ИНЕРЦИЯ И ОБРАТНОЕ ДВИЖЕНИЕ НОСИТЕЛЕЙ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ С КОНВЕКЦИЕЙ

© Д.А. Сапронов

Донецк, Украина

Abstract. We find sufficiant conditions for the waiting time phenomenon end for the backward motion of the supports of solutions of Cauchy problems for quasilinear multidimensional degenerate higher order parabolic equations with convectiv term.

В области $G = (0,T)\times\mathbf{R}^n, 0 < T < \infty$, $n \geq 1$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t,x,u,D_x u,\cdots,D_x^m u) + \frac{d}{dx_1}b(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbf{R}^n), \quad supp\, u_0(x) = \mathbf{R}^n_+, \quad q > 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0\}$, а каратеодориевы функции $a_\alpha(t,x,\xi)$ и непрерывная функция $b(t,s)$ удовлетворяют следующим условиям коэрцетивности и роста:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,\xi)\xi_\alpha \geq d_0 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^{p+1} \quad \forall (t,x,\xi) \in G\times\mathbf{R}^{N(m)}, p > 0,\ d_0 > 0, \tag{3}$$

$$|a_\alpha(t,x,\xi)| \leq d_1 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^p \quad \forall (t,x,\xi) \in G\times\mathbf{R}^{N(m)},\ d_1 < \infty, \tag{4}$$

$$|b(t,s)| \leq d_2|s|^\lambda \quad \forall (t,s) \in \mathbf{R}^1_+\times\mathbf{R}^1, d_2 < \infty, \lambda > 0, \tag{5}$$

$$b(t,s)s - \int_0^s b(t,\tau)\,d\tau \geq d_3|s|^{\lambda+1} \quad \forall (t,s) \in \mathbf{R}^1_+\times\mathbf{R}^1, d_3 > 0, \tag{6}$$

где $N(m)$- число различных m-мерных мультииндексов длины не больше, чем m.

Уравнения вида (1) используются для описания достаточно обширного класса физических процессов, в которых присутствует конвективный перенос. Модельным примером, представляющим данный класс, является уравнение нестационарной ньютоновской фильтрации с конвекцией в направлении ox_1:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta u + (|u|^{\lambda-1}u)_{x_1} = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1_+, q > 0, \lambda > 0. \tag{7}$$

Для этого уравнения при $n = 1, 0 < q < 1 < \lambda$ в работе [2] была установлена конечная скорость изменения носителя обобщенного решения задачи Коши.В работе [3] для уравнения (7) при $n = 1$, $0 < q < 1$, $q < \lambda$ найдены точные оценки скорости изменения правого

$$\eta_+(t) = \sup\{x \in \mathbf{R}^1 : u(x,t) > 0\}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35B05, 35K15, 35K57, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Квазилинейные вырождающиеся параболические уравнения, задача Коши, инерция, обратное движение носителя.

и левого

$$\eta_-(t) = \inf\{x \in \mathbf{R}^1 : u(x,t) > 0\}$$

фронтов границы носителя при больших t. В [4] также установлены условия на поведение начальной функции, при которых правый и левый фронты остаются неподвижными в течение некоторого времени (инерция носителя). В этой же работе для уравнения (7) при $n = 1, 0 < \lambda < 1, 0 < \lambda < q$ показано, что при некоторых ограничениях на рост начальной функции левый фронт будет смещаться в направлении конвекции (обратное движение носителя). Случаи, когда отсутствует конечная скорость изменения носителей, рассмотрены в работах [5], [6], [8]. В частности, в [5] доказано, что при $n = 1, 0 < \lambda < 1, 0 < \lambda < q$ правый фронт обращается в бесконечность при всех $t > 0$.

В перечисленных выше работах использовался метод, основанный на построении барьерных функций для решений, а потому непригодный для изучения более общих уравнений. Результаты, содержащиеся в данной работе, установлены с помощью метода, предложенного в [11]. Этот метод основан на априорных оценках типа оценок, выражающих принцип Сен-Венана в теории упругости. В частности, найдены в определенном смысле точные условия на поведение интегральной нормы начальной функции в окрестности ее носителя, достаточные для возникновения конечной или бесконечной инерции носителя энергетического решения. Выведены также условия, обеспечивающие обратное движение носителя и найдены оценки скорости этого движения.

