ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

© С.П. Лавренюк, М.Б. Пташник

Львів, Україна

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2 \le T$. Розглянемо в Q_T диференціально-операторне рівняння

$$Mu_t + L(t)u + Au + \alpha Bu = f(t), \tag{1}$$

де оператори M, L, A, B визначаються наступним чином:

$M : \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega) \to H_N^{-1}(\Omega)$ і такий, що

$$\langle Mu, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left[(u,v) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x)u_{x_i}, v_{x_j})\right] dx$$

для довільних $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)$;

для кожного $t \in (-\infty, T]$ $L(t) : \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega) \to H_N^{-1}(\Omega)$ і такий, що для довільних $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)$

$$\langle L(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,t)u_{x_i}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} (C_i(x,t)u_{x_i}, v) + (C_0(x,t)u, v)\right] dx;$$

$A : \overset{\circ}{W}{}_N^{1,p(x)}(\Omega) \to W_N^{-1,q(x)}(\Omega)$ і такий, що для довільних $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_N^{1,p(x)}(\Omega)$

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_j^i(x)|u_{j,x_i}|^{p(x)-2}u_{j,x_i}v_{j,x_i} + a_j^0(x)|u_j|^{p(x)-2}u_jv_j\right)\right] dx;$$

B – оператор штрафу [1; с. 384], $Bu = J(u - P_K u)$,де J – оператор двоїстості між просторами $\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)$ і $H_N^{-1}(\Omega)$, P_K – оператор проектування на множину $K \subset \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)$, K – опукла, замкнена множина і $0 \in K$; α – додатний параметр;

для довільної $v \in V = \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_N^{1,p(x)}(\Omega)$ і довільного $t \in (-\infty, T]$

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left[(f^0(x,t), v) + \sum_{i=1}^{n} (f^i(x,t), v_{x_i})\right] dx.$$

Тут

$$\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)=\prod_{i=1}^{N}\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\ \ ,\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}_N(\Omega)=\prod_{i=1}^{N}\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega),$$

p – вимірна на Ω функція така, що $p\in L^{\infty}(\Omega)$ і

$$1<p_*=\operatorname{ess\,inf}p(x)\le\operatorname{ess\,sup}p(x)=p^*<\infty,\quad p_*<2;$$

$(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^N$; $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{q(x)}=1$ для майже всіх $x\in\Omega$; A_{ij}, B_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$, C_i $(i=0,1,\dots,n)$ – квадратні матриці порядку N. Оскільки вкладення $W^{1,p(x)}(\Omega)\subset W^{1,p_*}(\Omega)\subset L^{p_*}(\Omega)$ є неперервні і щільні [2],то V є банаховим простором з нормою

$$\|u\|_V=\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)}+\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}_N(\Omega)},$$

де

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)}=\left(\int\limits_{\Omega}\left(|u|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\right)dx\right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}_N(\Omega)}&=\sum_{j=1}^{N}\left(\|u_j\|_{L^{p(x)}_N(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|u_{j,x_i}\|_{L^{p(x)}_N(\Omega)}\right)=\\&=\sum_{j=1}^{N}\left[\inf\left\{\lambda_{0,j}>0\ :\ \int\limits_{\Omega}\left|\frac{u_j}{\lambda_{0,j}}\right|^{p(x)}dx\le1\right\}+\right.\\&\left.+\sum_{i=1}^{n}\inf\left\{\lambda_{i,j}>0\ :\ \int\limits_{\Omega}\left|\frac{u_{j,x_i}}{\lambda_{i,j}}\right|^{p(x)}dx\le1\right\}\right]\end{aligned}$$

(щодо введення норми у просторі $L^{p(x)}(\Omega)$ дивись [2]). Введемо простір $\overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,t_2})$, котрий складається з функцій u таких, що

$$u(\cdot,t)\ :\ [t_1,t_2]\to\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}_N(\Omega),\quad -\infty<t_1<t_2\le T,$$

з нормою

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,t_2})}=\sum_{j=1}^{N}\left(\|u_j\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})}+\sum_{i=1}^{n}\|u_{j,x_i}\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})}\right).$$

Через $L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}_N(\Omega))$ позначатимемо простір таких функцій $u(x,t)$, що $u\in\overset{\circ}{V}_N(Q_{\tau,T})$ для всіх $\tau\in(-\infty,T)$.

