О БИФУРКАЦИЯХ В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

© Я.М. Дымарский

Луганск, Украина

Резюме. We study typical bifurcations of the zero solution of continuous operator equation in the case of two-fold degeneracy of linearized problem.

1. **Формулировка основной теоремы.** Обозначим: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H; $u \in H$; $U \subset H$ — некоторая окрестность нуля; $S_\rho = \{u : ||u|| = \rho\} \subset U$ — сфера малого радиуса ρ; L — банахово пространство самосопряженных компактных операторов $\mathbf{A} : H \to H$ с обычной операторной нормой. Известно [1], что характеристические числа оператора $\mathbf{A}$ имеют конечную кратность. Рассмотрим линейное пространство $C = C(U, L)$ всех *вполне непрерывных* отображений $A : U \to L$. Пространство C является банаховым с нормой $||A||_C = \sup_{u\in U} ||A(u)||$ [1]. Рассмотрим *квазилинейную* задачу на *собственные векторы* (с.в.) u и *характеристические числа* (х.ч.) γ:

$$\gamma(\mathbf{A} + A(u))u = u, \quad u \neq 0, \quad \gamma \in \mathbf{R}, \quad A(0) = 0 \in L. \tag{1}$$

Пару (γ, u), удовлетворяющую (1), назовем *решением*. Для определенности полагаем, что всюду $\gamma > 0$. Введем для решений задачи (1) номер и кратность. Если (γ^0, u^0) — решение, то γ^0 является х.ч. линейной задачи

$$\gamma\mathbf{B}u = u, \quad \text{где } \mathbf{B} = \mathbf{A} + A(u^0) \in L. \tag{2}$$

Определение 1. Решение (γ^0, u^0) квазилинейной задачи (1) и его элементы назовем *простым(и)* (*m-кратным(и)*), если таковым является γ^0 как х.ч. линейной задачи (2). Присвоим решению (γ^0, u^0) и его элементам тот *номер и кратность*, которыми обладает γ^0 как х.ч. линейной задачи (2).

Напомним, что число γ^0 называется *точкой бифуркации* для уравнения (1), если для каждого малого $\delta > 0$ это уравнение имеет решение, удовлетворяющее неравенству $|\gamma - \gamma^0| + ||u|| < \delta$. В [1] показано, что точки бифуркации следует искать только среди х.ч. линейного оператора $\mathbf{A}$. Там же показано, что каждое нечетнократное х.ч. оператора $\mathbf{A}$ является точкой бифуркации. Интерес представляет случай, когда γ^0 — *четнократное* х.ч. оператора $\mathbf{A}$. В дальнейшем $\gamma^0 = \gamma_n$ — положительное двукратное n-е х.ч. оператора $\mathbf{A}$, u_n и u_{n+1} — ортонормированные собственные векторы, отвечающие этому х.ч.

Будем искать малые с.в. $u \in S_\rho$ задачи (1) в виде

$$u = r(u_n \cos\varphi + u_{n+1}\sin\varphi) + v, \quad где \quad r > 0, \quad v \perp u_n, u_{n+1}, \quad r^2 + ||v||^2 = \rho^2. \quad (3)$$

Таким образом, нахождению подлежат r, φ, v. Введем обозначения:

$$a(u) = \langle A(u)u_n, u_n\rangle, \quad b(u) = \langle A(u)u_n, u_{n+1}\rangle,$$

