Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 4, 595 – 604

Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова

Сергій Я. Янченко

(*Представлена С. Я. Махно*)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ від їх відрізків інтеграла Фур'є. Похибка наближення вимірюється у метриці простору $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

2010 MSC. 41A30, 41A50, 41A63.

Ключові слова та фрази. Анізотропні простори Нікольського–Бєсова, ціла функція експоненціального типу, перетворення Фур'є.

1. Вступ

У роботі встановлюються порядкові оцінки деяких апроксимативних характеристик класів функцій багатьох змінних з анізотропних просторів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, де $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, $1 \leqslant p, \ \theta \leqslant \infty$. Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ були введені О. В. Бєсовим [1] і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ — простори, які ввів С. М. Нікольський [2].

Вихідні означення просторів $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ та $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у згаданих роботах були дані в термінах певних обмежень на модулі гладкості функцій з цих просторів. У подальших дослідженнях нам буде зручно користуватися еквівалентним означення просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, яке встановлене П. І. Лізоркіним [3] та базується на використані перетворення Фур'є.

Зауважимо, що анізотропні простори Нікольського–Бєсова функцій багатьох змінних, що визначені на $\mathbb{R}^d$ з точки зору знаходження точних за порядком значень деяких апроксимативних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [4,5], а у випадку $r_1 = \ldots = r_d = r$,

Стаття надійшла в редакцію 07.10.2017

тобто ізотропні простори Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, досліджувалися у роботах [6, 7].

2. Основні позначення та означення класів Нікольського–Бєсова

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $(x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{-\frac{1}{2}}$ (див., наприклад, [8]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi \colon S \to S$ визначається згідно з формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi \colon S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle \quad (\langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1} f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle \quad (\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S згідно з формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, можна розглядати як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Також будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

У подальшому будемо користуватися такими позначеннями. Нехай функція f представлена інтегралом Фур'є

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Тоді відрізком інтегралу Фур'є функції f назвемо вираз

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \dots \int\limits_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

де $\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$ — перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Крім того, для $S_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$ можемо записати (див. [8])

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin \sigma_j (x_j - y_j)}{x_j - y_j} d\boldsymbol{y}.$$

Таким чином $S_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$ — ціла функція степеня $\boldsymbol{\sigma}$.

Нехай $D_{\boldsymbol{a}^s} = D_{a_1^s, \dots, a_d^s}$ — паралелепіпед: $|\lambda_j| < a_j^s$, $j = \overline{1, d}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\Gamma_{\boldsymbol{a}^s} = D_{\boldsymbol{a}^s} - D_{\boldsymbol{a}^{s-1}}$ при $s \geqslant 1$ і $\Gamma_{\boldsymbol{a}^0} = D_{\boldsymbol{a}^0}$. Покладемо

$$f_{\boldsymbol{a}^s} = S_{\boldsymbol{a}^s}(f) - S_{\boldsymbol{a}^{s-1}}(f) = \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, s \geqslant 1,$$

і

$$f_{\boldsymbol{a}^0} = S_{\boldsymbol{a}^0}(f) = \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Представлення функції f у вигляді

$$f = f_{\boldsymbol{a}^0} + \sum_{s=1}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}$$

будемо називати розшаруванням f ($\boldsymbol{a}$-розшаруванням f). У випадку, коли $f \in L_p$, $p > 2$, $S_{\boldsymbol{a}^s}(f)$ розуміють, взагалі кажучи, як результат дії на f деякого оператора, який в образах Фур'є зводиться до множення на характеристичну функцію області $D_{\boldsymbol{a}^s}$ (див. [8, §3, гл. 1]).

Далі для вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, введемо величину

$$g(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j} \right)^{-1}. \tag{2.1}$$

Зауважимо, що при $r_1 = r_2 = \ldots = r_d = r$ маємо $g(\boldsymbol{r}) = r$.

Тоді анізотропні простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ можна означити таким чином [3]:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{2.2}$$

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geqslant 0} b^s \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p < \infty, \tag{2.3}$$

а $b = 2^{g(\boldsymbol{r})}$ і $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1, d}$.

Далі, зберігаючи ті самі позначення, будемо розглядати класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, тобто одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1 \right\}.$$

Крім цього, для спрощення записів, замість $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ будемо використовувати позначення $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p$.

Зазначимо, що при встановленні результатів важливим є те, що простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ зі зростанням значення параметра θ розширюються (див., наприклад, [9, с. 278]), тобто

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta'} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} = H^{\boldsymbol{r}}_p, \quad 1 \leqslant \theta < \theta' \leqslant \infty. \tag{2.4}$$

3. Допоміжні твердження та основний результат

Важливе значення при доведенні одержаного результату відіграє теорема встановлена О. В. Бєсовим [1] (теорема 2.1), яку сформулюємо у такій формі.