Означення. Під узагальненим розв'язком рівняння (1) будемо розуміти таку функцію $u \in C([t_1,t_2];\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)) \cap V_N(Q_{t_1,t_2})$, котра задовольняє рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(-\langle Mu, v_t\rangle + \langle L(t)u, v\rangle + \langle Au, v\rangle + \alpha\langle Bu, v\rangle\Big)dt+$$

$$+\langle Mu, v\rangle\Big|_{t=t_2} - \langle Mu, v\rangle\Big|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\langle f(t), v\rangle dt \qquad (2)$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(\overline{Q}_{t_1,t_2})$ і для довільних t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 \le T$, де

$$C_0^\infty(\overline{Q}_{t_1,t_2}) = \{v(x,t) \,:\, v \in C^\infty(\overline{Q}_{t_1,t_2}),\ v|_{\partial\Omega\times(-\infty,T)} = 0\}.$$

Припустимо, що коефіцієнти операторів M , L , A задовольняють наступні умови

(M) : $B_{ij}(x) = B_{ji}(x)$, $x \in \Omega$; $B_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\ldots,n$;

$$B_0\sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \le \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x)\xi^i, \xi^j) \le B^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2,$$

$B_0 > 0$, для всіх $x \in \Omega$ і для всіх векторів $\xi^i \in \mathbb{R}^N$;

(L) : $A_{ij}, C_0 \in C((-\infty,T];L^\infty(\Omega))$, $i,j = 1,\ldots,n$;

$C_i \in C((-\infty,T];L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$, $i = 1,\ldots,n$;

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j) \ge A_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2, \ A_0 > 0,$$

для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх векторів $\xi^i \in \mathbb{R}^N$;

$(C_0(x,t)\xi,\xi) \ge C_0|\xi|^2$ для всіх $(x,t) \in Q_T$ і $\xi \in \mathbb{R}^N$;

(A) : $a^i_j \in L^\infty(\Omega)$, $a^i_j \ge a_0 > 0$, $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,N$.

Позначимо через C^0 величину

$$C^0 = \sup_{Q_T}\sum_{i=1}^n \|C_i(x,t)\|^2,$$

де $\|C_i(x,t)\|$ – евклідова норма матриці $C_i(x,t)$. Розіб'ємо область Ω на дві множини: через Ω^0 позначимо ту множину, на котрій $p(x) \le 2$ для майже всіх x, а через Ω^1 – ту множину, на котрій $p(x) > 2$ для майже всіх x. Зауважимо, що ці множини вимірні і $\Omega^0 \cup \Omega^1 = \Omega$, $\Omega^0 \cap \Omega^1 = \emptyset$.

Введемо оператор $L_0(t)$ такий, що для кожного $t \in (-\infty, T]$ $L_0(t) : \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega) \to H_N^{-1}(\Omega)$ і для довільних $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)$

$$\langle L_0(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^n((A_{ij}(x,t) - \mu B_{ij}(x))u_{x_i}, v_{x_j}) +$$

$$\sum_{i=1}^n (C_i(x,t)u_{x_i}, v) + (C_0(x,t)u,v)\Big]dx,$$

де $\mu \in \mathbb{R}$.

Позначимо відповідно через μ^0 і μ_0 числа

$$\mu^0 = C_0 - \frac{C^0}{2(A_0 - C_0B^0 + \sqrt{(A_0 - C_0B^0)^2 + B^0C^0})},$$
$$\mu_0 = C_0 - \frac{C^0}{2(A_0 - C_0B_0 + \sqrt{(A_0 - C_0B_0)^2 + B_0C^0})}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Нехай виконуються умови* (M), (L), (A) *і, крім того,* $|\Omega^0| > 0$;

$$f^i \in C((-\infty,T]; L^2_N(\Omega^0)), \quad f^i \in C((-\infty,T]; L^{q(x)}_N(\Omega^1)), \quad i = 0,1,\dots,n;$$
$$F_0 \equiv \int\limits_{-\infty}^{T}\int\limits_{\Omega^0}\sum_{i=0}^{n}(f^i(x,t))^2 e^{2\mu t}dx\,dt + \int\limits_{-\infty}^{T}\int\limits_{\Omega^1}\sum_{i=0}^{n}|f^i(x,t)|^{q(x)}e^{2\mu t}dx\,dt < \infty,$$