Определение 1. Энергетическим решением задачи Коши мы назовем функцию $u(x,t) \in C(0,T; L_{q+1}(\mathbf{R}^n)) \cap L_{p+1}(0,T; W^m_{p+1}(\mathbf{R}^n)) \cap L_{\lambda+1}((0,T) \times \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\frac{q}{q+1}\int_{\mathbf{R}^n} |u(x,T_0)|^{q+1}\phi(x,T_0)\,dx + \int_{(0,T_0)\times\mathbf{R}^n}\Big[-\frac{q}{q+1}|u(x,t)|^{q+1}\phi'_t(x,t)+$$

$$+\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,D_x u,\cdots,D^m_x u)D^\alpha_x(u\cdot\phi) - \Big(b(t,u)u - \int_0^u b(t,s)\,ds\Big)\phi'_{x_1}(x,t)\Big]\,dx\,dt =$$

$$= \frac{q}{q+1}\int_{\mathbf{R}^n} |u_0(x)|^{q+1}\phi(x,0)\,dx \tag{8}$$

при произвольных $0 < T_0 \le T$, $\phi(x,t) \in C^{m,1}_{x,t}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$, $|\phi(x,t)| \le 1$.

Замечание 1. Существование обобщенного решения задачи Коши для одномерного уравнения ньютоновской фильтрации с конвекцией установлено в работах [1], [5], [6], [7].

Определение 2. Левым фронтом границы носителя решения задачи (1)-(2) назовем следующую функцию:

$$\eta_-(t) = inf\{s : \int_{\{x_1<s\}} |u(x,t)|^{q+1}\,dx > 0\}.$$

Далее будем считать, что $\eta_-(0) = 0$, а через C, c будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от параметров p, q, λ, n, m.

Теорема 1. *Пусть в (1) выполнено одно из двух следующих условий:*

(i) $$\lambda < q < p,$$

(ii) $$\lambda < p < q, \qquad \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)} \le p,$$

а начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующему условию малости:

$$h(s) \equiv \int\limits_{\{x_1<s\}} |u_0|^{q+1}\,dx \le k_1 s^{\alpha_1} \quad \forall 0 < s < s_0, \quad k_1 > 0, \tag{9}$$

$$\alpha_1 = n + \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{p-\lambda}.$$

Тогда существуют постоянные $0 < k_2 < \infty$ и $T_1(s_0) > 0 : T_1(s_0) \to \infty$ при $s_0 \to \infty$ такие, что для энергетического решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2) справедливо

$$\eta_-(t) = 0 \quad \forall 0 < t < T_1, \tag{10}$$

если выполнено соотношение $0 < k_1 < k_2$.

Замечание 2. При $n = m = p = 1$, $\lambda < 1$, $\lambda < q$ условием,достаточным для выполнения (9), является условие вида

$$0 < u_0(x) \le Cx^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \forall x > 0, C < C_0,$$

что соответствует результату,установленному в [4].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существуют такие постоянные $k_3 : 0 < k_3 < k_2$ и $c_1 = c_1(k_1) > 0$, что при выполнении условия (9) с $k_1 = k_3$ для $\eta_-(t)$ выполнено:*

$$\eta_-(t) \ge c_1 t^{\frac{p-\lambda}{m(q-\lambda)(p+1)+p-q}} \quad \forall 0 < t < T_1. \tag{11}$$

Пусть $h_1(s)$-произвольная мажоранта $h(s)$, для которой выполнено условие правильной монотонности:

$$h_1(s(1-\delta_1)) \ge \delta_2 h_1(s) \quad \forall 0 < s < s_0 \tag{12}$$

с некоторыми $0 < \delta_1 < 1$, $0 < \delta_2 < 1$, а $u_0(x)$ удовлетворяет следующему условию малости:

$$h(s) \le h_1(s) < k_3 s^{\alpha_1} \quad \forall 0 < s < s_0. \tag{13}$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\eta_-(t) \ge c_2 f^{-1}(c_3 t) \quad \forall 0 < t < T_1, \quad c_2, c_3 > 0, \tag{14}$$

где f^{-1}-функция, обратная к функции $s^{1-\nu}h_1(s)^\mu$,

$$\nu = \frac{n(q-\lambda)}{n(p-\lambda)+m(p+1)(q+1)}, \qquad \mu = \frac{m(p+1)(q-\lambda)}{n(p-\lambda)+m(p+1)(q+1)}.$$

Замечание 3. При $n = m = p = 1$ оценка (11) совпадает с оценкой, установленной в [4].

