МЕТОДЫ СИММЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ HELE–SHAW

© Н.В. Васильева

Донецк, Украина

Abstract. The Hele-Shaw problem has studied in the paper. Estimates of both solutions' support and time of their existence have been obtained with the methods of symmetrized.

Задача о течениях Hele-Shaw — это задача Стефана для эллиптического уравнения [1], которая является математической моделью движения вязкой несжимаемой жидкости в щели между двумя фиксированными пластинами. Поскольку эта задача является нелинейной (нелинейность обусловлена наличием свободной границы), то отыскание явного вида решения не всегда возможно. В некоторых случаях достаточно иметь априорные оценки решений или некоторых функционалов, определенных на решениях.

В данной работе показано, как применение методов симметризации позволяет получать оценки размеров носителя решений и времени их существования. Для каждого $t \in [0,T]$ рассмотрим область $\varpi_T = \varpi \times (0,T)$, $\varpi \subset R^n (n \geq 2)$, пусть $B(t)$-компактная подобласть ϖ_T, и функция $p(x,t)$ описывает давление внутри области $d(t) = \varpi_T - B(t)$, здесь $d(t)$-область занятая жидкостью, а $B(t)$-газом. В модельной постановке основным предположением является то, что скорость движения жидкости пропорциональна антиградиенту давления [2]. В задаче требуется найти функцию $p(x,t)$ и вид свободной границы $\partial B(t)$ по следующим условиям:

$$\triangle p = 0 \quad (x,t) \in \quad d(t),$$

$$p|_{\partial\varpi} = 1,$$

$$p|_{\partial B(t)} = 0, \quad v_n|_{\partial B(t)} = -\mu^{-1}\frac{\partial p}{\partial n},$$

где μ- положительная постоянная, n-вектор внутренней единичной нормали к ϖ_T, v_n-скорость движения точек границы $\partial B(t)$ в направлении нормали, $B(0)$-заданная область, $\partial B(0)$- начальное положение неизвестной границы.

Для применения методов симметризации и получения оценок задачу Hele-Shaw удобно рассматривать в слабой постановке: необходимо найти пару функций (p,h), определенных в ϖ_T таких, что выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered}\frac{\partial h}{\partial t} - \triangle p = 0, \quad (x,t) \in \varpi_T, \\ p|_{\sigma_T = \partial\varpi \times (0,T)} = 1, h\,|_{t=0} = h_0,\end{gathered} \tag{1}$$

$h \in \alpha(p)$ почти всюду в ϖ_T, здесь α- строго монотонный граф,

$$\alpha(p) = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ [0,1], & p = 0, \\ 0, & p < 0, \end{cases}$$

h_0 является решением следующей задачи:

$$\triangle h_0 = 0, \quad (x,t) \in \varpi \backslash B(0),$$

$$h_0|_{\partial\varpi} = 1, \quad h_0|_{\partial B(0)} = 0$$

и удовлетворяет условиям: $h_0 \in L^\infty(\varpi)$, $p(0) = b(h_0) = \alpha^{-1}(h_0)$ принадлежит к $H^1(\varpi)$, $0 \le p(0) \le 1$. Граничные и начальные данные таковы, что $0 \le p \le 1$ в ϖ_T.

Будем говорить, что (p,h) является слабым решением (1), если $p \in L^\infty(\varpi_T)$, $h \in L^\infty(\varpi_T)$, $h \in \alpha(p)$ почти всюду в ϖ_T, $\iint\limits_{\varpi_T} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} h + \triangle\phi p\right) dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\varpi} \frac{\partial\phi}{\partial t} dsdt - \int\limits_{\varpi_T} h_0(x)\phi(x,0)dx$ для каждой пробной функции $\phi \in C^1(\overline{\varpi}_T)$, удовлетворяющей условиям: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\overline{\varpi}_T)$, $(i,j=\overline{1,n})$ $\phi = 0$ на $\sigma_T \cup (\varpi \times \{T\})$.

Слабое решение получается как предел классического решения $(p_\varepsilon, h_\varepsilon)$ [3] регуляризованной проблемы

$$\begin{gathered} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial t} - \triangle p_\varepsilon = 0 \quad (x,t) \in \varpi_T, \\ p_\varepsilon|_{\sigma_T} = 1, h_\varepsilon\,|_{t=0} = h_{0\varepsilon}, \end{gathered} \tag{1_ε}$$

$h_\varepsilon \in \alpha_\varepsilon(p)$ почти всюду ϖ_T, здесь α_ε- однозначная гладкая функция, $\alpha_\varepsilon^{'} \ge \delta \ge 0$ (δ не зависит от ε); $b_\varepsilon = \alpha_\varepsilon^{-1}$ равномерно сходится к $b = \alpha^{-1}$; $h_{0\varepsilon}$- гладкая функция, $h_{0\varepsilon} \to h_0$ в $L^1(\varpi_T)$, и $p_\varepsilon = b_\varepsilon(h_{0\varepsilon})$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \le p_\varepsilon(0) \le 1$ в ϖ_T, $p_\varepsilon(0) = 1$ на σ_T, $\int\limits_{\varpi_T} |\nabla p_\varepsilon(0)|^2 dx$- равномерно ограничен по ε, при $\varepsilon \to 0$.