$$c(u) = \langle A(u)u_{n+1}, u_{n+1}\rangle, \quad d(u) = (1/2)[a(u) - c(u)].$$

Пусть $\varphi \in [0, 2\pi)$ — параметризация единичной окружности S_1. Положим $a(\varphi; r, v) = a(r(u_n\cos\varphi + u_{n+1}\sin\varphi) + v)$. Аналогичным образом определяются функции $b(\varphi; r, v)$, $c(\varphi; r, v)$, $d(\varphi; r, v)$. Предположим, что для некоторых фиксированных r и v и для всех $\varphi \in S_1$ справедливо неравенство $d^2(\varphi; r, v) + b^2(\varphi; r, v) > 0$. В этом случае формулы $\cos\alpha = d/(d^2 + b^2)^{1/2}$, $\sin\alpha = b/(d^2 + b^2)^{1/2}$ определяют отображение $\alpha = f(\varphi; r, v)$ окружности S_1 в окружность S_2, параметризованную углом α. Через $deg(f)$ обозначим ориентированную степень [1] этого отображения. Если картой тора $T^2 = S_2 \times S_1$ считать всю плоскость (α, φ) (помня, что точки $(\alpha + 2\pi i, \varphi + 2\pi j)$, где $i, j \in \mathbf{Z}$, между собой эквивалентны), то отображение f заменяется эквивалентной *функцией* f, для которой мы оставляем прежнее обозначение.

Теорема 1. *Предположим, что существуют малые постоянные $\varepsilon, \nu > 0$ и постоянные $K > k > 0$, $N > 0$, для которых выполняются неравенства:*

$$(d^2(u) + b^2(u))^{1/2} > k||u||^\nu \quad (4)$$

как только в (3) $0 < r < \varepsilon$ и $||v|| < Nr^{1+\nu}$;

$$||A(u)|| < K||u||^\nu, \quad (5)$$

при $||u|| < \varepsilon$. Если функция $f(\varphi; r, v)$ липшицуема по φ равномерно по $0 < r < \varepsilon$ и $||v|| < Nr^{1+\nu}$ и $deg(f(\varphi; r, 0)) \neq 2$ для некоторого $0 < r < \varepsilon$, тогда:

1) число γ_n является точкой бифуркации для уравнения (1);

2) все решения в окрестности точки $(\gamma_n, 0)$ являются простыми;

3) степень $deg(f(\varphi; r, 0))$ не зависит от $0 < r < \varepsilon$;

4) для каждого $\rho < \varepsilon$ уравнение (1) имеет не менее, чем $|2 - deg(f(\varphi; r, 0))|$ решений (γ, u) с номером n, у которых $u \in S_\rho$ и $|\gamma - \gamma_n| < \varepsilon$; это же справедливо для решений с номером $n + 1$.

Отметим, что принцип смены индекса [1, стр. 199] для исследуемого случая двукратного вырождения ничего не дает. Отображение $u \to A(u)u$ не является в общем случае потенциальным, поэтому вариационные методы здесь не работают. Случай двукратного вырождения подробно исследован в [2, 3] при условии однородности "ведущей нелинейности". В [4] уравнение (1) изучено нами в случае гладкого отображения A с помощью уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта. В рассматриваемой ситуации отсутствие гладкости не позволяет непосредственно применить этот метод. Однако, воспользовавшись *индексом пересечения*, мы покажем, что существует специальная гомотопия, сводящая исходное уравнение (1) к некоторому уравнению на окружности малого радиуса в плоскости $\{u_n, u_{n+1}\}$; причем: 1) гомотопия сохраняет устойчивые малые с.в., 2) уравнение на окружности совпадает с уравнением разветвления в случае гладкого отображения A.

2. **Индекс пересечения**. Приведем без доказательства нужные нам сведения об ориентированном индексе пересечения двух бесконечномерных подмногообразий. Первое — стационарно, оно порождено пространством L; второе является графиком отображения $u \to \mathbf{A} + A(u)$.

Определим основные объекты: 1) подмножество операторов

$$L(n,m) = \{\mathbf{B} \in L : \gamma_{n-1}(\mathbf{B}) < \gamma_n(\mathbf{B}) = ... = \gamma_{n+m-1}(\mathbf{B}) < \gamma_{n+1}(\mathbf{B})\};$$

2) подмножество пар

$$P = \{p = (\mathbf{B}, u) \in L \times S_\rho : \textit{существует такое } \gamma > 0, \textit{ что } \gamma\mathbf{B}u = u\};$$

3) отображение $Gr(\mathbf{A} + A) : S_\rho \to L \times S_\rho$, где $Gr(\mathbf{A} + A(u)) = (\mathbf{A} + A(u), u)$.

