О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

© Е.А. Буряченко

Донецк, Украина

Abstract. In present paper a necessary and sufficient conditions of the nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem in the disk for linear differential equations of the fourth order with constant complex coefficients and homogeneous degenerated symbol in general state are received.

Введение. Вопросам единственности решения задачи Дирихле в круге для линейных уравнений четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и однородным невырожденным символом посвящена работа [1]. В случае простых комплексных характеристик, имеющих угол наклона (это соответствует тому, что корни λ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ характеристического уравнения различны и не равны $\pm i$), было получено необходимое и достаточное условие нарушения единственности решения задачи Дирихле. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работе [1] и распространяет полученный в ней результат на случаи, когда корни характеристического уравнения имеют кратность > 1 и (или) некоторые из них равны $\pm i$.

1. Постановка задачи. В единичном круге K рассматривается следующая задача Дирихле для линейного уравнения четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и однородным символом:

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} + a_2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + a_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3} + a_4\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \tag{1}$$

$$u\mid_{\partial K} = 0,\ u'_\nu\mid_{\partial K} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что в силу разложения символа $L(\xi) = a_0\xi_1^4 + a_1\xi_1^3\xi_2 + a_2\xi_1^2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2^3 + a_4\xi_2^4 = <\xi, a^1><\xi, a^2><\xi, a^3><\xi, a^4>$, где $a^j \in \mathbf{C}^2$, $j = 1, 2, 3, 4-$ комплексные векторы, $<a, b> = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$, для $\forall a, b \in \mathbf{C}^2$, уравнение (1) можно записать иначе:

$$<\nabla, a^1><\nabla, a^2><\nabla, a^3><\nabla, a^4> u = 0. \tag{3}$$

Напомним ([1]), что *углом наклона характеристики, отвечающей некоторому корню $\lambda_j \neq \pm i$ характеристического уравнения* будем называть какое-нибудь решение уравнения: $-\mathrm{tg}\varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. В дальнейшем будем рассматривать также векторы $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j) = (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

2. Случай кратных корней характеристического уравнения, не равных $\pm$i.

Теорема 1. *Пусть все корни характеристического уравнения $L(1, \lambda) = 0$ не равны $\pm i$, и пусть λ_1-корень кратности $m > 1$. Тогда*

1) *если* $m = 2$, *то для нетривиальной разрешимости задачи* (1),(2) *в* $C^4(\overline{K})$ *необходимо и достаточно, чтобы углы наклона характеристик удовлетворяли следующему условию для некоторого* $n \in \mathbf{N}, n > 2$:

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

При выполнении этого условия существует полиномиальное решение задачи (1),(2).

2) *если* $m = 3$, *то необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости задачи* (1),(2)*в* $C^4(\overline{K})$ *является выполнение равенства для некоторого* $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$:

$$\det \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ n^2\cos n\varphi_1 & n^2\sin n\varphi_1 & (n-2)^2\cos(n-2)\varphi_1 & (n-2)^2\sin(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

при выполнении которого существует полиномиальное решение задачи (1),(2).

3) *если* $m = 3$, *то задача Дирихле* (1),(2) *имеет только тривиальное решение в* $C^4(\overline{K})$.

Доказательство. 1). Не нарушая общности, будем считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$, $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, \dots, 4$. Доказательство необходимости условий (4),(5) основано на двойственности уравнение-область ([2]), понимаемой как соответствие между задачей (1),(2) и уравнением:

$$(\Delta_\xi + 1)^2\, v(\xi) = 0, \quad (6)$$

отмеченное в следующем утверждении:

Утверждение 2 ([2]). *Для каждого нетривиального решения задачи* (1), (2) *из* $C^4(\overline{K})$ *существует единственное нетривиальное аналитическое в* $\mathbf{C}^n$ *решение уравнения* (6) *из некоторого класса* Z *целых функций и наоборот.*