Прежде чем перейти к рассмотрению симметризованой проблемы $\widetilde{(1)}$ (или $\widetilde{(1_\varepsilon)}$), введем следующие обозначения: σ_n- объем единичного шара в R^n, $|E|$- мера Лебега множества E в R^n, $C_A(E)$ - емкость множества E относительно множества A, Ω-открытый шар в R^n с центром в нуле, $|\Omega| = |\varpi|$, $Q = \Omega \times (0,T)$.

Если f- измеримая функция, определенная в ϖ, то обозначим через f_* убывающую перестановку f: $\forall s \in [0,|\varpi|]$, $f_*(s) = \inf\{t \in R, \ |\{f > t\}| \le s\}$, $\widetilde{f}$ -это перестановка f, определенная в Ω, убывающая вдоль радиуса; если f определена в ϖ_T, то мы будем рассматривать ее перестановку по пространственным переменным.

С учетом выше сказанного, симметризованная проблема, соответствующая (1), имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial t} - \triangle P = 0, \quad (s,t) \in Q, \\ P|_{\Sigma_T} = 1, \quad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \quad H\,|_{t=0} = \widetilde{h}_0, \end{gathered} \tag{$\widetilde{1}$}$$

$H \in \alpha(P)$ почти всюду в Q. Симметризованная проблема $(\widetilde{1_\varepsilon})$, соответствующая (1_ε), имеет аналогичный вид.

Используя методы симметризации [4,5], получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Для классических решений* (1_ε) *и* $(\widetilde{1_\varepsilon})$ *для* $\forall(s,t) \in [0,|\varpi|] \times [0,T]$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^s h_{\varepsilon *}(\sigma,t)d\sigma \ge \int\limits_0^s H_{\varepsilon *}(\sigma,t)d\sigma, \tag{2_ε}$$

для слабых решений (1) *и* $(\widetilde{1})$ *имеет место аналогичное неравенство*

$$\int\limits_0^s h_*(\sigma,t)d\sigma \geq \int\limits_0^s H_*(\sigma,t)d\sigma \tag{2}$$

для п.в. $t \in (0,T)$ *и всех* $s \in [0, |\varpi|]$.

Схема доказательства. Заметим, что достаточно доказать оценку (2_ϵ), т.к. неравенство (2) следует из (2_ϵ) после перехода в нем к пределу по ε, как это показано в [4].

Пусть (p_ϵ, h_ϵ)- единственное классическое решение (1_ϵ). По принципу максимума $0 \leq p_\epsilon \leq 1$ всюду в ϖ_T. Тогда при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ имеем

$$0 = \int\limits_{\varpi} \left(\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t} - \triangle p_\epsilon\right)(1-\eta-p_\epsilon)_+ \, dx = \int\limits_{p_\epsilon<1-\eta} \frac{\partial h_\epsilon}{\partial t}(1-\eta-p_\epsilon)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{p_\epsilon<1-\eta} |\nabla p_\epsilon|^2 \, dx$$

для любого $\eta \in (0,1)$. Отсюда, дифференцируя по η (см.[5]), получим

$$0 = \int\limits_{p_\epsilon<1-\eta} \frac{\partial h_\epsilon}{\partial t} dx + \frac{d}{d\eta} \int\limits_{p_\epsilon<1-\eta} |\nabla p_\epsilon|^2 \, dx. \tag{3}$$

Пусть $\mu(\eta) = |\{x \in \varpi : \quad p_\epsilon < 1-\eta\}|$, используя стандартную технику перестановок [6], из (3) получим следующее неравенство:
$n^2\sigma^{2/n}\mu(\eta)^{2-2/n} \leq -\mu'(\eta) \int\limits_{p_\epsilon<1-\eta} \frac{\partial h_\epsilon}{\partial t} dx$ для п.в. $\eta \in (0,1)$.

