Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 2, 265 – 278

Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних

Наталія В. Парфінович

(*Представлена В. П. Моторним*)

Анотація. Нехай E — ідеальна структура в $\mathbb{R}^m$, $L^{\nabla}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$ — простір функцій $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in E$ для кожного $i = 1, ..., m$. Отримані нові точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса $\|D^\alpha f\|_\infty$ функцій $f \in L^{\nabla}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. Досліджені деякі застосування отриманих нерівностей.

2010 MSC. 26D10, 35A23, 41A35.

Ключові слова та фрази. Дробова похідна, нерівності Колмогорова, наближення операторів.

Вступ

Нерівності, що оцінюють норми проміжних похідних функцій однієї або багатьох змінних через норми самих функцій і норми похідних більш високого порядку, відіграють важливу роль в багатьох галузях математики і її застосувань. Особливо важливі непокращувані нерівності такого типу. Для функцій однієї змінної одним з найбільш вагомих результатів є нерівність Колмогорова [1, 2]. Насьогодні відома значна кількість точних нерівностей типу Колмогорова для функці однієї змінної. Огляди результатів в цьому напрямі і подальші посилання можна знайти в [3–8]. Для похідних цілого порядку функцій багатьох змінних таких нерівностей відомо значно менше (див., напр., [9–14]).

В багатьох питаннях аналізу виникає необхідність разом з похідними цілих порядків розглядати і похідні дробових порядків (див., напр., [15]). Деякі відомі точні нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку можна знайти в роботах [16–22 і 23, розд. 2].

Стаття надійшла в редакцію 16.05.2017

ISSN 1810 – 3200.

Задача про точні нерівності типу Колмогорова тісно пов'язана із задачею Стєчкіна про наближення необмеженого оператора обмеженими на заданому класі елементів Q (див. [3; 4; 6, § 7.1].

В даній роботі ми отримаємо нові точні нерівності, що оцінюють L_∞-норму похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞-норму самої функції і норму її градієнта в ідеальній структурі, а також розглянемо деякі суміжні питання.

1. Означення, постановки задач, суміжні результати

Нехай $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) — евклідів простір точок $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $|x| = \big(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\big)^{1/2}$, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ — простір вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Через $L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \le s \le \infty$, позначимо простори функцій $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_s = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s\,dt\right)^{1/s}, & 1 \le s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}^m} |f(t)|, & s = \infty. \end{cases}$$

Похідна Рісса порядку α, $0 < \alpha < 1$, функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначається рівністю (див. [15, розд. 5, § 25, (25.59)])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt,$$

де

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+m/2}}{2^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

— нормуючий множник [15, розд. 5, § 26, (26.7)]. Відзначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [15, розд. 5, § 25, п. 4] дробовий степінь $(-\triangle)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, локально абсолютно неперервної по кожній змінній при майже всіх фіксованих значеннях решти змінних, означені частинні похідні у змісті Соболєва $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ [24, розд. 4, п. 4.1, п. 4.4.4]. Покладемо

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Для $1 \le s \le \infty$ через $L^{\nabla}_{\infty,s} = L^{\nabla}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L_s(\mathbb{R}^m)$ для кожного $i = 1, \ldots, m$. Відзначимо, що якщо $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$, то $|\nabla f| \in L_s(\mathbb{R}^m)$. Через $W^{\nabla}_{\infty,s}$ позначимо клас функцій із $L^{\nabla}_{\infty,s}$ таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$ (тут і скрізь нижче ми пишемо $\|\nabla f\|_s$ замість $\|\,|\nabla f|\,\|_s$).

Лінійний простір $E \subset \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ з нормою $\|\cdot\|_E$ називається ідеальною структурою на $\mathbb{R}^m$ (див. [25, розд. 2, §2]), якщо для будь-яких функцій $f \in E$ і $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ таких, що $|g(x)| \le |f(x)|$ майже скрізь на $\mathbb{R}^m$, випливає, що $g \in E$ і $\|g\|_E \le \|f\|_E$.

Множина $A(E) \subset \mathbb{R}^m$ називається носієм ідеальної структури E, якщо $f(x) = 0$ для всіх $f \in E$ і $x \notin A(E)$.

