Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 1, 33 – 41

Задача о неналегающих полицилиндрических областях с полюсами на границе поликруга

Ирина В. Денега, Ярослав В. Заболотный

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе предлагается обобщение понятия внутреннего радиуса на случай n-мерного комплексного пространства, что позволяет перенести некоторые результаты, известные в случае комплексной плоскости, на $\mathbb{C}^n$.

2010 MSC. 30C75, 32A30.

Ключевые слова и фразы. Обобщенный внутренний радиус области, непересекающиеся полицилиндрические области, лучевые системы точек в пространстве $\mathbb{C}^n$, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина .

1. Введение

Целью данной работы является изучение задачи о произведении степеней обобщенных конформных радиусов полицилиндричних непересекающихся областей с полюсами на границе поликруга. Пространственные аналоги ряда известных результатов о непересекающихся областях на плоскости были получены в работе [1]. Для этого в [1] было обобщено понятие внутреннего радиуса, а именно, введено понятие гармоничного радиуса пространственной области $B \subset \mathbb{R}^n$ относительно некоторой внутренней точки. В работе [1] впервые удалось значительно продвинуться в получении результатов для неналегающих областей в пространственном случае. Далее в [2] был предложен подход, который позволяет перенести некоторые результаты, известные в случае комплексной плоскости, на $\mathbb{C}^n$. В тоже время для случая комплексной плоскости задачи о неналегающих областях представляют достаточно хорошо разработанное направление геометрической теории функций комплексного переменного (см., например, [3–15]).

Статья поступила в редакцию 14.12.2016

ISSN 1810 – 3200.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, действительных и комплексных чисел, соответственно, и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана (расширенная комплексная плоскость). Хорошо известно, что $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C})}_{n-\text{раз}}$, $n \in \mathbb{N}$. $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n-\text{раз}}$ — компактификация пространства $\mathbb{C}^n$ (см., например, [3–5]), где множество бесконечно удаленных точек имеет комплексную размерность $n-1$. Пусть $[D]^n$ — (декартова степень области $D \in \overline{\mathbb{C}}$) обозначает декартово произведение $\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{n-\text{раз}}$, $[d]^n$ — (декартова степень точки $d \in \overline{\mathbb{C}}$) обозначает точку с $\overline{\mathbb{C}}^n$, которая имеет координаты $\underbrace{(d, ..., d)}_{n-\text{раз}}$. Ясно, что $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$. Топология в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводится как в декартовом произведении топологических пространств. В этой топологии $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (см. [3–5]).

Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, где каждая область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, называется полицилиндрической областью в $\overline{\mathbb{C}}^n$ (см., например, [3]). Области B_k, $k = \overline{1, n}$, назовем координатными областями области $\mathbb{B}$.

Пусть B — область из $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть

$$g_B(B, a) = h_{B,a}(z) + \log \frac{1}{|z-a|}$$

— обобщенная функция Грина области B относительно точки $a \in B$. Если $a \to \infty$, тогда

$$g_B(B, \infty) = h_{B,\infty}(z) + \log \frac{1}{|z|}.$$

Величина $r(B, a) := \exp(h_{B,a}(z))$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [6–9]).

Обобщенным внутренним радиусом полицилиндрической области $\mathbb{B}$ относительно точки $\mathbb{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, будем называть величину

$$R(\mathbb{B}, \mathbb{A}) := \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{\frac{1}{n}},$$

где величины $r(B_k, a_k)$, $k = \overline{1, n}$, обозначают внутренние радиусы координатных областей B_k относительно a_k.

При $n = 1$ величина $R(\mathbb{B}, \mathbb{A})$ является обычным внутренним радиусом области $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{U}^n = [U]^n$, где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Обозначим через Γ_n остов полукруга $\mathbb{U}^n$ (см. [7,8]), то есть множество точек $\mathbb{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \subset \mathbb{C}^n$, $|a_s| = 1$, $s = \overline{1,n}$.

Совокупность областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, называется системой непересекающихся областей, если $B_k \cap B_s = \varnothing$, $\ k, s = \overline{1,p}$, $k \neq s$, $p \in \mathbb{N}$.