Пусть $k(s,t) = s - \int\limits_0^s \widetilde{h}_\epsilon(\sigma,t)d\sigma$, используя рассуждения аналогичные в [4], можно показать, что $k(s,t)$ является решением следующей проблемы:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(b_\epsilon\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)\right) + n^{-2}\sigma^{-2/n}s^{-2+2/n}\frac{\partial k}{\partial t} \leq 0 \quad (s,t) \in [0,|\Omega|] \times (0,T),$$

$$\frac{\partial k}{\partial s}(|\varpi|,t) = \alpha_\epsilon(0), \quad k(0,t) = 0,$$

$$k(s,0) = k_{0\epsilon}(s), \quad k_{0\epsilon}(s) = s - \int\limits_0^s h_{0\epsilon}(\sigma)d\sigma.$$

Функция $K(s,t) = s - \int\limits_0^s \widetilde{H}_\epsilon(\sigma,t)d\sigma$ (см.[5]) удовлетворяет условиям:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(b_\epsilon\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right) + n^{-2}\sigma^{-2/n}s^{-2+2/n}\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \quad (s,t) \in [0,|\Omega|] \times (0,T),$$

$$\frac{\partial K}{\partial s}(|\varpi|,t) = \alpha_\epsilon(0), \quad K(0,t) = 0,$$

$$K(s,0) = K_{0\epsilon}(s), \quad K_{0\epsilon}(s) = s - \int\limits_0^s \widetilde{h}_{0\epsilon}(\sigma)d\sigma.$$

Аналогично [4] можно показать, что $k(s,t) \leq K(s,t)$ в $(s,t) \in [0,|\Omega|]\times(0,T)$. Откуда и следует оценка (2_ϵ)

Основными результатами работы являются следствия Теоремы 1. В частном случае, когда $s = |\Omega|$, неравенство (2) преобразовывается к виду

$$|B(t)| \leq |B^*(t)|, \quad \forall t \in [0,T].$$

Используя формулу Грина и свойства емкости, получаем из уравнений в (1) и $(\widetilde{1})$ оценку меры области $B(t)$: $2KC_\Omega(B(0)) - \int\limits_\Omega h_{0\epsilon}dx - \int\limits_0^t C^*(t)dt \geq |B(t)|$ для любого

$t \in [0,T]$, $n \geq 3$, здесь $C^*(t)$- емкость области $B^*(t)$ относительно бесконечности, $|B^*(0)| = |B(0)|$, K- положительная постоянная.

Момент времени t_*, после которого $|B(t)| = 0$, назовем временем "схлопывания". Существует t_1 такое, что $t_* \leq t_1$, где t_1 является решением одного из уравнений

$$KC_\Omega(B(0)) - \frac{\sigma_n}{n}\left[R^n(0) - \{R^2(0) - 2t(n-2)\}^{n/2}\right] = 0, \quad n \geq 3,$$

$$|B^*(t)| = 0, \quad n = 2,$$

здесь $R(0)$- радиус шара $B^*(0)$. Эти рассуждения позволяют получить следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть существует решение проблемы* (1) *для начальной области* $B(0)$ *и любого* $t \in [0,T]$, *тогда с учетом введенных выше определений справедливы следующие утверждения:*

1) $|B(t)| \leq |B^*(t)|, \quad t \in [0,T]$;

2) $KC_\Omega(B(0)) - \frac{\sigma_n}{n}\left[R^n(0) - \{R^2(0) - 2t(n-2)\}^{n/2}\right] \geq |B(t)|$, *для* $n \geq 3$;

$4\pi\left[\frac{R^2(0)}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R}{R(0)}\right) - t\right] \geq |B(t)|$, *для ограниченной области и* $n = 2$;

$\pi\{R^2(0) - 2t\} \geq |B(t)|$, *для неограниченной области и* $n = 2$;

3) $t^* \leq t_1$, *где*

$t_1 = \dfrac{R^2(0) - \left[R^n(0) - C_\Omega(B(0))\frac{n}{\sigma_n}\right]^{2/n}}{2n-4}, n \geq 3$;

$t_1 = \frac{R^2(0)}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R}{R(0)}\right)$, *для ограниченной области и* $n = 2$;

$t_1 = \pi\frac{R^2(0)}{2}$, *для ограниченной области и* $n = 2$,

R-радиус шара Ω.

Список литературы

[1] Базалий Б.В. *Доказательство классической разрешимости задачи Hele-Shaw со свободной границей*, УМЖ, 11, **50** (1998), 1452–1462.

[2] J.M. Elliot, J.R. Ockedon *Weak and variational methods for moving boundary problem*, London, Pitman, (1982).

[3] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва, Наука, (1967).

[4] Gustafsson B., Mossino J. *Isoperimetric inequalities for the Stefan problem*, SIAM j. Math. Anal., 5, **20** (1989), 1095–1108.

[5] Mossino J., Rakotoson J.M. *Isoperimetric inequalities in parabolic equtions* , Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa cl., 4, **13** (1986), 51–73.

[6] Talenti G. *Linear elliptic P.D.E.'S: level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions*, Boll. Unione. Mat. Ital., 3, **B4** (1985), 917-949.

83114, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74.