$

При этом, используя результаты работы [14], получаем окончательный результат. □

Доказательства теорем 2.2, 2.3 и 2.4 аналогичны доказательству теоремы 2.1.

Литература

[1] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М, Наука, 1966.

[3] Г. П. Бахтина, *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Киев, 1975.

[4] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168** (1988), 48–66.

[5] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною* // Успехи мат. наук, **49** (1994), No. 1 (295), 3–76.

[6] В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **237** (1997), 56–73.

[7] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, **73** (2008).

[8] Бахтін О. К. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин* // Укр. мат. журн., **61** (2009), No. 5, 596–610.

[9] A. Targonskii, *Extremal problem* $(2n; 2m-1)$*-system points on the rays* // An. St. Univ. Ovidius Constanta, **24** (2016), No. 2, 283–299.

[10] A. Targonskii, *On the One Extremal Problem with the Free Poles on the Unit circle* // International Journal of Advanced Research in Mathematics, **6** (2016), 26–31.

[11] A. K. Bakhtin, A. L. Targonskii, *Extremal problems and quadratic differential* // Nonlin. Oscillations, **8** (2005), No. 3, 296–301.

[12] A. K. Bakhtin, A. L. Targonskii, *Generalized* (n, d)*-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets* // Ukr. Math. J., **63** (2011), No. 7, 999–1012.

[13] S. A. Ochrimenko, A. L. Targonskii, *Extremal problems for generalized ray systems of points* // Zb. praz. Ins-tu matemat. NANU, **9** (2012), No. 2, 270–284.

[14] A. Targonskii, *Extremal problems on the generalized* $(n; d)$*-equiangular system of points* // An. St. Univ. Ovidius Constanta, **22** (2014), No. 2, 239–251.

[15] A. L. Targonskii, *Extremal problems for partially non-overlapping domains on equiangular systems of points* // Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, **63** 2013, No. 1, 57–63.

[16] A. Targonskii, I. Targonskaya, *On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere* // International Journal of Advanced Research in Mathematics, **4** (2016), 1–7.

[17] В. К. Хейман, *Многолистные функции*, М., Изд-во иностр. лит., 1960.

[18] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Сведения об авторах

Андрей Леонидович Таргонский
Житомирский государственный университет им. Ивана Франка, Житомир, Украина
E-Mail: targonsk@zu.edu.ua

Ирина Игоревна Таргонская
Житомирский государственный университет им. Ивана Франка, Житомир, Украина
E-Mail: targonsk@zu.edu.ua