Система $\{\mathbb{B}_k\}_{k=1}^m$ $\left(\mathbb{B}_k = B_1^{(k)} \times \ldots \times B_n^{(k)},\ k = \overline{1,m}\right)$ называется системой непересекающихся полицилиндрических областей, если при каждом фиксированном p_0, $p_0 = \overline{1,n}$, система областей $\left\{B_{p_0}^{(k)}\right\}$, $k = \overline{1,m}$, есть системою непересекающихся областей на $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Систему точек $\Delta_m := \{a_k\}_{k=1}^m$, $a_k \in \mathbb{C}$, назовем m-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,m}$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_m < 2\pi.$$

Систему точек $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m$ $\left(\mathbb{A}_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n, \quad k = \overline{1,m}\right)$, назовем лучевой в пространстве $\mathbb{C}^n$, если при каждом фиксированном p_0 последовательность $\left\{a_{p_0}^{(k)}\right\}$, $k = \overline{1,m}$, есть m-лучевой системою точек на соответствующей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Будем рассматривать лучевые системы точек в пространстве $\mathbb{C}^n$ следующего вида

$$\begin{gathered}\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m,\ \mathbb{A}_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n, \\ k = \overline{1,m}, \quad a_{p_0}^{(1)} > 0, \quad p_0 = \overline{1,n}, \\ \arg a_{p_0}^{(k)} < \arg a_{p_0}^{(k+1)}, \quad k = \overline{1,m-1}, \quad \arg a_{p_0}^{(m)} < 2\pi.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Введем также следующие обозначения

$$\alpha_{p_0}^{(1)} := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{p_0}^{(2)} - \arg a_{p_0}^{(1)}\right), \quad \alpha_{p_0}^{(2)} := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{p_0}^{(3)} - \arg a_{p_0}^{(2)}\right), \ldots,$$

$$\alpha_{p_0}^{(m)} := \frac{1}{\pi}\left(2\pi - \arg a_{p_0}^{(m)}\right).$$

Одним из основных понятий в настоящей работе есть понятие квадратичного дифференциала (см, например, [10,11]). Пусть $\mathfrak{R}$ — (ориентированная) риманова поверхность (открытая или замкнутая). Будем говорить, что на $\mathfrak{R}$ определен квадратичный дифференциал, если каждому локальному параметру z поверхности $\mathfrak{R}$ сопоставлена некоторая функция $Q(z)$, мероморфная в соответствующей окрестности и удовлетворяющая следующему условию, если z^* — другой локальный параметр для $\mathfrak{R}$ и $Q^*(z^*)$ — такая же функция для z^*, причем окрестности, соответствующие z и z^*, пересекаются, то в общих точках этих окрестностей

$$Q^*(z^*) = Q(z)\left(\frac{dz}{dz^*}\right)^2.$$

Квадратичные дифференциалы будут обозначаться символом $Q(z)dz^2$.

2. Доказательство основного результата

Рассмотрим произведение

$$\mathbb{I}_m(\gamma) = R^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0)\prod_{k=1}^{m} R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{A}_0 = [0]^n = (0,0,\ldots,0)$, $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{0,m}$, $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \{a_p^s\}_{s=1}^m$, $p = \overline{1,n}$ — произвольный набор точек на Γ_n и $\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m$ — непересекающиеся полицилиндрические области в $\overline{\mathbb{C}}^n$. Пусть

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6}\cdot x^{x^2+2-2\delta}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$$x\in(0,2],\quad \delta\in[0,\ 1],\quad F_\delta(x)\subset\overline{\mathbb{C}}.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0,\gamma_0]$, $\gamma_0 = \sqrt[3]{m}$ и $\delta \in [0;\ 0,7]$. Тогда для произвольной лучевой системы точек виду* (1.1) $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \left\{a_p^{(k)}\right\}_{k=1}^m \in \overline{\mathbb{C}}^n$, $p = \overline{1,n}$, *такой, что* $\mathbb{A}_k \in \Gamma_n$, $k = \overline{1,m}$, *и произвольного набора неналегающих полицилиндрических областей* $\mathbb{B}_k$, $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $k = \overline{0,m}$, $\mathbb{A}_0 \in \mathbb{B}_0 \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, *справедливо неравенство*

$$R^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0)\prod_{k=1}^{m} R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta\cdot m}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{m}\prod_{p=1}^{n}\alpha_p^{(k)}\right)^{\frac{\delta}{n}}\cdot\left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

Одной из экстремальных систем есть система

$$\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m = \left\{[B_0^{(0)}]^n, [B_1^{(0)}]^n, [B_2^{(0)}]^n, \ldots, [B_m^{(0)}]^n\right\},$$

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=0}^m = \left\{[0]^n, \left[b_1^{(0)}\right]^n, \left[b_2^{(0)}\right]^n, \ldots, \left[b_m^{(0)}\right]^n\right\},$$

