О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

© С.Д.Эйдельман, Ш. Камин, Ф.О.Порпер

Украина, Израиль, Россия

Объектом нашего исследования являются слабые решения $u(t,x)$ системы дивергентной структуры:

$$\rho(x)\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left(A_{ij}(t,x)\partial_{x_j}u + A_i(t,x)u\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t,x)\partial_{x_i}u + C(t,x)u = 0, \qquad (1)$$

где $\rho(x), A_{ij}(t,x), B_i(t,x), C(t,x)$ - квадратные матрицы-функции размера N, $u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_N(t,x))$. Выясняется как поведение матрицы $\rho(x)$ при $|x| \to \infty$ влияет на свойства решений системы.

В случае одного уравнения второго порядка этот вопрос обсуждался во многих работах (см., например, [1], [2], [13] и имеющуюся там библиографию). Для параболических по Петровскому систем произвольного порядка обычной структуры важные исследование в этом направлении опубликовали в 1963 году В.М.Борок и Я.М.Житомирский [9]. С.Д.Эйдельман в 1959 году опубликовал работу [10], в которой рассматривалась сильно параболическая по Вишику система вида (1) с $\rho(x) \equiv I$, устанавливалось, что для решений такой системы справедлив так называемый интегральный принцип максимума, с помощью которого доказывались теоремы единственности решений задачи Коши в пространствах быстро растущих функций, теоремы лиувиллевого типа и теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости решений задачи Коши. Настоящая работа является естественным продолжением работы [10].

1. Условия. Исходные определения. Предполагаются выполненными условия H:

H_1. Элементы матриц $\rho(x)$, $A_{ij}(t,x)$, $A_i(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ -вещественные измеримые соответственно в $\mathbb{R}^N$ и S_T функции.

H_2. Матрица $\rho(x)$ симметричная и для любого вектора b из $\mathbb{R}^N$ и любого вещественного q существуют положительные постоянные $C_1(q)$ и $C_2(q)$ такие, что

$$C_1(1+|x|^2)^{-1+q/2}\|b\|^2 \le (\rho(x)b,b) \le C_2(q)(1+|x|^2)^{-1+q/2}\|b\|^2$$

почти всюду в $\mathbb{R}^N$.

H_3. Существует такое $\mu > 1$, что для любых векторов $b^1,\dots,b^n$ из $\mathbb{R}^N$ справедливо неравенство:

$$\mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)b^i,b^j\right) \le \mu\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|^2$$

почти всюду в S_T.

H_4. При любом отличным от нуля q существует положительная постоянная $M = M(q) > 1$ такая, что

$\|A_i(t,x)\|, \|B_i(t,x)\| \le M(1+|x|^2)^{(q-1)/2}$, а $(C(t,x)b,b) \le M(1+|x|^2)^{q-1}\|b\|^2, \forall b \in \mathbb{R}^N$ почти всюду в S_T.

H_5. При $q=0$ существует положительная постоянная $M \ge 1$ такая, что

$$\|A_i(t,x)\|, \|B_i(t,x)\| \le M(1+|x|^2)^{-1/2}\ln(3+|x|^2),$$

$$(C(t,x)b,b) \le M(1+|x|^2)^{-1}\ln^2(3+|x|^2).$$

Напомним исходные определения.

Определение 1. *Вектор - функция $u(t,x)$ называется слабым решением (с.р.) уравнения (1) в S_T, если*

$$u(t,x) \in L^2_N[0,T;H^{1,2}_{Nloc}(\mathbb{R}^n)] \cap L^\infty_N[0,T;L^2_{Nloc}(\mathbb{R}^n)]$$

и для любой пробной функции $\varphi(t,x) \in C^1_{N,0}(S_T)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} [-(\rho u, \partial_t\varphi) + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}\partial_{x_j}u, \partial_{x_i}\varphi\right) + \\ + \sum_{i=1}^n (A_i u, \partial_{x_i}\varphi) - \sum_{i=1}^n (B_i\partial_{x_i}u, \varphi) - (Cu,\varphi)]dx = 0 \qquad (2)$$