де $0 < \mu < \mu^0$ *, якщо* $4A_0C_0 - C^0 > 0$ *і* $\mu < \mu_0$ *, якщо* $4A_0C_0 - C^0 < 0$. *Тоді існує узагальнений розв'язок* $u(x,t)$ *рівняння (1), який справджує оцінки*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)} \le \overline{\mu}e^{-2\mu t}, \quad t \in (-\infty,T],$$
$$\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_{j,x_i}|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)\right]e^{2\mu t}dx\,dt \le \overline{\mu}, \tag{3}$$
$$\alpha\int\limits_{-\infty}^{T}\langle Bu,u\rangle e^{2\mu t}dt \le \overline{\mu},$$

де $\overline{\mu}$ *залежить від* F_0 *і від коефіцієнтів диференціальних операторів* M, L, A.

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x)\}$ – базис простору V. Базис в просторі V існує згідно з теоремою 3.1 [2]. Розглянемо послідовність функцій

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} z_k^m(t)\varphi^k(x), \quad m = 1,2,\dots, \tag{4}$$

де $z_1^m,\dots,z_m^m$ – розв'язок задачі Коші

$$\langle Mu_t^m,\varphi^k\rangle + \langle L(t)u^m,\varphi^k\rangle + \langle Au^m,\varphi^k\rangle + \alpha\langle Bu^m,\varphi^k\rangle = \langle f^{i,m},\varphi^k\rangle,$$
$$t \in [T-m,T], \tag{5}$$
$$z_k^m(T-m) = 0, \quad k = 1,\dots,m, \tag{6}$$

а

$$f^{i,m}(x,t) = \begin{cases} f^i(x,t), & (x,t) \in Q_{T-m,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{T-m}, \quad i = 0,1,\dots,n. \end{cases}$$

Продовжимо функції $z_k^m(t)$ нулем на інтервал $(-\infty, T-m)$. Нехай $\tau_0 \in (-\infty, T)$. Помножимо кожне з рівнянь (5) відповідно на функцію $z_k^m(t)e^{2\mu t}$, просумуємо за індексом k від 1 до m і зінтегруємо по проміжку $[\tau_0, \tau]$, $\tau \in (\tau_0, T]$. Після виконяння цих операцій (починаючи з деякого m_0) отримаємо рівність

$$\int_{\tau_0}^{\tau}(\langle Mu_t^m, u^m\rangle + \langle L(t)u^m, u^m\rangle + \langle Au^m, u^m\rangle + \alpha\langle Bu^m, u^m\rangle - \langle f(t), u^m\rangle)e^{2\mu t}dt = 0. \quad (7)$$

Оцінимо тепер кожний доданок рівності (7) окремо. На підставі умов теореми отримуємо

$$\Im_1 = \int_{\tau_0}^{\tau}\langle Mu_t^m, u^m\rangle e^{2\mu t}dt = \frac{1}{2}\langle Mu^m, u^m\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=\tau} -$$

$$-\frac{1}{2}\langle Mu^m, u^m\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=\tau_0} - \mu\int_{\tau_0}^{\tau}\langle Mu^m, u^m\rangle e^{2\mu t}dt;$$

$$\Im_2 = \int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i}^m, u_{x_j}^m) + (C_0(x,t)u^m, u^m)\right]e^{2\mu t}dx\,dt \geq$$

$$\geq \int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left(A_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^m|^2 + C_0|u^m|^2\right)e^{2\mu t}dx\,dt;$$

$$\Im_3 = \int_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(C_i(x,t), u^m)e^{2\mu t}dx\,dt \leq \int_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\|C_i(x,t)\|\,|u_{x_i}^m|\,|u^m|e^{2\mu t}dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left(\delta_0\sum_{i=1}^{n}\|C_i(x,t)\|^2\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{\delta_0}|u^m|^2\right)e^{2\mu t}dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left(\delta_0 C^0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{\delta_0}|u^m|^2\right)e^{2\mu t}dx\,dt, \quad \delta_0 > 0;$$

$$\Im_4 = \int_{\tau_0}^{\tau}\langle Au^m, u^m\rangle e^{2\mu t}dt \geq a_0\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_{j,x_i}^m|^{p(x)} + |u_j^m|^{p(x)}\right)\right]e^{2\mu t}dx\,dt;$$

$$\Im_5 = \int_{\tau_0}^{\tau}\langle f(t), u^m\rangle e^{2\mu t}dt = \int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^0}\left[(f^0, u^m) + \sum_{i=1}^{n}(f^i, u_{x_i}^m)\right]e^{2\mu t}dx\,dt +$$