Так как х.ч. конечнократно, каждой точке $p \in P$ припишем пару (n,m) натуральных чисел — номер и кратность соответствующего х.ч. γ. Обозначим через $P(n,m) \subset P$ подмножество состоящее из всех точек, имеющих номер n и кратность m. Точку $p \in P$ назовем *простой*, если $m = 1$. Подмножество всех кратных точек с номером n обозначим через $P_n^* = \cup_{m \geqslant 2} P(n,m)$.

Лемма 1 [5]. *Подмножество $L(n,m) \subset L$ — C^∞-подмногообразие коразмерности $(1/2)(m-1)(m+2)$. В частности, $codim L(n,2) = 2$ и касательное пространство $T_\mathbf{A} L(n,2)$ определяется двумя условиями: $\langle \mathbf{B}u_n, u_{n+1}\rangle = 0$, $\langle \mathbf{B}u_n, u_n\rangle - \langle \mathbf{B}u_{n+1}, u_{n+1}\rangle = 0$.*

Лемма 2 [5]. *Подмножество $P \subset L \times S_\rho$ — связное C^∞-подмногообразие с модельным пространством L. Подмножества $P(n,m)$ являются связными C^∞-подмногообразиями в P и $codim P(n,m) = m(m-1)/2$. В частности, подмножества $P(n,1)$, состоящие из простых точек, открыты в P.*

Роль многобразия P и отображения $Gr(\mathbf{A} + A)$ в обнаружении н.с.в. объясняет

Теорема 2. *Вектор $u \in S_\rho$ является с.в. задачи (1) с положительным х.ч. тогда и только тогда, когда $(Gr(\mathbf{A} + A))(u) \in P$. В этом случае номер и кратность с.в. определяются индексами (n,m) того подмножества, которому принадлежит точка $(Gr(\mathbf{A} + A))(u) \in P(n,m) \subset P$.*

Пусть $W = W_\rho \subset S_\rho$ — некоторая открытая область с границей ∂W. В дальнейших построениях основную роль играют следующие понятия.

Определение 2. Отображение $A \in C$ и соответствующую ему задачу (1) назовем *n-типичными* на W, если $(Gr(\mathbf{A} + A))(\overline{W}) \cap P_n^* = \emptyset$ и $(Gr(\mathbf{A} + A))(\partial W) \cap P(n,1) = \emptyset$. (Множество всех n-типичных на W отображений обозначим через $C_n^{tip}(W) \subset C$.) Два отображения $A_0, A_1 \in C_n^{tip}(W)$ (и соответствующие им задачи (1)) назовем *n-гомотопными*, если существует непрерывное отображение (n-гомотопия) $G : [0,1] \to C_n^{tip}(W)$, для которого $G(0) = A_0$ и $G(1) = A_1$.

Все названные понятия и утверждения без изменений переносятся на конечномерный случай [6]. При этом мы имеем дело с евклидовым пространством $\mathbf{R}^k$, сферой S_ρ^{k-1}, пространством операторов $L^{(k)}$ и т.д. Если отображение $A^{(k)}$ является n-типичным на $W^{(k)} \subset S_\rho^{k-1}$, то определен [7] *ориентированный индекс пересечения* $\chi_n^{(k)} = \chi_n^{(k)}(P^{(k)}(n,1), Gr(\mathbf{A}^{(k)} + A^{(k)}); W^{(k)})$ подмногообразия $P^{(k)}(n,1)$ с сужением отображения $Gr(\mathbf{A}^{(k)} + A^{(k)})$ на область $W^{(k)}$. Если два отображения $A_0^{(k)}, A_1^{(k)} \in C_n^{tip}(W^{(k)})$ n-гомотопны, то соответствующие индексы пересечения совпадают. Если индекс отличен от нуля, то область $W^{(k)}$ содержит простой с.в. конечномерной задачи (1), имеющий номер n.

Пусть $\{e_i\}$ — произвольный ортонормированный базис в H. Пусть π_k — ортопроектор на k-мерное подпространство $\pi_k H$, порожденное первыми k базисными векторами. Пусть отображение $A \in C_n^{tip}(W)$. Оказывается (благодаря полной непрерывности отображения A) при $k \to \infty$ происходит стабилизация конечномерного отображения $\pi_k H \ni u^{(k)} \to \pi_k A(u^{(k)})\pi_k \in L^{(k)}$: для всех достаточно больших k это отображение также является n-типичным на $W^{(k)} = W \cap (\pi_k H)$ и индекс пересечения $\chi_n^{(k)}$ не зависит от k.