Через E^1 позначимо асоційований підпростір до E (див. [25, розд. 2, §3]), тобто простір функцій $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$, такий що $\operatorname{supp} g \subset A(E)$ і

$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \le 1}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) g(x)\, dx < \infty.$$

Зрозуміло, що E^1 є ідеальною структурою на $\mathbb{R}^m$ і підпростором в просторі, спряженому до E.

Ідеальні структури утворюють багато важливих просторів, таких як простір $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, простір Орліча [26], простір Лоренца [25], простір Марцинкевича [25] та ін.

В подальшому ми будемо також говорити, що ідеальна структура E є напівінваріантною відносно зсуву, якщо для кожної $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}^m$ виконується $f(\cdot + x) \in E$, а також $\|f(\cdot + x)\|_E = \|f\|_E$.

Нехай F і E — ідеальні структури. Через $L^{\nabla}_{F,E} = L^{\nabla}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in E$, $i = 1, 2, ..., m$ і $|\nabla f| \in E$.

Через $W^{\nabla}_{F,E}$ позначимо клас функцій f із $L^{\nabla}_{F,E}$, для яких $\|\nabla f\|_E := \||\nabla f|\|_E \le 1$. Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, то покладемо $W^{\nabla}_{F,E} = W^{\nabla}_{p,E}$. Якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \le s \le \infty$, то $W^{\nabla}_{F,E} = W^{\nabla}_{p,s}$.

Нехай X і Y — банахові простори, $A : X \to Y$ — оператор (не обов'язково лінійний) з областю визначення $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ — деяка множина. Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ будемо позначати простір лінійних обмежених операторів $S : X \to Y$. Для $N > 0$ покладаємо

$$E_N(A, Q) = \inf_{\substack{S \in \mathcal{L}(X,Y) \\ \|S\| \le N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \tag{1.1}$$

Задача С. Б. Стєчкіна про найкраще наближення оператора A на множині Q лінійними обмеженими операторами полягає в тому, щоб при довільному $N > 0$ знайти величину (1.1), а також вказати екстремальний оператор, тобто оператор, що реалізує точну нижню межу в правій частині (1.1). Постановка цієї задачі і її розв'язання для диференціальних операторів малих порядків представлені в [27]. Огляд подальших результатів і відповідні посилання можна знайти в [3, 4].

Відзначимо, що з результатів [28] випливає, що для $f \in L^{\nabla}_{\infty,\infty}$ мають місце твердження.

Теорема A. *Нехай* $0 < \alpha < 1$. *Тоді для довільної функції* $f \in L^{\nabla}_{\infty,\infty}$ *має місце точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_\infty^{1-\alpha}\,\|\nabla f\|_\infty^\alpha\,, \tag{1.2}$$

де σ_{m-1} — *площа поверхні одиничної сфери* S^{m-1} *простору* $\mathbb{R}^m$.

Нерівність (1.2) *перетворюється на рівність для функції*

$$f_h(t) = \begin{cases} |t| - \dfrac{h}{2}\,, & |t| \le h, \\ \dfrac{h}{2}\,, & |t| > h, \end{cases}$$

де $h > 0$.

Теорема B. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, $N > 0$. *Тоді*

$$E_N(D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,\infty}) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\left(\frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\right)^{1/\alpha} N^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

В [29] отримані непокращувані нерівності типу Колмогорова, що оцінюють $\|D^\alpha f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\nabla f\|_s$ для функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ в адитивній та мультиплікативній формі.

Теорема C. *Нехай* $s > m$ *і* $0 < \alpha < 1 - m/s$. *Тоді для довільної функції* $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ *при кожному* $h > 0$ *виконуються точні нерівності*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Bigg(\|\nabla f\|_s\,\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1}\,h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|f\|_\infty h^{-\alpha}\Bigg) \tag{1.3}$$

і

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}\,\|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}\|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}\,\|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}. \tag{1.4}$$

Нерівності (1.3), (1.4) *перетворюються на рівності для функції* ψ_h, *означеної формулою*

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma \\ -\frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\ \frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & \text{|t|>h.} \end{cases}$$

2. Оцінка зверху норми зрізаної похідної Рісса та її відхилення від D^α

Нехай $h > 0$. Позначимо через B_h множину точок x простору $\mathbb{R}^m$, для яких $|x| \le h$. Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$D_h^\alpha f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

який назвемо зрізаною похідною Рісса. В [28] показано, що D_h^α — обмежений оператор, що діє з $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, і справедлива така

Лема 2.1. *Нехай* $h > 0$ *і* $0 < \alpha < 1$. *Тоді* $\|D_h^\alpha\| = \dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha}$.