$$+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^1}\left[(f^0, u^m) + \sum_{i=1}^{n}(f^i, u_{x_i}^m)\right]e^{2\mu t}dx\,dt \leq$$

$$\leq \int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^0}\left(\frac{\delta_1}{2}|u^m|^2 + \frac{\delta_1}{2}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{2\delta_1}\sum_{i=0}^{n}|f^i|^2\right)e^{2\mu t}dx\,dt +$$

$$+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^1}\left(\frac{\delta_2^{p(x)}}{p(x)}|u^m|^{p(x)}+\frac{\delta_2^{p(x)}}{p(x)}\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^{p(x)}+\frac{1}{\delta_2^{q(x)}q(x)}\sum_{i=0}^{n}|f^i|^{q(x)}\right)e^{2\mu t}dx\,dt,$$

де $\delta_1>0\,,\delta_2>0.$

Крім того, якщо $4A_0C_0-C^0>0$,то

$$\Im_1^3=-\mu\int_{\tau_0}^{\tau}\langle Mu^m,u^m\rangle e^{2\mu t}dt\geq-\mu\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left(|u^m|^2+B^0\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2\right)e^{2\mu t}dx\,dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\Im_1,\ldots,\Im_5$, з рівності (7) отримуємо нерівність

$$\langle Mu^m,u^m\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=\tau}+\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[(2A_0-2\mu B^0-\delta_0C^0-\delta_1)\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2+\right.$$

$$\left.+\left(2C_0-2\mu-\frac{1}{\delta_0}-\delta_1\right)|u^m|^2\right]e^{2\mu t}dx\,dt+$$

$$+2\int_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{j=1}^{N}\left(a_0-\frac{\delta_2^{p(x)}}{p(x)}c_{p^*}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|u^m_{j,x_i}|^{p(x)}+|u^m_j|^{p(x)}\right)e^{2\mu t}dx\,dt\leq$$

$$\leq\langle Mu^m,u^m\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=\tau_0}+\frac{1}{\delta_1}\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^0}\sum_{i=0}^{n}(f^i(x,t))^2e^{2\mu t}dx\,dt+$$

$$+2\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\Omega^1}\left(\frac{1}{\delta_2^{q(x)}q(x)}\sum_{i=0}^{n}|f^i(x,t)|^{q(x)}\right)e^{2\mu t}dx\,dt.$$

Тут ми використали оцінку

$$|u^m|^{p(x)}\leq c_{p^*}\sum_{j=1}^{N}|u^m_j|^{p(x)},\quad c_{p^*}=\mathrm{const}<\infty.$$

Зауважимо, що

$$\frac{\delta_2^{p(x)}}{p(x)}\leq\frac{\delta_2^{p_*}}{p_*},\quad\frac{1}{\delta_2^{q(x)}q(x)}\leq\frac{1}{\delta_2^{q^*}q_*},$$

якщо $\delta_2\leq1$. Виберемо число δ_2 з умови

$$\delta_2=\min\left\{1;\left(\frac{p_*a_0}{2c_{p^*}}\right)^{1/p_*}\right\}.$$

Легко перевірити, що, при виконанні умови $4A_0C_0-C^0>0$, числа $\delta_0>0$ і $\mu^0>0$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases}2A_0-2\mu B^0-\delta_0C^0=0,\\ 2C_0-2\mu-\dfrac{1}{\delta_0}=0.\end{cases}$$

Тоді при $0 < \mu < \mu^0$ існує таке $\delta_1 > 0$, що

$$2A_0 - 2\mu B^0 - \delta_0 C^0 - \delta_1 \geq 0, \quad 2C_0 - 2\mu - \frac{1}{\delta_0} - \delta_1 \geq 0.$$

Якщо $\tau_0 \to -\infty$, то з нерівності (8) отримуємо

$$\int_\Omega \left[|u^m(x,\tau)|^2 + \sum_{i=1}^n |u^m_{x_i}(x,\tau)|^2 \right] e^{2\mu\tau} d\tau \leq \mu_1 F_0, \tag{8}$$

$$\int_{Q_T} \sum_{j=1}^N \left(|u^m_j|^{p(x)} + \sum_{i=1}^n |u^m_{j,x_i}|^{p(x)} \right) e^{2\mu t} dx\, dt \leq \mu_2 F_0, \tag{9}$$

$$\alpha \int_{-\infty}^T \langle Bu^m, u^m \rangle e^{2\mu t} dt \leq \mu_3 F_0, \tag{10}$$

де

$$\mu_1 = \frac{1}{\delta_1 \min\{1; B_0\}}, \quad \mu_2 = \frac{2}{\delta_2^{q^*} q_* a_0}, \quad \mu_3 = \frac{1}{\delta_2^{q^*} q_*}.$$

Якщо $4A_0C_0 - C^0 < 0$, то при $\mu < \mu_0 < 0$ отримаємо аналогічні оцінки.