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, $\theta' \geqslant \theta$,

$$\kappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j} > 0.$$

Тоді, якщо $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, *то* $f \in B^{\boldsymbol{\rho}}_{p',\theta'}$, *де* $\rho_j = r_j \kappa$, $j = \overline{1,d}$, *і при цьому має місце нерівність*

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{\rho}}_{p',\theta'}} \leqslant C \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}},$$

де C *— деяка константа, яка не залежить від* f.

Наведемо ще одне твердження для цілих функцій експоненціального типу, яке одержане С. М. Нікольським [2], (див., також, [9, с. 150]).

Теорема 3.2. *Якщо* $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, *то для цілої функції експоненціального типу* $g = g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_{p_1}(\mathbb{R}^d)$ *має місце "нерівність різних метрик"*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_k\right)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.1}$$

Далі для функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_\infty = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

яка називається наближенням функції f її $\boldsymbol{a}^n$-відрізками інтеграла Фур'є.

Відповідно для функціонального класу $F \subset L_\infty(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(F)_\infty = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_\infty. \tag{3.3}$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 3.3. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді для* $g(\boldsymbol{r}) > \frac{d}{p}$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_\infty \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)}, \tag{3.4}$$

де $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що виконання умови $g(\boldsymbol{r}) > \frac{d}{p}$, згідно з теоремою 3.1, забезпечує належність функцій $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ до простору $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Доведення. Спочатку отримаємо в (3.4) оцінку зверху. Оскільки (див. (2.4)) $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} = H^{\boldsymbol{r}}_p$, $1 \leqslant \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(H^{\boldsymbol{r}}_p)_\infty$.

Згідно з (2.3) для $f \in H^{\boldsymbol{r}}_p$ маємо $\|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p \ll 2^{-sg(\boldsymbol{r})}$. Тому, скориставшись нерівністю Мінковського, нерівністю (3.1), врахувавши, що $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$ та беручи до уваги (2.1), отримаємо

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_\infty = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_\infty = \Big\| \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f) \Big\|_\infty$$

$$= \Big\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} \Big\|_\infty \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_\infty \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} a_j^s \right)^{\frac{1}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)} \ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(H^{\boldsymbol{r}}_p)_\infty$ встановлено.

Отримаємо тепер в (3.4) оцінку знизу. Оскільки $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 < \theta \leqslant \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1})_\infty$. Іншими словами достатньо оцінити знизу величину $\|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_\infty$ для деякої функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}$.

З цією метою розглянемо функцію (див. [10])

$$g_1(\boldsymbol{x}) = C_1 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $1/p + 1/p' = 1$, $C_1 > 0$ і

$$F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j}$$

та

$$F_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Для перетворення Фур'є функції $F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ справедливе співвідношення (див., наприклад, [11])

$$\mathfrak{F} F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_n(\lambda_j),$$

де

$$\chi_n(\lambda_j)=\begin{cases}1, & a_j^{n-1}<|\lambda_j|<a_j^n,\\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j|=a_j^{n-1} \text{ або } |\lambda_j|=a_j^n,\\ 0 & \text{— в інших випадках,}\end{cases}$$

$$\chi_0(x_j)=\begin{cases}1, & |\lambda_j|<1;\\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j|=1;\\ 0, & |\lambda_j|>1.\end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\lambda})=F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}).$$

Зазначимо, що $F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ — ціла функція з $L_p(\mathbb{R}^d)$, носій перетворення Фур'є якої зосереджений в $\Gamma_{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}$ і крім цього

$$\|F_{\boldsymbol{n}}\|_p \asymp 2^{\frac{dn}{p'}},\ 1<p<\infty. \tag{3.5}$$

В [10] показано, що з деякою константою $C_1>0$ функція g_1 належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$, а саме, згідно з (2.2) та (3.5), маємо

$$\|g_1\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}} \asymp \sum_s 2^{sg(\boldsymbol{r})}\|f_{\boldsymbol{a}^s}(g_1)\|_p$$

$$\asymp \sum_s 2^{sg(\boldsymbol{r})}2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)}\|F_{\boldsymbol{n}}\|_p \ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)}2^{ng(\boldsymbol{r})}2^{\frac{dn}{p'}}=1.$$

Перш ніж перейти до встановлення оцінки знизу в (3.4), одержимо порядок величини

$$\|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty=\left\|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}-\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1}x_j}{x_j}\right\|_\infty. \tag{3.6}$$