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$\frac{1}{|\cdot|^{m-1+\alpha}} \in E^1 \tag{2.1}$$

і

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{\chi_{[-h,h]}}{|\cdot|^{m-1+\alpha}} \right\|_{E^1} = 0. \tag{2.2}$$

Зокрема, якщо $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, одночасне виконання умов (2.1) і (2.2) еквівалентне виконанню нерівностей $s > m$ і $0 < \alpha < 1 - \frac{m}{s}$ (див. [29]).

Для довільної функції $f \in L_{\infty,E}^\nabla$ оцінимо відхилення $|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)|$. Маємо

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \frac{|f(x) - f(x+t)|}{|t|^{m+\alpha}}\, dt.$$

Відзначимо (див., напр., [30, теорема 6.9]), що для майже всіх x

$$|f(x)-f(x+t)| \le \int\limits_0^{|t|} \Big| f_t'\Big(x+\frac{\gamma t}{|t|}\Big)\Big|\, d\gamma \le \int\limits_0^{|t|} \Big|\nabla f\Big(x+\frac{\gamma t}{|t|}\Big)\Big|\, d\gamma, \qquad (2.3)$$

де через f_t' позначено похідну функції f в напрямі $t/|t|$.

Використовуючи (2.3), переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування, отримаємо, що для майже всіх x

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \int\limits_0^{|t|} \frac{\Big|\nabla f\Big(x+\frac{\gamma t}{|t|}\Big)\Big|}{|t|^{m+\alpha}}\, d\gamma\, dt$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h \frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}}\, d\rho \int\limits_0^\rho |\nabla f(x+\gamma x')|\, d\gamma\, dx'$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\, d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}$$

$$\times \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')| \gamma^{m-1} \left(\frac{1}{|\gamma x'|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |\gamma x'|^{m-1}}\right) d\gamma\, dx'$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} |\nabla f(x+y)| \left(\frac{1}{|y|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |y|^{m-1}}\right) dy. \qquad (2.4)$$

Оцінюючи останній інтеграл за допомогою нерівності Гельдера, отримаємо для майже кожного x

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)|$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{E^1}. \qquad (2.5)$$

Отже, справедлива

Лема 2.2. *Нехай $0<\alpha<1$, E — ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (2.1) і (2.2), E^1 — асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $h>0$ і $f \in L_{\infty,E}^\nabla$ справедлива оцінка*

$$\|D^\alpha f - D_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{E^1}.$$

Із лем 2.1 і 2.2 випливає

Лема 2.3. *Нехай виконуються умови леми 2.2. Нехай також*

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha} \quad \text{для} \quad N > 0.$$

Тоді $\|D^\alpha_{h_N}\| = N$ *і*

$$E_N(D^\alpha, W^\nabla_{\infty,E}) \le \sup_{f\in, W^\nabla_{\infty,E}} \|D^\alpha f - D^\alpha_{h_N} f\|_\infty$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h_N^\alpha}\right)_+ \right\|_{E^1}.$$

3. Нерівності Колмогорова: оцінка рівномірної норми похідної Рісса

Із лем 2.1 і 2.2 для $f \in L^\nabla_{\infty,E}$ при виконанні умов (2.1) і (2.2) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha f - D^\alpha_h f\|_\infty + \|D^\alpha_h f\|_\infty$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left\{ \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{E^1} + 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty h^{-\alpha} \right\}. \tag{3.1}$$

Припустимо, що для заданого $h > 0$ існує невід'ємна функція $\psi_h(\gamma)$ така, що $\mathrm{supp}\psi_h = [0, h]$, $\|\psi_h(|\cdot|)\|_E = 1$ і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|y|^{m-1}} \left(\frac{1}{|y|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \cdot \psi_h(|y|)\, dy$$

$$= \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{E^1}. \tag{3.2}$$

Означимо функцію $\varphi_h(t)$ в наступний спосіб

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \psi_h(\gamma)\, d\gamma - \frac{1}{2}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma, & |t| \le h, \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma, & |t| > h. \end{cases} \tag{3.3}$$

Неважко перевірити, що $\varphi_h \in L^\nabla_{\infty,E}$ при будь-якому $h > 0$ і $|\nabla\varphi_h| = |\psi_h(|\cdot|)|$, а значить, і $\|\nabla\varphi_h\|_E = \|\psi_h(|\cdot|)\|_E$.