Враховуючи умови теореми,можна показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке δ, $0 < \delta < \varepsilon$, що

$$\int_\Omega \left(|u^m(x,t+\delta) - u^m(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^n |u^m_{x_i}(x,t+\delta) - u^m_{x_i}(x,t)|^2 \right) dx < \varepsilon$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0(\tau)$, і $t \in [\tau, T]$.

Отже послідовність функцій

$$\int_\Omega \left(|u^m(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^n |u^m_{x_i}(x,t)|^2 \right) dx$$

є одностайно неперервною на відрізку $[\tau, T]$.

Оператор B – обмежений [1; с. 384]. Тому для всіх $m \geq m_0$

$$\|Bu^m\|_{L^2((\tau,T);H_N^{-1}(\Omega))} \leq \mu_8(\tau).$$

На підставі теореми 2.1 [2]

$$\int_\tau^T \int_\Omega a^i_j(x) |u^m_{j,x_i}|^{p(x)-1} |v_{j,x_i}|\, dx\, dt \leq \tilde{a}^i_j r_p \|\, |u^m_{j,x_i}|^{p(x)-1} \|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \|v_{j,x_i}\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})},$$

де $a_j^i(x) \le \tilde{a}_j^i$ в Ω, v – довільна функція з $\overset{\circ}{V}_N(Q_{\tau,T})$. Оскільки

$$\| |u_{j,x_i}^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} = \inf\left\{\lambda > 0 \, : \, \int_\tau^T \int_\Omega \left|\frac{|u_{j,x_i}^m|^{p(x)-1}}{\lambda}\right|^{q(x)} dx\, dt \le 1\right\},$$

то, враховуючи оцінку (9), матимемо

$$\| |u_{j,x_i}^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \le (\hat{\mu}_1 \mu_2 F_0)^{1/p_*} \equiv \mu_9(\tau),$$

де $\hat{\mu}_1 = e^{-2\mu\tau}$, якщо $\mu > 0$, і $\hat{\mu}_1 = e^{-2\mu T}$, якщо $\mu < 0$. Тоді

$$|\langle Au^m, v\rangle| \le \tilde{a} \int_\Omega \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \| |u_{j,x_i}^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \| v_{j,x_i}\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})} + \right.$$

$$\left. + \| |u_j^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \| v_j\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})} \right) \le \tilde{a} r_p \mu_9 \|v\|_{\overset{\circ}{V}_N(Q_{\tau,T})}, \tag{11}$$

для довільної функції $v \in \overset{\circ}{V}_N(Q_{\tau,T})$, де $\tilde{a} = \max\limits_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,N} \tilde{a}_j^i$.

З (11) випливає, що

$$\|Au^m\|_{(\overset{\circ}{V}_N(Q_{\tau,T}))^*} \le \mu_{10}(\tau)$$

вля всіх $m \ge m_0$. Крім того, з (8) маємо оцінку

$$\|u^m\|_{L^2((\tau,T);\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega))} \le \hat{\mu}_1 \mu_1 (T-\tau) F_0 \equiv \mu_{11}(\tau).$$

Отже, з послідовності $\{u^m(x,t)\}$ можна виділити підпослідовність $\{u^{l,l}\}$ таке, що

$$\begin{aligned}
&u^{l,l} \to u \quad \text{рівномірно в} \quad C([t_1,T];\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega));\\
&u^{l,l} \to u \quad \text{слабко в} \quad L^2([t_1,T];\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)) \cap \overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,T});\\
&Au^{l,l} \to \chi_A \quad \text{слабко в} \quad (\overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,T}))^*;\\
&Bu^{l,l} \to \chi_B \quad \text{слабко в} \quad L^2([t_1,T];H_N^{-1}(\Omega)),
\end{aligned}$$

коли $l \to \infty$, для довільного $t_1 \in (-\infty, T)$.