Определение 2. *Под слабым решением задачи Коши*

$$u(+0,x) = u_0(x), \qquad u_0(x) \in L^2_{N,loc}(\mathbb{R}^n) \qquad (3)$$

в S_T понимается с.р. $u(t,x)$ системы (1) в S_T, удовлетворяющее начальному условию (3) в слабом смысле, т.е. для любой вектор-функции $\psi(x) \in L^2_{N,0}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}^n} (u(t,x),\psi(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x),\psi(x))\,dx. \qquad (4)$$

Для доказательсва существования решения задачи Коши (1), (3) мы привлечем свойства решений $u_k(t,x)$ задачи Дирихле для системы (1) в цилиндре $P_k = (0,T] \times B_k$, $B_k = \{x : |x| < k\}$, при начальном условии (3) и однородном граничном условии

$$u_k(t,x)|_{[0,T]\times\partial B_k} = 0. \qquad (5)$$

Заметим следующее: задача Дирихле для системы (1) может быть плохо поставленной (может не выполняться условие Лопатинского), но предположения $H_2 - H_3$ означают, что система (1) не только параболична по Петровскому (что не гарантирует хорошую постановку задачи Дирихле), а сильно параболична по Вишику, что уже гарантирует корректность задачи Дирихле для системы (1).

Определение 3. *Слабым решением задачи (1),(2),(5) в области P_k называется вектор-функция $u_k(t,x) \in L^2_N[0,T;H^{1,2}_{N,loc}(B_k)] \cap L^\infty_N[0,T;L^2_N(B_k)]$, для которой справедливо интегральное тождество (3) при любой пробной функции $\varphi(t,x) \in C^1_{N,0}(P_k)$, а равенство (4)- для любой пробной функции $\psi(x) \in L^2_{N,0}(B_k)$.*

Отметим, что в P_K вырожденность уравнения (1) непосредственно не сказывается, что позволяет использовать стандартную теорию параболических граничных задач, и содержательная часть исследования состоит в получении оценок, позволяющих перейти к пределу при $k \to \infty$.

2. Результаты. План исследования таков: вначале находятся оценки с.р. системы (1) энергетического типа и аналогичные оценки решений u_k последовательности задач Дирихле (1),(3),(5), затем с помощью этих оценок устанавливаются теоремы единственности и теоремы существования слабой задачи Коши (1), (3). Если $q \geq 0$ это позволяет установить классы корректности задачи (1), (3).

2.1. Оценки энергетического типа. Введем важные для всего дальнейшего функции:

$$\text{при } q \neq 0: \qquad H_q(t,x) = -\frac{C_1(1+|x|^2)^{q/2}}{|q|\chi_q[2(s-\eta)-(t-\eta)]},$$

$$\text{а при } q = 0: \qquad H_0(t,x) = -\frac{C_1\ln^2(3+|x|^2)}{\chi_0[2(s-\eta)-(t-\eta)]},$$

где C_1 взято из условия H_2, $0 \leq \eta < s \leq T$, положительные параметры χ_q и χ_0 зависят от μ, n, N, M.

С помощью функций $H_q(t,x)$, $\forall q$, введем весовую функцию

$$Q_q(t,x) = \exp[2H_q(t,x)].$$

Теорема 1. *Выполнены условия H, тогда при любом вещественном q для с.р. $u(t,x)$ системы (1) имеет место априорная оценка:*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\rho u,u)\,\xi^2 Q_q dx\Big|_{t_1}^{t_2} &+ K_1(\mu)\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n\|\partial_{x_i}u\|^2\xi^2 Q_q dx \\ &\leq K_2(\mu)\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|u\|^2\sum_{i=1}^n(\partial_{x_i}\xi)^2 Q_q dx, \qquad (6)\end{aligned}$$

для $\forall t_1, t_2$, $\eta \leq t_1 < t_2 \leq s$ и $s-\eta \leq C_1\chi_q^{-1}$, где $\xi(x)$- срезывающая функция.