Для оцінки зверху будемо мати

$$\|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty=\left\|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}-\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1}x_j}{x_j}\right\|_\infty$$

$$\leqslant\left\|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}\right\|_\infty+\left\|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1}x_j}{x_j}\right\|_\infty$$

$$=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}\left|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}\right|+\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}\left|\prod_{j=1}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1}x_j}{x_j}\right|$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}\Big| + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j}\Big|$$

$$\ll \left(\prod_{j=1}^{d} a_j^n + \prod_{j=1}^{d} a_j^{n-1}\right) = \left(\prod_{j=1}^{d} 2^{ng(\boldsymbol{r})/r_j} + \prod_{j=1}^{d} 2^{(n-1)g(\boldsymbol{r})/r_j}\right)$$

$$= \left(2^{dn} + 2^{d(n-1)}\right) \ll 2^{dn}. \tag{3.7}$$

Оцінюючи $\|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty$ знизу, одержимо

$$\|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty = \Big\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \Big\|_\infty$$

$$\geqslant \Big| \Big\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} \Big\|_\infty - \Big\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \Big\|_\infty \Big|$$

$$\gg \left| \prod_{j=1}^{d} a_j^n - \prod_{j=1}^{d} a_j^{n-1} \right| \gg (2^{dn} - 2^{d(n-1)}) \gg 2^{dn}. \tag{3.8}$$

Співставивши (3.7) і (3.8), можемо записати порядкове співвідношення

$$\|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty \asymp 2^{dn}. \tag{3.9}$$

Оскільки, для функції g_1 має місце співвідношення $S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(g_1) = 0$, то скориставшись (3.9) приходимо до шуканої оцінки знизу

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1})_\infty \geqslant \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(g_1)_\infty = \|g_1 - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(g_1)\|_\infty = \|g_1\|_\infty$$

$$\gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}\|_\infty \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)} 2^{dn} = 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку знизу в (3.4) встановлено. Теорему 3.3 доведено. □

На завершення роботи зробимо деякі коментарі.

Точні за порядком значення величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q$, $1 < p \leqslant q < \infty$ встановлено в [10].

У випадку $r_1 = \ldots = r_d = r$, тобто для ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, оцінку (3.4) встановлено у роботі [7]. В одновимірному випадку ($d = 1$) анізотропні класи Нікольського–Бєсова збігаються з класами Нікольського–Бєсова мішаної гладкості, які досліджувалися у роботах [11, 12].

Зазначимо також, що деякі апроксимативні характеристик ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних досліджувалися, зокрема, у роботах [13–17].

Література

[1] О. В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **60** (1961), 42–81.

[2] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **38** (1951), 244–278.

[3] П. И. Лизоркин, *Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$* // Сиб. мат. журн., **9** (1968), No. 5, 1127–1152.

[4] Jiang Yanjie, Liu Yongping, *Average Widths and Optimal Recovery of Multivariate Besov Classes in $L_p(\mathbb{R}^d)$* // J. of Approx. Theory, **102** (2000), 155–170.

[5] Jiang Yanjie, *Optimal recovery of anisotropic Besov–Wiener classes* // Anal. Math., **28** (2002), 77–88.

[6] С. Я. Янченко, *Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **7** (2010), No. 1, 380–391.

[7] С. Я. Янченко, *Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова у рівномірній та інтегральній метриках* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 10, 1423–1433.

[8] П. И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **105** (1969), 89–167.

[9] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1969.

[10] S. Ya. Yanchenko, *The best approximation of functions from anisotropic Nikol'skii-Besov classes defined in $\mathbb{R}^d$* // Arxiv preprint, arXiv:1703.10699v1, (2017), 11 pp.

[11] Wang Heping, Sun Yongsheng, *Approximation of multivariate functions with a certain mixed smoothness by entire functions* // Northeast. Math. J., **11** (1995), No. 4, 454–466.

[12] С. Я. Янченко, *Наближення класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 8, 1124–1138.

[13] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **61** (2009), No. 4, 513–523.

[14] А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **61** (2009), No. 10, 1348–1366.

[15] Gensun Fang, Fred J. Hickernell, Huan Li, *Approximation on anisotropic Besov classes with mixed norms by standard information* // J. of Complexity, **21** (2005), 294–313.

[16] В. В. Миронюк, *Тригонометричні наближення та колмогорівські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **66** (2014), No. 8, 1117–1132.

[17] В. В. Миронюк, *Поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 8, 1080–1091.

Відомості про авторів

Сергій Якович Янченко

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: `Yan.Sergiy@gmail.com`