Нехай $z_k(t)$, $k = 1,\ldots,l_0$, функції з простору $C^1((-\infty,T])$ з компактними носіями,

$$v^{l_0}(x,t) = \sum_{k=1}^{l_0} z_k(t)\varphi^k(x).$$

Розглянувши рівність (5) для $m = l$ і $l \ge l_0$, ми отримуємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (\langle Mu_t^{l,l}, v^{l_0}\rangle + \langle L(t)u^{l,l}, v^{l_0}\rangle + \langle Au^{l,l}, v^{l_0}\rangle + \alpha\langle Bu^{l,l}, v^{l_0}\rangle - \langle f(t), v^{l_0}\rangle)dt = 0 \tag{12}$$

для $-\infty < t_1 < t_2 \le T$. Враховуючи (12), маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\langle Mu^{l,l}, v_t^{l_0}\rangle + \langle L(t)u^{l,l}, v^{l_0}\rangle + \langle Au^{l,l}, v^{l_0}\rangle + \alpha\langle Bu^{l,l}, v^{l_0}\rangle)dt +$$

$$+ \langle Mu^{l,l}, v^{l_0}\rangle\Big|_{t=t_2} - \langle Mu^{l,l}, v^{l_0}\rangle\Big|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v^{l_0}\rangle)dt. \tag{13}$$

При $l \to \infty$ із (13) отримуємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\langle Mu, v_t\rangle + \langle L(t)u, v\rangle + \langle \chi_A, v\rangle + \alpha\langle \chi_B, v\rangle)dt +$$

$$+ \langle Mu, v\rangle\Big|_{t=t_2} - \langle Mu, v\rangle\Big|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v\rangle dt, \tag{14}$$

правильну для довільної функції $v(x,t)$ з простору

$$C^1((-\infty, T]; \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)) \cap \overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,t_2}).$$

Виберемо $v = w(x)\psi(t)$, де w – довільна функція з простору V, а $\psi \in D((t_1,t_2))$. Тоді з (14) отримуємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\langle Mu, w\rangle\psi'(t) + \langle L(t)u, w\rangle\psi(t) + \langle \chi_A, w\rangle\psi(t) + \alpha\langle \chi_B, w\rangle\psi(t))dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), w\rangle\psi(t)dt$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} (\langle Mu_t, w\rangle + \langle L(t)u, w\rangle + \langle \chi_A, w\rangle + \alpha\langle \chi_B, w\rangle - \langle f(t), w\rangle)\psi(t)dt = 0$$

для довільної $\psi \in D((t_1,t_2))$. Отже,

$$\langle Mu_t, w\rangle + \langle L(t)u, w\rangle + \langle \chi_A, w\rangle + \alpha\langle \chi_B, w\rangle = \langle f(t), w\rangle$$

в $D^*((t_1,t_2))$. Звідси, зокрема, отримуємо, що $u \in L^{q(x)}((t_1,t_2); W^{-1,q(x)}(\Omega))$. Нехай γ_k – неперервна і кусково лінійна функція на $[t_1,t_2]$, $\gamma_k(t) = 1$, якщо $t_1 + 2/k < t < t_2 - 2/m$, $\gamma_k(t) = 0$ при $t > t_2 - 1/k$ і при $t < t_1 + 1/k$. Нехай ρ_k – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R})$, $\rho_k(t) = \rho_k(-t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_k(t)dt = 1, \quad \operatorname{supp}\rho_k \in \left[-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right].$$

При $s > 2k$ покладемо $v = ((\gamma_k u) * \rho_s * \rho_s)\gamma_k^*$ і підставимо цю функцію в інтеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle Mu_t, v\rangle dt.$$

Тоді як і в [1; с. 225] отримаємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle Mu_t, u\rangle dt = \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle\Big|_{t=t_2} - \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle\Big|_{t=t_1}.$$

Покажемо, що $\chi_A = Au$. Розглянемо величину

$$X_l = \int_{t_1}^{t_2} \langle Au^{l,l} - Av, u^{l,l} - v\rangle e^{2\mu t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle Au^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t} dt -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \langle Au^{l,l}, v\rangle e^{2\mu t} dt - \int_{t_1}^{t_2} \langle Av, u^{l,l} - v\rangle e^{2\mu t} dt. \tag{15}$$