Определение 3. Назовем указанный стабилизированный индекс $\chi_n^{(k)}$ *ориентированным индексом пересечения* $\chi_n = \chi_n(P(n,1), Gr(\mathbf{A}+A); W)$ подмногообразия $P(n,1)$ с сужением отображения $Gr(\mathbf{A}+A)$ на область W.

Если два отображения $A_0, A_1 \in C_n^{tip}(W)$ n-гомотопны, то их индексы пересечения совпадают. Если индекс отличен от нуля, то область W содержит простой с.в. задачи (1), имеющий номер n.

2. **Доказательство основной теоремы**. Нам понадобятся следующие априорные оценки.

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство (5). Тогда для всех характеристических чисел* $\gamma \in (\gamma_n - \delta, \gamma_n + \delta)$, *где* $\delta > 0$ *— малое фиксированное число, компоненты* r *и* v *соответствующих малых с.в. удовлетворяют оценке* $||v|| < Nr^{1+\nu}$ *с некоторой положительной постоянной* N.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что оператор $\mathbf{A}$ положителен (т.е. $\langle \mathbf{A}u, u\rangle > 0$ для всех $u \neq 0$). В этом случае все его ортонормированные с.в. образуют базис в H. Обозначим через $\pi_{n,n+1}$ и $\pi^{\perp}$ ортогональные проектирования на плоскость, порожденную векторами u_n, u_{n+1}, и ортогональное дополнение $H^{\perp} \ni v$ к этой плоскости. Пусть $u \in S_\rho$ — с.в. Подставив выражение (3) в уравнение (1) и применив проектор $\pi^{\perp}$ к обеим частям получим

$$(\pi^{\perp}E - (\gamma_n + \Delta\gamma)\pi^{\perp}\mathbf{A})v = (\gamma_n + \Delta\gamma)\pi^{\perp}A(u)(r(u_n \cos\varphi + u_{n+1}\sin\varphi) + v). \qquad (6)$$

Если возмущение $\Delta\gamma$ достаточно мало, то оператор $\pi^{\perp}E - (\gamma_n + \Delta\gamma)\pi^{\perp}\mathbf{A}$ обратим на $H^{\perp}$. Учитывая неравенство (5), получаем для всех достаточно малых ρ требуемую оценку с $N = 2K\gamma_n||(\pi^{\perp}E - (\gamma_n + \Delta\gamma)\pi^{\perp}\mathbf{A})^{-1}||$. •

Учитывая полученную оценку, определим область на малой сфере, внутри которой мы будем искать с.в. задачи (1): $W = \{u \in S_\rho : ||v|| < Nr^{1+\nu}\}$.

Теорема 4. *Если* ρ *и* $\Delta\gamma$ *достаточно малы, то задача (1), (3) имеет только простые решения с номерами* n *и* $n+1$.

Доказательство. Из теоремы 3, неравенства (4) и леммы 1 следует, что расстояние от образа $A(W)$ до касательного пространства $T_{\mathbf{A}}L(n,2)$ оценивается снизу величиной $k||u||^{\nu}$. Из неравенства (5) следует, что расстояние от образа $\mathbf{A} + A(W)$ до точки $\mathbf{A} \in L(n,2)$ оценивается сверху величиной $||A(u)|| < K||u||^{\nu}$. Отношение указанных расстояний оценивается снизу постоянной величиной k/K. Но для операторов $\mathbf{B} \in L(n,2)$, в силу определения касательного пространства, это же отношение расстояний стремится к нулю при $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A} + A(W) \cap L(n,2) = \emptyset$. Последнее гарантирует простоту исследуемых решений. •