Предположим, что задача (1),(2) имеет нетривиальное решение в $C^4(\overline{K})$, тогда, согласно утверждению 2, существует нетривиальное решение двойственной задачи: целая функция $v(\xi) = L(\xi)\, w(\xi)$, являющаяся решением уравнения (6). Раскладывая функцию $w(\xi)$ в степенной ряд, для младшей нетривиальной однородной полиномиальной части $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\, \tilde{w}(\xi)$ ряда v получим уравнение:

$$\Delta_\xi^2\, \tilde{v}(\xi) = 0 \quad (7)$$

Как известно ([3]), общее полиномиальное решение уравнения (7) можно записать в виде:

$$\tilde{v}(\xi) = Re\{\, f_1(z) + \bar{z}\cdot f_2(z)\,\} + i\, Re\{\, g_1(z) + \bar{z}\cdot g_2(z)\,\},$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$, $f_i(z)$, $g_i(z)$, $i = 1,2-$ некоторые полиномы. Переходя к полярным координатам, получим:

$$\tilde{v}(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\alpha_{1n}\cos n\varphi - \beta_{1n}\sin n\varphi + \alpha_{2n}\cos(n-2)\varphi - \beta_{2n}\sin(n-2)\varphi). \quad (8)$$

Если $\tilde{v}(\rho,\varphi)$-решение двойственной задачи, то $\tilde{v}(\rho,\varphi)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\tilde{v}\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,\ \tilde{v}'_\varphi\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,\ \tilde{v}\,|_{\varphi=-\varphi_3} = 0,\ \tilde{v}\,|_{\varphi=-\varphi_4} = 0, \quad (9)$$

которые являются условиями делимости целой функции $\tilde{v}(\xi) = L(\xi)\,\tilde{w}(\xi)$ на символ $L(\xi) =< \xi, a^1 >^2 < \xi, a^3 >< \xi, a^4 >$. Здесь также использовался тот факт, что условие $< \xi, a^j >= 0$ эквивалентно равенству $\varphi = -\varphi_j$, $j = 1,3,4$. Подставляя (8) в

(9), приходим к линейной однородной системе уравнений относительно постоянных $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \alpha_{1n} \cos n\varphi_1 + \beta_{1n} \sin n\varphi_1 + \alpha_{2n} \cos(n-2)\varphi_1 + \beta_{2n} \sin(n-2)\varphi_1 = 0, \\ \sum_{k=1}^{2} (n - 2(k-1))\{-\alpha_{kn} \sin(n - 2(k-1))\varphi_1 + \beta_{kn} \cos(n - 2(k-1))\varphi_1\} = 0, \\ \alpha_{1n} \cos n\varphi_j + \beta_{1n} \sin n\varphi_j + \alpha_{2n} \cos(n-2)\varphi_j + \beta_{2n} \sin(n-2)\varphi_j = 0, j = 3, 4 \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку двойственная задача (7),(9) имеет нетривиальное решение, то линейная система (10) имеет нетривиальное решение, что влечёт обращение в ноль определителя этой системы. Необходимость условия (4) для нетривиальной разрешимости задачи (1),(2) в пространстве $C^4(\overline{K})$ доказана.

Предположим, что условие (4) выполнено для некоторого $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$. Покажем, что существует ненулевой набор постоянных $(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$ такой, что функция

$$u(x) = \sum_{j=1, j\neq 2}^{4} C_j^* \left(\frac{1}{2n} T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x) \right) - C_2^* < x, a^1 > T_{n-1}(-\tilde{a}^1 \cdot x), \quad (11)$$

где $(\tilde{a}^j \cdot x) = \tilde{a}_1^j x_1 + \tilde{a}_2^j x_2, T_n(t)-$ полиномы Чебышева первого рода $n-$го порядка является нетривиальным решением задачи (1),(2). Очевидно, что функция (11) удовлетворяет уравнению $< \nabla, a^1 >^2 < \nabla, a^3 > < \nabla a^4 > u = 0$ за счет выбора векторов $\tilde{a}^j$, $j = 1, 3, 4$. Учитывая, что на ∂K $(\tilde{a}^j \cdot x) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, $< x, a^j > = \sin(\tau + \varphi_j), T_n(\cos(\tau + \varphi_j)) = \cos n(\tau + \varphi_j)$, $j = 1, 3, 4$, из равенства $u \mid_{\partial K} = 0$ будет следовать:

$$\begin{cases} \sum_{j=1, j\neq 2}^{4} C_j \cos(n - 2(k-1))\varphi_j - C_2 (n - 2(k-1)) \sin(n - 2(k-1))\varphi_1 = 0, \\ \sum_{j=1, j\neq 2}^{4} C_j \sin(n - 2(k-1))\varphi_j + C_2 (n - 2(k-1)) \cos(n - 2(k-1))\varphi_1 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Соотношения (12) при каждом $k = 1, 2$ представляют собой систему линейных однородных уравнений, определитель которой равен нулю в силу условия (4). Следовательно, существует нетривиальное решение $(C_1^*, \ldots, C_4^*)$ системы (12) такое, что функция (11) удовлетворяет первому граничному условию в (2). Используя следующие соотношения ([4]) $\int_0^x T_{n-1}(t)\, dt = \frac{1}{2n} T_n(x) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(x), T'_{n-1}(x) = (n-1) U_{n-2}(x)$, $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, где $U_n(x)-$многочлены Чебышева второго рода $n-$го порядка, нетрудно показать, что функция (11) удовлетворяет и второму граничному условию в (2), если $(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$-некоторое нетривиальное решение системы (12).

2). Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$, $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, 2, 3, 4$. Доказательство необходимости условия (5) почти дословно повторяет доказательство необходимости условия (4). Однако, в отличие от первого случая, двойственная задача имеет иной вид, поскольку условия делимости целой функции $\tilde{v}(\xi)$ на символ $L(\xi) = < \xi, a^1 >^3 < \xi, a^4 >$ записываются (в полярных координатах) следующим образом:

$$\tilde{v} \mid_{\varphi = -\varphi_1} = 0, \; \tilde{v}'_{\varphi} \mid_{\varphi = -\varphi_1} = 0, \; \tilde{v}''_{\varphi\varphi} \mid_{\varphi = -\varphi_1} = 0, \; \tilde{v} \mid_{\varphi = -\varphi_4} = 0. \quad (13)$$

Подставляя (8) в (13), получим линейную однородную систему относительно постоянных $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$ с определителем, стоящим в левой части равенства (5). В силу предположения о том, что двойственная задача имеет ненулевое решение, полученная система имеет нетривиальное решение, откуда и следует равенство (5).

Для доказательства достаточности условия (5) для нетривиальной разрешимости задачи (1),(2) в $C^4(\overline{K})$ необходимо показать, что функция

$$u(x) = \sum_{j=1,4} C_j^* \left(\frac{1}{2n} T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x) \right) - C_2^* < x, a^1 > T_{n-1}(-\tilde{a}^1 \cdot x) +$$

$$+ C_3^* ((\tilde{a}^1 \cdot x) T_{n-1}(-\tilde{a}^1 \cdot x) + (n-1) < x, a^1 >^2 U_{n-2}(-\tilde{a}^1 \cdot x)) \quad (14)$$

является ненулевым решением задачи (1),(2), причем $(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$- ненулевое решение системы с определителем, стоящим в левой части равенства (5). Существование такого ненулевого набора $(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$ гарантировано выполнением условия (5). При проверке того, что функция (14) удовлетворяет второму граничному условию в (2) необходимо воспользоваться следующими соотношениями ([4]): $(1-x^2)U'_{n-2}(x) = (n-1)U_{n-3}(x) - (n-2)xU_{n-2}(x)$, $T_{n-1}(x) = U_{n-1}(x) - xU_{n-2}(x)$, $U_{n-3}(x) - xU_{n-2}(x) = xU_{n-2}(x) - U_{n-1}(x)$.

3). Рассмотрим, наконец, случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \neq \pm i$. Решением двойственной задачи в этом случае будет являться функция вида (8) удовлетворяющая следующим условиям делимости целой функции $\tilde{v}(\xi)$ на символ $L(\xi) =< \xi, a^1 >^4$:

$$\tilde{v}\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,\ \tilde{v}'_{\varphi}\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,\ \tilde{v}''_{\varphi\varphi}\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0,\ \tilde{v}'''_{\varphi\varphi\varphi}\,|_{\varphi=-\varphi_1} = 0. \tag{15}$$

Подставляя функцию вида (8) в условия (15), получим линейную однородную систему относительно постоянных α_{in}, $\beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$, определитель которой является определителем Вронского линейно независимой тригонометрической системы и, поэтому отличен от нуля. Следовательно, двойственная задача имеет только тривиальное решение, и. согласно утверждению 2, однородная задача Дирихле (1),(2) в этом случае имеет только тривиальное решение. Теорема доказана.