Теорема 2. *Выполнены условия H, тогда при любом вещественном q и любом k для с.р. $u_k(t,x)$ задачи (1), (3), (5) справедлива априорная оценка:*

$$\int\limits_{B_k}(\rho u_k,u_k)\,Q_q dx\Big|_{t_1}^{t_2} + K_3(\mu)\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{B_k}\sum_{i=1}^n\|\partial_{x_i}u_k\|^2 Q_q dx \leq 0 \qquad (7)$$

при тех же значениях параметров, что и в (6).

2.2 Теоремы единственности и теоремы существования решений слабой задачи Коши (1), (3).

Введем необходимые для формулировок теорем существования и теорем единственности решений слабой задачи Коши (1),(3) функциональные пространства. Пусть λ, γ, q произвольные вещественные числа. Через $L_N^2(S_T; \lambda, q)$ будем обозначать гильбертово пространство вектор-функций $v(t,x)$ из $L_{N,loc}^2(S_T)$, для которых конечны нормы:

$$\|v; S_T, \lambda, q\| = \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|v(t,x)\|^2\exp\{-2\lambda(1+|x|^2)\}^{q/2}dtdx\right)^{1/2} \quad \text{при } q > 0,$$

$$\|v; S_t, \lambda, 0\| = \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \|v(t,x)\|^2 \exp\{-2\lambda \ln^2(3+|x|^2)\} dt dx \right)^{1/2}$$

$$\|v; S_T, 0, q\| = \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \|v(t,x)\|^2 (1+|x|^2)^{(q-2)/2} dt dx \right)^{1/2} \quad \text{при } q < 0.$$

Через $L_N^2(\mathbb{R}^n, \gamma, q)$ будем обозначать гильбертово пространство вектор-функций $v_0(x)$ из $L_{Nloc}^2(\mathbb{R}^n)$, для которых конечны нормы:

$$\|v_0; \mathbb{R}^n, \gamma, q\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|v_0(x)\|^2 \exp\{-2\gamma(1+|x|^2)\}^{q/2} dx \right)^{1/2} \quad \text{при } q > 0,$$

$$\|v_0; \mathbb{R}^n, \gamma, 0\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|v_0(x)\|^2 \exp\{-2\gamma \ln^2(3+|x|^2)\} dx) \right)^{1/2},$$

$$\|v_0; \mathbb{R}^n, 0, q\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|v_0(x)\|^2 (1+|x|^2)^{(q-2)/2} dx \right)^{1/2} \quad \text{при } q < 0,$$

Задачу Коши с нулевыми начальными условиями будем обозначать (1),(3_0)

Используя теорему 1, последовательность срезывающих функций $\xi_R(x) : \xi_R(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \xi_R(x) \le 1$, $\xi_R(x) \equiv 1$ при $|x| \le R$, $\xi_R(x) \equiv 0$ при $|x| > R+2$, $|\partial_x \xi_R(x)| \le 1$, предположения о рассматриваемых решениях $u(t,x)$ слабой задачи Коши (1), (3_0) и переходя в неравенстве (6) к пределу при $R \to \infty$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3 (единственности). *Выполнены условия H. Тогда любое решение $u(t,x)$ слабой задачи Коши (1), (3_0), принадлежащее при $q \ge 0$ пространству $L_N^2(S_T; \lambda, q)$ с некоторым положительным λ или пространству $L_N^2(S_T)$ при $q < 0$, почти всюду в S_T равно нулю.*

При доказательстве теоремы 4 существования решения слабой задачи Коши (1), (3) существенно используется факт существования решений у последовательности задач Дирихле (1), (3), (5), следующий из сильной параболичности системы (1) и энергетическая оценка (7).