Теорема 3. *a) пусть в (1) выполнено $q < p$, $q \le \lambda < q + \frac{p-q}{m(p+1)}$, а начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующему условию малости:*

$$h(s) \le k_4 s^{\alpha_1} \quad \forall 0 < s < s_0, \quad k_4 > 0. \tag{15}$$

Тогда существуют постоянные $k_5 > 0$ и $T_2 = T_2(s_0) > 0 : T_2(s_0) \to \infty$ при $s_0 \to \infty$ такие, что для энергетического решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2) справедливо

$$\eta_-(t) = 0 \quad \forall 0 < t < T_2, \tag{16}$$

если выполнено соотношение $0 < k_4 < k_5$.

b) пусть в (1) выполнено $q < p$, $q + \frac{p-q}{m(p+1)} \le \lambda$, а начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующему условию малости:

$$h(s) \le k_6 s^{\alpha_2} \quad \forall s > 0, \quad k_6 < \infty, \quad \alpha_2 = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-q}. \tag{17}$$

Тогда существует $T_3 = T_3(k_6) > 0$ такое, что для энергетического решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2)

$$\eta_-(t) = 0 \quad \forall 0 < t < T_3. \tag{18}$$

Замечание 4. При $n = m = p = 1$, $q < \lambda < 1 < \frac{1+q}{2}$ и $n = m = p = 1$, $q < 1$, $\frac{1+q}{2} \le \lambda$ достаточными условиями для возникновения инерции являются соответственно условия вида

$$0 < u_0(x) \le C x^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \forall x > 0,\ C < C_0,$$

$$0 < u_0(x) \le C x^{\frac{2}{1-q}} \quad \forall x > 0, C > 0,$$

что соответствует результату, установленнному в [4].

Введем обозначения

$$\Omega(s) = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 < s\}, \quad G_a^b(s) = (a,b) \times \Omega(s), \quad Q_a^b(s,\delta) = G_a^b(s) \backslash G_a^b(s-\delta),$$

$$G(s) = G_0^T(s), \qquad Q(s) = Q_0^T(s).$$

Лемма 1.*Для энергетического решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2) верны следующие соотношения:*

$$\int\limits_{\Omega(s-\delta)} |u(x,T)|^{q+1}\,dx + \int\limits_{G^T_{T-\tau+\omega}(s-\delta)} |D_x^m u|^{p+1}\,dx\,dt + \delta^{-1} \int\limits_{Q^T_{T-\tau+\omega}(s-\frac{\delta}{3},\frac{\delta}{3})} |u|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le$$

$$\le C\Big(\delta^{-m(p+1)} \int\limits_{Q^T_{T-\tau}(s,\delta)} |u|^{p+1}\,dx\,dt + \omega^{-1} \int\limits_{G^{T-\tau+\omega}_{T-\tau}(s)} |u|^{q+1}\,dx\,dt\Big) \equiv R_T(s,\delta,\tau,\omega), \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Omega(s-\delta)} |u(x,T)|^{q+1}\,dx + T^{-1} \int\limits_{G(s-\delta)} |u|^{q+1}\,dx + \int\limits_{G(s-\delta)} |D_x^m u|^{p+1}\,dx\,dt +$$

$$+\delta^{-1} \int\limits_{Q(s-\frac{\delta}{3},\frac{\delta}{3})} |u|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le C\Big(\delta^{-m(p+1)} \int\limits_{Q(s,\delta)} |u|^{p+1}\,dx\,dt + h(s)\Big) \equiv P_T(s,\delta) \tag{20}$$

при произвольных $0 < \delta < s, 0 < \omega < \tau < T$.