Зауважимо, що у випадку, коли $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $s > m$, $0 < \alpha < 1-\frac{m}{s}$, функція $\psi_h(\gamma)$ для заданого h існує. Явну конструкцію функції $\varphi_h(t)$ для $0 < s < \infty$ наведено в [29] (див. рівність (2.1)), а для $s = \infty$ в [28] (див. також [29, теорема C]).

Покажемо, що при будь-якому $h > 0$ нерівність (3.1) перетворюється на рівність для функції $f(t) = \varphi_h(t)$. Для цього насамперед покажемо, що функція $D^\alpha\varphi_h$ неперервна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Дійсно, для $f = \varphi_h$ зрізана похідна $D^\alpha_h\varphi_h(x)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і співвідношення (2.3) мають місце при довільному $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, оцінка (2.5) справедлива для будь-якого x. Фиксуючи x, при будь-якому $\delta \in \mathbb{R}^m$ маємо:

$$|(D^\alpha - D^\alpha_h)(\varphi_h(x) - \varphi_h(x+\delta))|$$

$$\leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\|\nabla\varphi_h(\cdot) - \nabla\varphi_h(\cdot+\delta)\|_E \left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}.$$

Оскільки $\|\nabla\varphi_h(\cdot) - \nabla\varphi_h(\cdot+\delta)\|_E \to 0,\ \delta \to 0$, бачимо, що і функція $D^\alpha\varphi_h - D^\alpha_h\varphi_h$ неперервна в $\mathbb{R}^m$. Неперервність $D^\alpha\varphi_h$ встановлена. Звідси випливає, що $\|D^\alpha\varphi_h\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_h(0)|$.

Обчислимо $|D^\alpha\varphi_h(0)|$. Використовуючи означення φ_h, маємо

$$|D^\alpha\varphi_h(0)| = \left|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\varphi_h(0) - \varphi_h(t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{|t|}\psi_h(\gamma)\,d\gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{|t|}\psi_h(\gamma)\,d\gamma\right|.$$

Переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування по ρ і γ в першому доданку, отримаємо

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\left|\int\limits_{S^{m-1}}dx'\int\limits_0^h\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^\rho\psi_h(\gamma)\,d\gamma\right.$$

$$\left. + \int\limits_{S^{m-1}}dx'\int\limits_h^\infty\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^h\psi_h(\gamma)\,d\gamma\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\,d\gamma\int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\,d\gamma\Big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)d\gamma$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\,d\gamma\Big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\int\limits_{B_h}\psi_h(|t|)\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{1}{|t|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)dt+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\,d\gamma\Big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\|\nabla\varphi_h\|_E\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}+2\sigma_{m-1}\|\varphi_h\|_\infty h^{-\alpha}\Big\}.$$

Отже, ми переконались в точності (3.1) за умови існування функції φ_h з умовами (3.2) і (3.3).

Нехай тепер умови (3.2) і (3.3) не виконуються. В цьому випадку для заданого $h>0$ і для кожного $\varepsilon>0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon}\in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E\le 1$, така що

$$\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{|y|^{m-1}}\left(\frac{1}{|y|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\cdot\psi_{h,\varepsilon}(|y|)\,dy>\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_E^1-\varepsilon.$$

Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\psi_{h,\varepsilon}$ невід'ємна і $\mathrm{supp}\psi_{h,\varepsilon}=[0,h]$. Означимо функцію $\varphi_{h,\varepsilon}$ формулою (3.3) з функцією $\psi_{h,\varepsilon}$ замість ψ_h.

Неважко перевірити, що $\varphi_{h,\varepsilon}\in W^\nabla_{\infty,E}$ для довільного $h>0$ і при цьому $|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}|=|\psi_{h,\varepsilon}(|\cdot|)|$, а значить, і $\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E=\|\psi_{h,\varepsilon}(|\cdot|)\|_E$.

Неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}$ в кожній точці $x\in\mathbb{R}^m$ встановлюється аналогічно до відповідного факту для $D^\alpha\varphi_h$.