Теорема 4 (существования). *Выполнены условия H, а начальная вектор-функция $u_0(x)$ принадлежит, если $q \ge 0$, пространству $L_N^2(\mathbb{R}^n; \gamma, q)$ с некоторым положительным q или, если $q < 0$, пространству $L_N^2(\mathbb{R}^n; 0, q)$.*

Тогда существует решение $u(t,x)$ слабой задачи Коши (1)- (3) и

1) Если $q > 0$, то $u(t,x)$ определено в слое S_{T_1}, $T_1 = \frac{C_1}{\chi_q} \min\left(1, \frac{1}{2q(\gamma+\varepsilon)}\right)$ при некотором $\varepsilon \in (0, 1/2)$, и при любом $\lambda > \lambda_q = \max\left(\frac{1}{2}, 2(\gamma+\varepsilon)\right)$ справедлива оценка

$$\|u; S_{T_1}, \lambda, q\| \le K_4\,(N, q, C_1, C_2, \lambda - \lambda_q, T_1, \varepsilon,)\, \|u_0; \mathbb{R}^n, \gamma, q\| \tag{8}$$

2) Если $q = 0$, то $u(t,x)$ определено в слое S_{T_2}, $T_2 = \frac{C_1}{\chi_0} \min\left(1, \frac{1}{2\gamma}\right)$, и при любом $\lambda > \lambda_0 = \min(1, 2\gamma)$ справедлива оценка

$$\|u; S_{T_2}, \lambda, 0\| \le K_5\,(N, C_1, C_2, \lambda - \lambda_0, T_2)\, \|u_0; \mathbb{R}^n, \gamma, 0\| \tag{9}$$

3) Если $q < 0$, то $u(t,x)$ определено в слое S_{T_3}, $T_3 = \frac{C_1}{\chi_q}$ и справедлива оценка

$$\|u; S_{T_3}, 0, q\| \le K_6\left(N, C_1, C_2, |q|, T_3\right)\|u_0; \mathbb{R}^n, 0, q\|. \tag{10}$$

В заключении заметим, что рассуждения, изложенные в процессе доказательства теоремы 4, дают возможность перейти к пределу при $k \to \infty$ уже в неравенстве (7), если предварительно продолжить вектор-функции $u_k(t,x)$ нулем на весь слой S_T, при этом получится более полная информация о решении $u(t,x)$, существование которого утверждает теорема 4.

Теорема 5. *Выполнены условия теоремы 2. Тогда в слое $S_{T'}$, $T' \le T$, где $T' = T_1$, в случае 1); $T' = T_2$ в случае 2) и $T' = T_3$ в случае 3), для найденного решения $u(t,x)$ слабой задачи Коши (1) (3) справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\rho(x)u(t_2,x), u(t_2,x)\right) Q_q(t_2,x)dx \quad + \quad K_3(\mu)\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=0}^{n}\|\partial_{x_i}u\|^2 Q_q dx$$
$$\le \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\rho(x)u, u\right) Q_q(t_1,x)dx \tag{11}$$

для любых t_1, t_2, $0 \le \eta \le t_1 < t_2 \le s$.

3. Комментарии.

3.1. При получении энергетических оценок (6), (7) и установлении теоремы 3 единственности слабой задачи Коши (1), (3) используется только оценки снизу квадратической формы $(\rho(x)b, b)$, а при доказательстве теоремы 4 существования - двусторонняя оценка.

3.2 Построение (теорема 4) решения слабой задачи Коши (1), (3) в случае $q \ge 0$ принадлежат классам единственности этой задачи (теорема 3) и вместе с оценкой (11) представляет достаточно содержательную информацию о классах корректности задачи (1), (3). Любопытно, что предложенная универсальная (при любом q) методика оценок все же дает некий результат и в случае $q < 0$. Но этот самый интересный случай требует дополнительного исследования.

Чтобы понять какая ситуация наблюдается в этом случае полезно следующее замечание: уравнение

$$|x|^{-2+q}\partial_t u = \triangle u \equiv \partial^2_{x_1}u + \cdots + \partial^2_{x_n}u, \qquad q < 0 \tag{12}$$

имеет автомодельное решение вида

$$w(t,x) \equiv f(rt^{-1/q}) = \int\limits_0^{rt^{-1/q}} \exp\{-s^q q^{-2}\}s^{1-n}ds, \qquad r = |x|. \tag{13}$$

В наших работах [1], [13] с помощью автомодельного решения (13) устанавливаются некоторые точные теоремы единственности решения задачи Коши, при этом классы единственности существенно зависят от числа пространственных координат.