Рассмотрим проекцию задачи (1), (3) на плоскость, порожденную векторами u_n, u_{n+1}. Мы получим систему из трех уравнений

$$a(\varphi; r, v)\cos\varphi + b(\varphi; r, v)\sin\varphi + (1/r)\langle A(\varphi, r, v)v, u_n\rangle = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma_n + \Delta\gamma}\cos\varphi,$$

$$b(\varphi; r, v)\cos\varphi + c(\varphi; r, v)\sin\varphi + (1/r)\langle A(\varphi, r, v)v, u_{n+1}\rangle = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma_n + \Delta\gamma}\sin\varphi,$$

$$r^2 + ||v||^2 = \rho^2 \tag{7}$$

с неизвестными φ, r и $\Delta\gamma$ и малыми параметрами ρ и v. Рассмотрим сужение системы (7) на плоскость $\{u_n, u_{n+1}\}$. Получим систему из двух уравнений

$$a(\varphi; r, 0)\cos\varphi + b(\varphi; r, 0)\sin\varphi = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma_n + \Delta\gamma}\cos\varphi,$$

$$b(\varphi; r, 0)\cos\varphi + c(\varphi; r, 0)\sin\varphi = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma_n + \Delta\gamma}\sin\varphi \tag{8}$$

с неизвестными φ и $\Delta\gamma$ и малым положительным параметром r. Система (8) подробно изучена в [4]. Она имеет вид (1) и, в силу теоремы 2 и неравенства (4), сводится к исследованию пересечения двух кривых на торе $T^2 = S_2 \times S_1$. Первая кривая — это пересечение многообразия $P^{(2)}$ и тора $T^2 = \{(a, b, c) \in L^{(2)}: \ a + c = 0, \ a^2 + b^2 = 1\} \times S_1$. Она состоит из двух связных компонент: $P^{(2)} \cap T^2 = \sigma_1 \cup \sigma_2$. На кривой σ_i находятся пары $(\mathbf{A}^{(2)}, \varphi)$, имеющие номер i. Вторая кривая — это график отображения $f(\varphi; r, 0)$, т.е. образ отображения $Gr(f(\varphi; r, 0))$. Отображение $f(\varphi; r, 0)$ — это проекция отображения $A^{(2)}$ на окружность S_1. В [4] показано, что индекс пересечения $\chi_i(\sigma_i, Gr(f(\varphi; r, 0))) = (-1)^{i-1}(deg f(\varphi; r, 0) - 2)$ и не зависит от малых $r > 0$. Из одномерности многообразия S_1 и липшицуемости функции $f(\varphi; r, 0)$ следует, что для каждого малого $r > 0$ и $i = 1, 2$ на S_1 найдется в точности $2|deg f(\varphi; r, 0) - 2|$ дуг $\widetilde{\varphi}_{i,j}$ и $\widehat{\varphi}_{i,j}$ $(j = 1, ..., |deg f(\varphi; r, 0) - 2|)$, обладающих следующими свойствами: 1) индексы пересечений $\chi_i(\sigma_i, Gr(f(\varphi; r, 0)); \widetilde{\varphi}_{i,j}) = (-1)^{i-1}$; 2) дуги $\widetilde{\varphi}_{i,j}$ и $\widehat{\varphi}_{i,j}$ перемежаются; 3) на дугах $\widehat{\varphi}_{i,j}$ система (8) решений не имеет; 4) угловые величины дуг $\widehat{\varphi}_{i,j}$ оцениваются снизу постоянной $2\pi/(C|deg f(\varphi; r, 0) - 2|)$, где $C > 0$ — постоянная, зависящая от константы липшицуемости функции $f(\varphi; r, 0)$. (Отметим, что *расположение на окружности* названных дуг может меняться существенным образом с изменением r; например, дуги могут поворачиваться.) Теперь для системы (7), мы получаем, что для любых достаточно малых ρ и любых $v \in H^{\perp}$, удовлетворяющих оценке $||v|| < Nr^{1+\nu}$, неизвестное φ, соответствующее с.в. с номером $n + i - 1$ $(i = 1, 2)$, не может совпасть с серединой $\phi_{i,j}$ любой дуги $\widehat{\varphi}_{i,j}$ $(j = 1, ..., |deg f(\varphi; r, 0) - 2|)$. Так как исходная задача (1), (3) равносильна задаче (6), (7), мы, учитывая теорему 4, получаем.