3. Случай простых характеристик, не имеющих углов наклона.

ТЕОРЕМА 3. 1). *Предположим, что все корни характеристического уравнения различны, однако, один из них (λ_1, например) равен $i(-i)$. Тогда для нетривиальной разрешимости задачи Дирихле* (1),(2) *в* $C^4(\overline{K})$ *необходимо и достаточно выполнения следующего условия для некоторого* $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & i(-i) & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Причем, при выполнении (16) *существует нетривиальное полиномиальное решение задачи* (1),(2) *вида:*

$$u(x) = \frac{C_1^*}{2n}(x_1 + i(-i)x_2)^n + \sum_{j=2}^{4} C_j^* \left(\frac{1}{2n}T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x)\right), C_j^* \in \mathbf{C}.$$

2). *Если все корни характеристического уравнения различны, но среди них есть корни, равные i и $-i$ (пусть, например, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$), то необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения задачи* (1),(2) *в* $C^4(\overline{K})$ *является выполнение равенства:*

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{\pi k}{n-2}, \exists n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}, n > 2. \tag{17}$$

При выполнении условия (17) *существует ненулевое решение задачи* (1),(2) *вида:*

$$u(x) = \frac{C_1^*}{2n}(x_1 + ix_2)^n + \frac{C_2^*}{2n}(x_1 - ix_2)^n + \sum_{j=3}^{4} C_j^* \left(\frac{1}{2n}T_n(-\tilde{a}^j \cdot x) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(-\tilde{a}^j \cdot x)\right),$$

где $(C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$*-некоторый нетривиальный набор постоянных.*

Доказательство. Следуя схеме доказательства необходимости в теореме 1, докажем необходимость условий (16) и (17).

1). Используя формулы Эйлера: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, из (8) получим:

$$\tilde{v}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left\{\sum_{j=1}^{2}(\alpha_{jn} - \frac{\beta_{jn}}{i})e^{i(n-2(j-1))\varphi} + (\alpha_{jn} + \frac{\beta_{jn}}{i})e^{-i(n-2(j-1))\varphi}\right\}. \qquad (18)$$

Поскольку при делении целой функции $\tilde{v}(\rho,\varphi)$ на символ $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2) < \xi, a^2 >$ $< \xi, a^3 >< \xi, a^4 >$ должен получиться полином, с необходимостью будет следовать:

$$\alpha_{1n} + i\beta_{1n} = 0,\ \tilde{v}\mid_{\varphi=-\varphi_2} = 0,\ \tilde{v}\mid_{\varphi=-\varphi_3} = 0,\ \tilde{v}\mid_{\varphi=-\varphi_4} = 0. \qquad (19)$$

Здесь использовался тот факт, что $\xi_1 + i\xi_2 = \rho e^{i\varphi}$ в полярных координатах, а условие $< \xi, a^j >= 0$ эквивалентно равенству $\varphi = -\varphi_j$, $j = 2, 3, 4$. Подставляя (18) в последнии три условия из (19) и объединяя полученные соотношения с первым равенством в (19), будем иметь однородную систему, обладающую ненулевым решением (поскольку существует ненулевое решение двойственной задачи). Так как определитель этой системы будет совпадать с определителем, стоящим в левой части равенства (16), тем самым будет доказана необходимость условия (16) для нетривиальной разрешимости задачи (1),(2). В случае $\lambda_1 = -i$ доказательство аналогично.

2). Если $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, то, объединяя результаты п.1) для $\lambda_1 = i$, а затем для $\lambda_1 = -i$ с заменой последнего на λ_2, легко доказать необходимость условия (17).

Достаточность условий (16) и (17) доказывается так же, как и достаточность в теореме 1.

4. Случай, когда корни ±i имеют кратность > 1.

ТЕОРЕМА 4. 1). *Пусть* $\lambda_1 = \lambda_2 = i(-i)$, λ_3, $\lambda_4 \neq \pm i$. *Тогда однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение в пространстве* $C^4(\overline{K})$.