3.3. Из априорной оценки (6) следует, если специальным образом выбрать последовательность пробных функций $\xi_R(x)$ и перейти к пределу при $R \to \infty$, то для решений $u(t,x)$ системы (1) из пространств $L^2_N(S_T; \lambda, q)$ справедливо такое неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\rho(x)u(t_2,x), u(t_2,x)\right) Q_q(t_2,x)dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\rho(x)u(t_1,x), u(t_1,x)\right) Q_q(t_1,x)dx$$

$\forall t_1, t_2,\ 0 \le \eta \le t_1 < t_2 \le s$. Это и есть интегральный принцип максимума для решений сильно параболической системы (1) интересный и сам по себе и разнообразными применениями.

3.4. К обсуждаемому циклу вопросов относится и работа [11], в которой рассматривается эволюция L_2 норм сильно параболических систем произвольного порядка дивергентной структуры с диссипацией и обобщается интересное исследование Takasi Kusano [12], в котором в случае параболических уравнений второго порядка изучается каким образом под действием диссипации быстро растущее (при $|x| \to \infty$) вначале решение становится ограниченным, а потом и убывающим при $|x| \to \infty$.

Список литературы

[1] S.Eidelman, S.Kamin and F.Porper, *Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations degenerating at infinity.* Asymptotic analysis - 2000-22 -p.349-358.

[2] S.D.Eidelman, S.Kamin and F.Porper, *On classes of uniqueness of the Cauchy problem for some evolution second order equations.* Доповіді НАНУ -2000 -1 -с.34-37.

[3] Aronson D.G., *Non-negative solutions of linear parabolic equations.* Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa -1968 -22 -p.607-694.

[4] Ладыженская О.А.,Солонников В.А.,Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* -Москва: Наука -1967 -с.736.

[5] Порпер Ф.О.,Эйдельман С.Д., *Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения.* Успехи мат.наук -1984 -39, N3 -с.107-156.

[6] Порпер Ф.О.,Эйдельман С.Д., *Свойства решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами.* Труды Моск.мат.об-ва -1992 -с.118-159.

[7] Eidus D., *The Cauchy problem for the nonlinear filtration equation in an inhomogeneous medium.* J.Differ.Equations -1990 -84 -p.309-318.

[8] Eidus D.,Kamin S., *The filtration equation in a class function deceasing at infinity.* Proc. Amer. Math. Soc. -1994 -120 -p.825-830.

[9] Борок В.М.,Житомирский Я.И. *Задача Коши для параболических систем, вырождающихся на бесконечности.* Записки мех.мат факультета Харьков. ун-та и Харьков. мат.общества - 1963-29. С.3-15.

[10] Эйдельман С.Д. *Интегральный принцип максимумадля сильно параболических систем и некоторые его приложения.* Известия высших учебных заведений -1959 -N3(9)- С.252-258.

[11] Эйдельман С.Д.,Порпер Ф.О. *Исследование поведения L_2-норм решений сильно параболических систем.* Известия Академии наук СССР. Серия матем.- 1973-37 -С.676-690.

[12] Takasi Kusano. *Remars on the behavior of solutions of second order parabolic equations with unbounded coefficients.* Funkcialaj Ekvacioj - 1968 -11 P.197-205.

[13] Eidelman S.D, S.Kamin and F.Porper *Once more about Cauchy problem for evolution equation.* Нелинейные граничные задачи -2000 -10, С.75-82.

Str.Prorizna 4, apt.25, 01034, Kyiv, Ukraine
E-mail address: seidelman@amath.pp.kiev.ua

School of Mathematical Sciences Tel Aviv University

Str.Moiseeva 1, apt. 112, 394006, Voronezh, Russia.