ТЕОРЕМА 5. *Для всех характеристических чисел $\gamma \in (\gamma_n - \delta, \gamma_n + \delta)$ и всех достаточно малых ρ с.в. задачи (1), (3) с номерами $n+i-1$ $(i = 1, 2)$ являются простыми и локализуются в непересекающихся областях:*

$$W_{i,j} = \{(\varphi, r, v): \ \ \varphi \in (\phi_{i,j}, \phi_{i,j+1}), \ \ r^2 + ||v||^2 = \rho^2, \ \ ||v|| < Nr^{1+\nu}\}$$

где $j = 1, ..., |degf(\varphi; r, 0) - 2|$. •

Чтобы вычислить индекс $\chi_{n+i-1}(P(n+i-1,1), Gr(\mathbf{A}+A); W_{i,j})$ мы зададим специальную гомотопию отображения A на области $W_{i,j}$. Обозначим через $g_{i,j} : [0,1] \times W_{i,j} \to W_{i,j}$ ретракцию области $W_{i,j}$ вдоль меридианов сферы S_ρ в дугу $\{\varphi \in (\phi_{i,j}, \phi_{i,j+1}), \quad r = \rho, \quad v = 0\}$, оставляющую эту дугу неподвижной. Искомая $(n+i-1)$ -гомотопия имеет вид

$$G(t)u = \mathbf{A}u + \pi_{n,n+1}A(g_{i,j}(t,u))\pi_{n,n+1}+$$

$$(1-t)(\pi^{\perp}A(u)\pi^{\perp} + \pi_{n,n+1}A(u)\pi^{\perp} + \pi^{\perp}A(u)\pi_{n,n+1}).$$

Она равномерно по $t \in [0,1]$ сохраняет оценки на компоненту v и тем самым гарантирует простоту всех малых решений и, как следует из системы (8), сохраняет оценки на углы φ для соответствующей (прогомотопированной) задачи (1), (3). При $t = 1$ мы получаем отображение $(\mathbf{A} + \pi_{n,n+1}A(g_{i,j}(1,u))\pi_{n,n+1}) : W_{i,j} \to L$, для которого плоскость $\{u_n, u_{n+1}\}$ является инвариантной. Поэтому индексы пересечений отображения $Gr(G(1))$ на области $W_{i,j}$ и отображения $Gr(f(\varphi; r, 0))$ на дуге $\widetilde{\varphi}_{i,j}$ совпадают:

$$\chi_{n+i-1}(P(n+1-i,1), Gr(G(1)); W_{i,j}) = \chi_i(\sigma_i, Gr(f(\varphi; r, 0)); \widetilde{\varphi}_{i,j}) = (-1)^{i-1} \neq 0.$$

Отличие индекса пересечения от нуля доказывает теорему 1.

Список литературы

1. Красносельский М.А., *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений* (1956).
2. Красносельский В.М., *Исследование малых решений одного класса нелинейных операторных уравнений*, ДАН СССР **180** (1968), no. 1, 22-24.
3. Красносельский В.М., *Исследование бифуркации малых собственных функций в случае многомерного вырождения*, ДАН СССР **195** (1970), no. 5, 1025-1028.
4. Дымарский Я.М., *О ветвях малых решений некоторых операторных уравнений*, Украинский математический журнал **48** (1906), no. 7, 901-909.
5. Дымарский Я.М., *Многообразия самосопряженных операторов с кратными собственными значениями*, Математическая физика, анализ, геометрия **8** (2001), no. 2, 148-157.
6. Дымарский Я.М., *О многообразиях собственных векторов линейных и квазилинейных конечномерных самосопряженных операторов. I*, Украинский математический журнал **53** (2001), no. 2, 156-167.
7. Дымарский Я.М., *О многообразиях собственных векторов линейных и квазилинейных конечномерных самосопряженных операторов. II*, Украинский математический журнал **53** (2001), no. 3, 296-301.

Луганский государственный педагогический университет,
ул. Оборонная, 2. Луганск. 91011 Украина
E-mail address: gunn@step.lep.lg.ua (for Dymarskii)