где области $B_k^{(0)}$ и точки $b_k^{(0)}$, $k = \overline{1,m}$, есть, соответственно, круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Доказательство. Сделаем следующее преобразование

$$\mathbb{I}_m(\gamma)=\left[\prod_{p=1}^{n} r\left(B_p^{(0)},a_p^{(0)}\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\prod_{k=1}^{m}\left[\prod_{p=1}^{n} r\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left[\prod_{p=1}^{n}\left[r^{\gamma}\left(B_p^{(0)},a_p^{(0)}\right)\prod_{k=1}^{m} r\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right)\right]\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Обозначим

$$I_p^m(\gamma):=r^{\gamma}\left(B_p^{(0)},a_p^{(0)}\right)\prod_{k=1}^{m} r\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right).$$

Тогда для фиксированного $p=\overline{1,n}$ области $B_p^{(k)}$, $k=\overline{0,m}$, образуют систему неналегающих областей на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, следуя работе [15], для каждого фиксированного $p=\overline{1,n}$ имеем соотношение

$$I_p^m(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_p^{(k)}\right)\left[\prod_{k=1}^{m} r^{\left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma}\left(G_p^{(k)},0\right)r\left(T_p^{(k)},-i\right)r\left(Y_p^{(k)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $G_p^{(k)}$, $T_p^{(k)}$, $Y_p^{(k)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=\frac{\left(4-\left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma\right)w^2-\left(\alpha_p^{(k)}\right)^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2$$

($0\in G_p^{(k)}$, $-i\in T_p^{(k)}$, $i\in Y_p^{(k)}$). Используя методику, развитую в [15], получаем оценку

$$I_p^m(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_p^{(k)}\right)\left[\prod_{k=1}^{m} S\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2},$$

$$S(x)=2^{x^2+6}x^{x^2}(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in[0,2].$$

Используя идеи работ [13–15], мы имеем следующее неравенство

$$I_p^m(\gamma)\leqslant\gamma^{-\frac{\delta m}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_p^{(k)}\right)^{\delta}\left[\prod_{k=1}^{m} F_{\delta}\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2},\ \delta\in[0,\ 0,7].\quad(2.1)$$

Рассмотрим функционал

$$\widetilde{I_p^m(\gamma)} = \gamma^{\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_p^{(k)} \right)^{-\delta} I_p^m(\gamma).$$

Из неравенства (2.1) следует, что

$$\widetilde{I_p^m(\gamma)} \leqslant \left[\prod_{k=1}^{m} F_\delta \left(\alpha_p^{(k)} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, рассмотрим следующую экстремальную проблему

$$\prod_{k=1}^{m} F_\delta(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{m} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_p^{(k)} \sqrt{\gamma}$$

$$0 < x_k \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,7.$$

Пусть $\Psi_\delta(x) = \ln\left(F_\delta(x)\right)$ и $X^{(0)} = \left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{m}$ — произвольная экстремальная точка в рассматриваемой задаче. Согласно работе [13] имеет место утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тогда

$$\Psi'_\delta(x_k^{(0)}) = \Psi'_\delta(x_j^{(0)}),$$

и если некоторое $x_j^{(0)} = 2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)} < 2$,

$$\Psi'_\delta(x_k^{(0)}) \leqslant \Psi'_\delta(x_j^{(0)}) = \Psi'_\delta(2),$$

где $k, j = \overline{1, m}$, $k \neq j$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$,

$$\Psi'_\delta(x) = 2x \ln(2x) + (2 - x)\ln(2 - x) - (2 + x)\ln(2 + x) + \frac{2}{x} - \frac{2\delta}{x}$$

(см. Рис. 1).

Убедимся, что при выше принятых соотношениях будет выполняться условие

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}.$$

Пусть

$$\sigma_1 := \sigma_1(\delta, \gamma) = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} x_k^{(0)}(\delta, \gamma),$$

$$\sigma_0 := \sigma_0(\delta, \gamma) = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} x_k^{(0)}(\delta, \gamma),$$

$\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1, m}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, $\gamma \in (0; \sqrt[3]{m}]$.