Оскільки оператор А – монотонний, то $X_l \geq 0$. Використовуючи рівність (5), отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle Au^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\langle f(t), u^{l,l}\rangle - \langle L_0(t) u^{l,l}, u^{l,l}\rangle - \alpha\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle) e^{2\mu t} dt -$$
$$- \frac{1}{2}\langle Mu^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Mu^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} (\langle f(t), u^{l,l}\rangle -$$
$$- \langle L_0(t)(u^{l,l} - u), u^{l,l} - u\rangle - \langle L_0(t) u, u^{l,l} - u\rangle - \langle L_0(t) u^{l,l}, u\rangle -$$
$$- \alpha\langle Bu^{l,l} - Bu, u^{l,l} - u\rangle - \alpha\langle Bu, u^{l,l} - u\rangle - \alpha\langle Bu^{l,l}, u\rangle) e^{2\mu t} dt -$$
$$- \frac{1}{2}\langle Mu^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Mu^{l,l}, u^{l,l}\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_1}.$$

На основі даної формули і (15), враховуючи монотонність операторів $L_0(t)$ та B, матимемо

$$0 \leq \lim_{l\to\infty} \sup X_l \leq \int_{t_1}^{t_2} (\langle f(t), u\rangle - \langle L_0(t) u, u\rangle - \langle \chi_A, v\rangle - \alpha\langle \chi_B, u\rangle -$$
$$- \langle Av, u - v\rangle) e^{2\mu t} dt - \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_1}. \tag{16}$$

Поклавши в (14) $v = ue^{2\mu t}$, отримуємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \chi_A, u\rangle e^{2\mu t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\langle f(t), u\rangle - \langle L_0(t)u, u\rangle -$$

$$- \alpha\langle \chi_B, u\rangle e^{2\mu t} dt - \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Mu, u\rangle e^{2\mu t}\Big|_{t=t_1}.$$

На основі останньої рівності та нерівності (16) маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \chi_A - Av, u - v\rangle e^{2\mu t} dt \geq 0 \tag{17}$$

для довільної функції v з простору

$$W(Q_{t_1,t_2}) = C((-\infty, T]; \overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega)) \cap \overset{\circ}{V}_N(Q_{t_1,t_2}).$$

Покладемо в (17) $v = u - \lambda w$, $\lambda \in (0,1]$, $w \in W(Q_{t_1,t_2})$. Тоді

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \chi_A - A(u - \lambda w), w\rangle e^{2\mu t} dt \geq 0. \tag{18}$$

Зауважимо, що

$$\int_{t_1}^{t_2} (\langle A(u-\lambda w), w\rangle - \langle Au, w\rangle) e^{2\mu t} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\int_{0}^{\lambda} \frac{d}{d\rho}\Bigg[\sum_{j=1}^{N}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} a_j^i(x)\left|\frac{\partial(u_j - \rho w_j)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2} \frac{\partial(u_j - \rho w_j)}{\partial x_i}\frac{w_j}{\partial x_i} +$$

$$+ a_j^0 |u_j - \rho w_j|^{p(x)-2}(u_j - \rho w_j) w_j\Bigg)\Bigg] e^{2\mu t} d\rho\, dx\, dt =$$

$$= -\lambda \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} (p(x) - 1)\Bigg[\Bigg(a_j^i(x)|u_{j,x_i} - \rho^* w_{j,x_i}|^{p(x)-2}(w_{j,x_i})^2 +$$

$$a_j^0(x)|u_j - \rho^* w_j|^{p(x)-2}(w_j)^2\Bigg)\Bigg] e^{2\mu t} dx\, dt \to 0$$

при $\lambda \to 0$. Тут $\rho^* \in (0, \lambda)$. Отже, в оцінці (18) можна перейти до границі при $\lambda \to 0$ і отримати нерівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \chi_A - Av, w\rangle e^{2\mu t} dt \geq 0$$

для довільної $w \in W(Q_{t_1,t_2})$. Звідси випливає, що $\chi_A = Au$ в Q_{t_1,t_2}. Враховуючи довільність чисел t_1 і t_2, маємо $\chi_A = Au$ в Q_T. Аналогічно доводимо, що $\chi_B = Bu$ в Q_T. Отже, згідно з означенням, рівність (14) стверджує, що u є розв'язком рівняння (1). Крім того, з оцінок (8)-(10) отримуємо оцінки (3) і теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 . Тоді рівняння (1) має єдиний узагальнений розв'язок в класі таких функцій* $u(x,t)$, *що*

$$\langle Mu(\cdot,t),u(\cdot,t)\rangle = o(1)e^{-2\mu t} \text{ при } t\to-\infty. \tag{19}$$