Обчислимо $|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}(0)|$. Діючи, як при обчисленні $|D^\alpha\varphi_h(0)|$, отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty\ge|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}(0)|$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\int\limits_{B_h}\psi_{h,\varepsilon}(|t|)\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{1}{|t|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)dt+2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Big\}$$

$$> \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Bigg\{\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E \left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1} - \varepsilon$$
$$+2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Bigg\}.$$

Разом з цим, в силу (3.1), виконується нерівність

$$\|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Bigg\{\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E \left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}$$
$$+2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Bigg\}.$$

Враховуючи, що ε — наскільки завгодно мале додатне число, можемо сформулювати теорему.

Теорема 3.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, E — *ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на* $\mathbb{R}^m$, *що задовольняє умови* (2.1) *і* (2.2), E^1 — *асоційований підпростір до* E. *Тоді для довільних* $f \in L^\nabla_{\infty,E}$ *і* $h > 0$ *виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Bigg\{2\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\|f\|_\infty$$
$$+\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}\|\nabla f\|_E\Bigg\}. \qquad (3.4)$$

При виконанні умов (3.2) *і* (3.3) *нерівність* (3.4) *перетворюється на рівність для функції* φ_h, *означеної формулою* (3.3).

4. Найкраще наближення оператора D^α обмеженими операторами

Нехай виконуються умови (3.2) і (3.3). Покладемо $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)N}\right)^{1/\alpha}$ для $N > 0$. Із теореми 3.1 і леми 2.3 випливає, що виконується умова (7.1.12) теореми 7.1.1 із [6] з оператором $D^\alpha_{h_N}$ і функцією φ_{h_N}. Таким чином, справедлива

Теорема 4.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, $N > 0$, E — *ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в* $\mathbb{R}^m$, *що задовольняє умови* (2.1) *і* (2.2), E^1 — *асоційований підпростір до* E. *Тоді при виконанні умов* (3.2) *і* (3.3) *справджується рівність:*

$$E_N(D^\alpha, W^\nabla_{\infty,E}) = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h_N^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}\|\nabla\varphi_{h_N}\|_E.$$

При цьому оператор

$$D^\alpha_{h_N} f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_{h_N}} \frac{f(x)-f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,\; h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}$$

є екстремальним оператором.

5. Нерівності Колмогорова: оцінка норми похідної Рісса в ідеальній структурі

Для $h > 0$ і $f \in L^\nabla_{E,E}$ розглянемо зрізану похідну $D^\alpha_h f$. Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо

$$\|D^\alpha_h\|_E = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x)-f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt \right\|_E$$

$$\leq \frac{2}{d_{m,1}(\alpha)} \|f\|_E \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} = \frac{2\sigma_{m-1}\|f\|_E}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha}.$$

Тепер для функції $f \in L^\nabla_{E,E}$ отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f - D^\alpha_h f\|_E$.

Діючи, як в ланцюжку рівностей (2.4), і використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, отримаємо

$$\|D^\alpha f - D^\alpha_h f\|_E \leq \left\| \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \int\limits_0^{|t|} \frac{\nabla f\left(\cdot + \frac{\gamma t}{|t|}\right)}{|t|^{m+\alpha}} d\gamma dt \right\|_E$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} = \frac{\sigma_{m-1}\|\nabla f\|_E}{(1-\alpha) d_{m,1}(\alpha)} h^{1-\alpha}.$$

Тепер для $\|D^\alpha f\|_E$ можемо написати

$$\|D^\alpha f\|_E \leq \|D^\alpha_h f\|_E + \|D^\alpha f - D^\alpha_h f\|_E$$

$$\leq \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)} \left\{ \frac{2\|f\|_E}{\alpha} h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_E}{1-\alpha} h^{1-\alpha} \right\}. \tag{5.1}$$

Мінімізуючи (5.1) по h, отримаємо мультиплікативну нерівність

$$\|D^\alpha f\|_E \leq \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha) d_{m,1}(\alpha)} \|f\|_E^{1-\alpha} \|\nabla f\|_E^\alpha.$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 5.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, E — *ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в* $\mathbb{R}^m$. *Тоді для довільних* $f \in L^{\nabla}_{E,E}$ *і* $h > 0$ *виконуються нерівності:*
в адитивній формі

$$\|D^\alpha f\|_E \le \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\left\{\frac{2\|f\|_E}{\alpha}h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_E}{1-\alpha}h^{1-\alpha}\right\};$$