Введем следующие функции:

$$I_T(s,\tau) \equiv \int\limits_{T-\tau}^{T} \int\limits_{\Omega(s)} |u(x,t)|^{p+1}\,dx\,dt, \qquad J_T(s,\tau) \equiv \int\limits_{T-\tau}^{T} \int\limits_{\Omega(s)} |u(x,t)|^{q+1}\,dx\,dt,$$

$$I_T(s) \equiv I_T(s,T), \quad J_T(s) \equiv J_T(s,T).$$

Лемма 2. *Пусть в (1) выполнено одно из условий (i),(ii) и $u(x,t)$-энергетическое решение задачи (1)-(2). Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$I_T(s-\delta) \le C P_T(s,\delta)^{\nu_1+\mu_1}\left(\delta^{1-m(p+1)} I_T(s) + s h(s)\right)^{1-\nu_1}, \tag{21}$$

$$I_T(s-\delta) \le C P_T(s,\delta)^{\nu_1+\mu_1}\left(\int_{-\infty}^{s}\left(\delta^{-m(p+1)} I_T(\theta) + h(\theta)\right)\,d\theta\right)^{1-\nu_1}, \tag{22}$$

$$J_T(s-\delta) \le C P_T(s,\delta)^{\nu+\mu}\left(\int_{-\infty}^{s}\left(\delta^{-m(p+1)} I_T(\theta) + h(\theta)\right)\,d\theta\right)^{1-\nu}, \tag{23}$$

$$I_T(s-\delta,\tau-\omega) \le C R_T(s,\delta,\tau,\omega)^{\nu_1+\mu_1} \times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{s}\left(\delta^{-m(p+1)} I_T(\theta,\tau) + \omega^{-1} J_T(\theta,\tau)\right)\,d\theta\right)^{1-\nu_1}, \tag{24}$$

$$J_T(s-\delta,\tau-\omega)\leq CR_T(s,\delta,\tau,\omega)^{\nu+\mu}\left(\int_{-\infty}^{s}\left(\delta^{-m(p+1)}I_T(\theta,\tau)+\omega^{-1}J_T(\theta,\tau)\right)\,d\theta\right)^{1-\nu} \quad (25)$$

при любых $0<\delta<s$, $0<\omega<\tau<T$,

$$\mu_1=\mu\frac{p-\lambda}{q-\lambda},\qquad \nu_1=\nu\frac{p-\lambda}{q-\lambda}.$$

Замечание 5. Неравенство (21) верно также в том случае, когда в (1) выполнено $q\leq\lambda<p$.

Доказательство леммы 2 проводится с использованием интерполяционного неравенства Гальярдо-Ниренберга, неравенств Юнга с "ϵ" и Гельдера, а также соотношений (19)-(20).

Доказательство теоремы 1. Преобразовав неравенство (21), можно показать, что верно следующее соотношение:

$$I_T(s-\delta)\leq C\Big(\delta^{-m(p+1)(1+\mu_1)+1-\nu_1}I_T(s)^{1+\mu_1}+$$

$$+(\delta^{-\gamma_1}I_T(s))^{\nu_1+\mu_1}s^{1-\nu_1+\gamma_2}h(s)^{1-\nu_1}+s^{1-\nu_1}h(s)^{1+\mu_1}\Big), \quad (26)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\mu_1}{m(p+1)(1+\mu_1)-1+\nu_1},\quad \gamma_2=(\nu_1+\mu_1)\frac{m(p+1)-1+\nu_1}{\mu_1}.$$

Полагая в (3.8) $\delta=(2CI(s)^{\mu_1})^{\frac{1}{m(p+1)(1+\mu_1)-1+\nu_1}}$ и подставляя в полученное соотношение неравенство (9), согласно лемме 4 из [10] приходим к утверждению теоремы 1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Введем следующее обозначение:

$$H_T(s,\tau)\equiv C(s^{(1-\nu)(1+\mu_1)}I_T(s,\tau)^{1+\mu}+s^{(1-\nu_1)(1+\mu)}J_T(s,\tau)^{1+\mu_1}). \quad (27)$$