2). *Если кратность корня* $i(-i)$ *равна* $m > 2$ *то задача* (1),(2) *всегда имеет нетривиальное решение в* $C^4(\overline{K})$.

3). *Предположим, что* $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ *корни характеристического уравнения кратности* p *и* q *соответственно* $(p, q \neq 0)$. *Тогда, если* $p + q > 2$, *то задача Дирихле* (1),(2) *имеет только тривиальное решение в* $C^4(\overline{K})$.

Доказательство. 1). Рассмотрим вначале случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \pm i$. Следуя схеме доказательства теоремы 1, мы придем к тому, что постоянные $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$ в (8) удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, определитель которой равен $e^{(n\varphi_3+(n-2)\varphi_4)} - e^{(n\varphi_4+(n-2)\varphi_3)}$, и, следовательно, отличен от нуля при $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Таким образом, двойственная задача имеет только тривиальное решение, и, согласно утверждению 2, однородная задача Дирихле (1),(2) имеет только тривиальное решение.

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = i(-i)$, $\lambda_3 = \lambda_4 \neq \pm i$, то объединяя результаты п.1 и п.2, мы придем к тому, что постоянные $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$ в (8) удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, определитель которой отличен от нуля для $\forall\varphi_3$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$. Поэтому, и в этом случае задача (1),(2) имеет только тривиальное решение.

2). Если $\lambda_1 = i(-i)$– корень кратности $m > 2$, то из условия делимости целой функции $\tilde{v}(\rho,\varphi)$ на символ $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^m < \xi, a^4 >$ (при $m = 3$) и $L(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^m$ (при $m = 4$), будет следовать

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{jn} + i\beta_{jn} = 0, j = 1, 2, \\ \alpha_{1n}\cos n\varphi_4 + \beta_{1n}\sin n\varphi_4 + \alpha_{2n}\cos(n-2)\varphi_4 + \beta_{2n}\sin(n-2)\varphi_4 = 0, \end{array}\right. \qquad (20)$$

причем, последнее условие возникает только при $m = 3$. Таким образом, получаем линейную однородную систему (20) l уравнений с 4 неизвестными, которая всегда имеет ненулевое решение, поскольку $l = 3$ (при $m = 3$), $l = 2$ (при $m = 4$). Поэтому, двойственная задача имеет нетривиальное решение, и, согласно утверждению 2, задача (1),(2) имеет нетривиальное решение.

3). Если $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ корни характеристического уравнения кратности p и q соответственно ($p, q \neq 0$), то при $p + q > 2$, будем получать однородные системы относительно $\alpha_{in}, \beta_{in} \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$, определители которых всегда отличны от нуля, и, согласно утверждению 2, однородная задача Дирихле в этом случае имеет только тривиальное решение. Теорема доказана.

Замечание. Объединяя результаты пунктов 1 и 3, нетрудно доказать справедливость следующих фактов:

1). Если $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = \lambda_4 \neq \pm i$, то задача Дирихле (1),(2) имеет только тривиальное решение в пространстве $C^4(\overline{K})$.

2). Если $\lambda_1 = i(-i)$, $\lambda_2 \neq \pm i-$ корень кратности 3, то задача (1),(2) имеет только тривиальное решение в $C^4(\overline{K})$.

3). Если $\lambda_1 = i(-i)$, $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 2, 3, 4$, λ_2- корень кратности 2, то для нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле (1),(2) в $C^4(\overline{K})$ необходимо и достаточно выполнения следующего условия для некоторого $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & i(-i) & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ -n\sin n\varphi_2 & n\cos n\varphi_2 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_2 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Список литературы

[1] Буряченко Е.А. *К вопросу о нарушении единственности решения задачи Дирихле для уравнений с частными производными четвертого порядка* , Труды ИПММ,4 (1999), 4–15.

[2] Бурский В.П. *Граничные свойства L_2- решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение-область* , Докл. АН СССР, 5, **309** (1989), 1036–1039.

[3] Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений* , М.: ОГИЗ, 1948.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие транцендентные функции.* , Т. 2. М.: Наука, 1974.

83114, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74.

E-mail address: buryachenko@yahoo.com