в мультиплікативній формі

$$\|D^\alpha f\|_E \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_E^{1-\alpha}\|\nabla f\|_E^{\alpha}.$$

Із теореми 5.1 одразу випливає

Наслідок 5.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, $1 \le s \le \infty$. *Тоді для довільних функції* $f \in L^{\nabla}_{s,s}$ *і* $h > 0$ *виконуються нерівності:*
в адитивній формі

$$\|D^\alpha f\|_s \le \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\left\{\frac{2\|f\|_{L_s}}{\alpha}h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_{L_s}}{1-\alpha}h^{1-\alpha}\right\}; \qquad (5.2)$$

в мультиплікативній формі

$$\|D^\alpha f\|_s \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_s^{1-\alpha}\|\nabla f\|_s^{\alpha}. \qquad (5.3)$$

Нерівності (5.2) *і* (5.3) *є точними для* $s = \infty$.

Зауважимо, що нерівності (5.2) і (5.3) при $s = \infty$ випливають із результатів [28] (див. теорему A).

Література

[1] А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале* // Учен. записки МГУ. Математика, **30** (1939), No. 3, 3–16.

[2] А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале* // Избр. тр. Математика, механика, М., Наука (1985), 252–263.

[3] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, *Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными* // Изв. вузов. Математика, No. 11 (1995), 42–63.

[4] В. В. Арестов, *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи* //Усп. мат. наук, **51** (1996), No. 6, 88–124.

[5] В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев, *Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А.Н. Колмогорова*, М., Наука (1985), 387–390.

[6] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, К., Наукова думка, 2003.

[7] M. K. Kwong, A. Zettl. *Norm inequalities for derivatives and differences* // Lecture notes in mathematics, **1536**, Berlin etc., Springer-Verlag, 1992.

[8] D. S. Mitrinović, J. E. Peĉarić, A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ., 1991.

[9] В. Н. Коновалов, *Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных* // Мат. заметки, **23** (1978), No. 1, 67–78.

[10] А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, *О неравенствах для производных в многомерном случае* // Мат. заметки, **25** (1979), No. 1, 59–74.

[11] О. А. Тимошин, *Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков* // Докл. РАН., **344** (1995), No. 1, 20–22.

[12] В. Г. Тимофеев, *Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных* // Мат. заметки, **37** (1985), No. 5, 676–689.

[13] V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, *Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications* // Multivariate Approximation and Splines, G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz (eds), Birkhuser, Basel, (1997), 1–12.

[14] В. Ф. Бабенко, *О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных* // Доп. НАН України, (2000), No. 5, 7–11.

[15] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Минск, 1987.

[16] С. П. Гейсберг, *Обобщение неравенства Адамара* // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. ЛОМИ, **50** (1965), 42–54.

[17] V. V. Arestov, *Inequalities for fractional derivatives on the half-line* // Approximation theory, Banach Center Publication, PWN, Warsaw, **21** (1979), 19–34.

[18] G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov, *On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line* // Analysis Mathematica, **7** (1981), No. 1, 37–47.

[19] В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова, *О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка* // Вестник Днепропетровского университета. Математика, **6** (2001), No. 3, 16–20.

[20] V. F. Babenko, S. A. Pichugov, *Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables* // East J. Approx., **13** (2007), No. 3, 321–329.

[21] В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, *Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера* // Мат. заметки, **87** (2010), No. 1, 26–34.

[22] V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov, *Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 3, 301–314.

[23] В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова, *Теория аппроксимации и гармонический анализ*, К., Наукова думка, 2010.

[24] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1969.

[25] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, М., Наука, 1978.

[26] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М., Физматгиз, 1958.

[27] С. Б. Стечкин *Наилучшее приближение ограниченных операторов* // Мат. заметки, **1** (1967), No. 2, 137–148.

[28] V. F. Babenko, M. S. Churilova, *Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic* // Banach Journal of Mathematics, **1** (2007), 1–10.

[29] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, *Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения* // Труды УроРАН, **17** (2011), No. 3, 60–70.

[30] Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Новосибирск, Науч. книга, 1998.

Відомості про авторів

Наталія Вікторівна Парфінович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна
E-Mail: `nat-vic-par@i.ua`