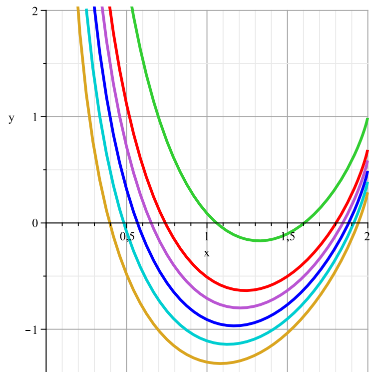

Рис. 1: График функции $y = \Psi'_\delta(x)$ при $\delta \in (0;\, 0,7)$

Функция $\Psi''_\delta(x)$ монотонно возрастает на промежутке $(0, 2)$ при каждом фиксированном δ и существует $x_0(\delta,\gamma) \in (1,084419;\ 1,324661)$ такое, что

$$sign\Psi''_\delta(x) \equiv sign(x - x_0(\delta,\gamma)).$$

Если $\sigma_0 \leqslant x_0(\delta,\gamma)$, тогда в силу строгой монотонности $\Psi'_\delta(x)$ на $[0,\ x_0(\delta,\gamma)]$ и из условий задачи имеем, что $x_1^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}$.

Пусть $x_0(\delta,\gamma) < \sigma_0 \leqslant 1,95$. Тогда

$$\sigma_1 \leqslant \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} x_k^{(0)} = \frac{2\sqrt{\gamma} - \sigma_0}{m-1} \leqslant \frac{2\sqrt[6]{m} - \sigma_0}{m-1}.$$

Отсюда для $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0;\ \sqrt[3]{m}]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, справедливо неравенство

$$\sigma_1 \leqslant (2\sqrt[6]{m} - x_0(\delta,\gamma))/6 \leqslant (2,766175 - 1,08441)/6 < 0,280294.$$

Таким образом,

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,280294) > \Psi'_{0,7}(0,280294) = 0,868846$$

$$> 0,757486 = \Psi'_0(1,95) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Отсюда, $\sigma_0 \notin (x_0(\delta,\gamma);\ 1,95]$.

Далее, пусть $1,95 < \sigma_0 \leqslant 2$. Тогда для $m \geqslant 7$, $\gamma \in (0;\ \sqrt[3]{m}]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$, мы имеем, что $\sigma_1 \leqslant (2\sqrt[6]{m} - 1,95)/6 < 0,136029$. Таким образом,

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0,136029) > \Psi'_{0,7}(0,136029) = 3,596251$$

$$> 1 = \Psi'_0(2) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Отсюда, $\sigma_0 \notin (x_0(\delta,\gamma);\, 2]$. Из всего выше сказанного следует, что для экстремального набора точек $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{m}$ возможен только случай, когда

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_m^{(0)}.$$

Отсюда получаем, что справедливо соотношение

$$\prod_{k=1}^{m} F_\delta\left(\alpha_p^{(k)}\sqrt{\gamma}\right) \leqslant \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^m.$$

Используя последнее неравенство и неравенство (2.1), имеем что для каждого фиксированного $p = \overline{1,n}$ справедливо неравенство

$$I_p^m(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m} \alpha_p^{(k)}\right)^{\delta} \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

Окончательно получаем, что

$$\mathbb{I}_m(\gamma) = \left(\prod_{p=1}^{n} I_p^m(\gamma)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma^{-\frac{\delta m}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m}\prod_{p=1}^{n} \alpha_p^{(k)}\right)^{\frac{\delta}{n}} \left[F_\delta\left(\frac{2}{m}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{m}{2}}.$$

Знак равенства проверяется непосредственно. Теорема 2.1 доказана. □

Литература

[1] В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *Об экстремальном разбиении пространственных областей* // Зап. науч. семин. ПОМИ, **254** (1998), 95–107.

[2] А. К. Бахтин, *Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства* // Доп. НАН України, 3 (2011), 7–11.

[3] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ, Ч.II*, М., Наука, 1976.

[4] Е. М. Чирка, *Комплексные аналитические множества*, М., Наука, 1985.

[5] Б. В. Фукс, *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, М., Физматгиз, 1962.

[6] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

[7] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966.

[8] В. К. Хейман, *Многолистные функции*, М., Изд-во иностр. лит., 1960.

[9] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук., **49** (1994), № 1(295), 3–76.

[10] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАНУ, 2008.

[11] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

[12] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser, Springer, Basel, 2014.

[13] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[14] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **LXII** (2012), No. 2, 83–92.

[15] И. В. Денега, *Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях* // Доп. НАН України, **4** (2012), 15–19.

Сведения об авторах

Ирина Викторовна Денега — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: iradenega@yandex.ru

Ярослав Владимирович Заболотный — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: yaroslavzabolotnii@mail.ru