Используя неравенства (24),(25) с учетом результата теормы 1 и монотонности функции $H_T(s,\tau)$ по обоим аргументам,можно показать, что справедливо следующее неравенство:

$$H_T(s-s^{\gamma_3}H_T(s,\tau)^{\gamma_4},\tau-s^{\gamma_5}H_T(s,\tau)^{\gamma_6})\leq\epsilon H_T(s,\tau),\quad 0<\epsilon<1, \quad (28)$$

$$\gamma_3=\frac{(1-\nu_1)(1+\mu)-\mu_1(1-\nu)(1+\mu_1)}{m(p+1)(1+\mu)(1+\mu_1)},\qquad \gamma_4=\frac{\mu_1}{m(p+1)(1+\mu)(1+\mu_1)},$$

$$\gamma_5=\frac{(1-\nu)(1+\mu_1)-\mu(1-\nu_1)(1+\mu)}{(1+\mu)(1+\mu_1)},\qquad \gamma_6=\frac{\mu}{(1+\mu)(1+\mu_1)}.$$

Используя лемму 3 из [10], из (28) выводим следующее соотношение:

$$u(x,t)\equiv0\quad\forall(x,t)\in\{x_1\leq s-Cs^{\gamma_3}H_T(s)^{\gamma_4},\,t\geq Cs^{\gamma_5}H_T(s)^{\gamma_6}\}. \quad (29)$$

Оценим $H_T(s)$ через $h_1(s)$. Из (22) с учетом результата теоремы 1, леммы 5 из [10], условия правильной монотонности (13) и неравенства (23), получим следующие соотношения:

$$I_T(s)\leq Cs^{1-\nu_1}h(s)^{1+\mu_1}\quad\forall0<s<s_0, \quad (30)$$

$$J_T(s)\leq Cs^{1-\nu}h(s)^{1+\mu}\quad\forall0<s<s_0. \quad (31)$$

Вспоминая определение $H_T(s)$, согласно(30),(31) выводим следующее соотношение:

$$H_T(s)\leq Cs^{(1-\nu_1)(1+\mu)+(1-\nu)(1+\mu_1)}h(s)^{(1+\mu)(1+\mu_1)}\quad\forall s\geq0. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (29), при подходящем выборе k_3 получим

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geq Cs^{1-\nu}h(s)^{\mu},\ x_1 \leq as, 0 < a < 1,$$

откуда приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

Доказательство a) теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. Доказательство b) теоремы 3 совпадает с доказательством теоремы 1 из [10].

Список литературы

[1] B.H.Gilding,L.A.Peletier. *The Cauchy Problem for equation in the theory of infiltration.* Archs.ration, Mech.Analysis, **61**, (1976), 127–140.

[2] B.H.Gilding. *Properties of solutions of an equation in the theory of infiltration.* Archs.ration, Mech.Analysis, **65**, (1977), 203–225.

[3] R.E.Grundy. *Asymptotic Soluyion of a Model Non-linear Convective Diffusion Eauation.* IMA Journal of Applied Mathematics, **31**, (1983), 121–137.

[4] L.Alvarez,J.I.Diaz,R.Kersner. *On the Initial Growth of Interfaces in Nonlinear-Convection Processes.* Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrum States I, **12**, (1988), 1–19.

[5] B.H.Gilding. *The Occurrence of Interfaces in Nonlinear Diffusion-Advection Processes.* Memorandum 595, Departament of Applied Mathematics, Twente University of Technology, (1986).

[6] B.H.Gilding, R.Kersner. *Instantaneous Shrinking in Nonlinear Diffusion-Convection*, Proceedings of the American Mathematical Society, **109**, (1990), 385–394.

[7] B.H.Gilding. *Improved theory for nonlinear degenerate parabolic equation* . Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **16**, (1989), 165–224.

[8] A.E.Shishkov. *Instantenous Shrinking Phenomenon for Solutions of Higher-Dimensional Nonlinear Diffusion-Convection Equations.* Donetsk Institute of Applied Mathematics and Mechanics, preprint 98.03.

[9] P.Benilan, P.Wittbold. *On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems.* Advances in Differential Equations, **1**, (1996), 1053–1073.

[10] Шишков А.Е., Щелков А.Г.*Динамика носителей энергетических решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка.* Изв. РАН, сер. мат., **62**, N3, (1998), 176–201.

[11] Шишков А.Е. *Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнениях произвольного порядка.* Укр. матем. журн., **44**, N10, (1992), с. 1451–1456.

340114, Донецк 114, ул. Розы Люксембург, 74.