Доведення. Нехай існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 рівняння (1) і нехай $u=u^1-u^2$. Тоді u задовольняє рівність

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(-\langle Mu,v_t\rangle+\langle L(t)u,v\rangle+\langle Au^2-Au^1,v\rangle+\alpha\langle Bu^2-Bu^1,v\rangle\Big)dt =$$

$$-\langle Mu,v\rangle\Big|_{t=t_2}+\langle Mu,v\rangle\Big|_{t=t_1} \tag{20}$$

для довільної

$$v\in C((-\infty,T];\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega))\cap L^{q(x)}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];\overset{\circ}{W}{}^{1,q(x)}_N(\Omega)), v_t\in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];\overset{\circ}{H}{}^1_N(\Omega))$$

і для довільних $t_1,t_2,-\infty<t_1<t_2\le T$. Поклавши в (20) $v=ue^{2\mu t}$, отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(\langle L_0(t)u,u\rangle+\langle Au^2-Au^1,u\rangle+\alpha\langle Bu^2-Bu^1,u\rangle\Big)e^{2\mu t}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\langle Mu,u\rangle\Big|_{t=t_2}e^{2\mu t_2}-\frac{1}{2}\langle Mu,u\rangle\Big|_{t=t_1}e^{2\mu t_1}=0.$$

Оскільки оператори L_0,A,B – монотонні, то при $t_1\to-\infty$ з урахуванням умови (19), з останньої рівності випливає, що $\langle Mu,u\rangle\Big|_{t=t_2}\le 0$ для довільного $t_2\in(-\infty,T]$. Отже $u=0$ в Q_T і єдиність доведено.

На закінчення зауважуимо, що псевдопараболічні рівняння вигляду (1) розглядалися в роботах багатьох авторів [3–16] у припущенні, що $p(x)\equiv\mathrm{const}$.

Список літератури

1. Lions J.L., *Qulques métodes de résolution des problémes aux limites non linéaries*, Paris, 1969, p. 608.
2. Kovacik O., Rakosnik Z., Rakosnic J., *On spaces* $L^{p(x)}, W^{k,p(x)}$, Csechosl. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
3. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н., *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах*, Прик. матем. и мех., 5, **24** (1960), 852–864.
4. Рубинштейн Л.И., *К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1, 12 (1948), 24–45.
5. Ting T.W., *Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), no. 3, 440–453.

6. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K., *Nichtlineare operatorgleichungen und operator differentialgleichungen*, Berlin, 1974, p. 336.
7. Gopala Rao V.R., Ting T.W., *Initial-boundary value problems for pseudoparabolic partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1973), no. 2, 131–153.
8. Showalter R.E., *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type*, Pacif. J. Math. **31** (1969), no. 3, 787–793.
9. Rundel W., *The solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **74** (1976), 311–326.
10. Colton D., *Pseudoparabolic equations in one space variable*, J. Different. Equat. **12** (1972), no. 3, 559–565.
11. Сувейка И.В., *Смешанные задачи для одного нестационарного уравнения*, Матем. исслед., 58, (1980), 99–123.
12. Шхануков М.Х., *О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах*, Диф. уравн., 10, **18** (1982), 689–699.
13. Majchrovski M., *Application of the Green function in the theory of pseudoparabolic equations*, Demonstr. math. **9** (1976), no. 3, 469–475.
14. Cannon J.P., Lin Jamping, *Classical and weak solutions for onedimensional pseudoparabolic equations with typical boundary data*, Ann. mat. pura ed appl. **152** (1988), 375–389.
15. Бас М.О., Лавренюк С.П., *Про єдиність розв'язку задачі Коші для однієї системи типу Соболєва-Гальперна*, Укр. матем. ж., 1, **48** (1996), 124–128.
16. Колінько М.О., Лавренюк С.Р., *Єдиність розв'язку задачі Коші для однієї нелінійної псевдопараболічної системи*, Вісник Львівського Університету, сер. мех-мат. **45** (1996), 70–77.

290602, м.Львів, вул. Університетська 1,
Львівський державний університет імені Івана Франка.
E-mail address: diffeq@mf.franko.lviv.ua