ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

© С.П. Лавренюк, Н.П. Процах

Краков, Польша, Львов, Украина

Ультрапараболічні рівняння виникають при дослідженні теорії броунівського руху, марківських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, кінетичній теорії, в біології, теорії бінарних електролітів, теорії сповільнення електронів, теорії ймовірності [1-3] та інших областях науки. Вперше рівняння такого типу ввів А.Н.Колмогоров [3] для опису неізотропних процесів. Пізніше різноманітні задачі для ультрапараболічних рівнянь досліджувалися багатьма авторами [3-15]. Зокрема, в [4-6] доведено існування єдиного розв'язку задачі Коші з використанням властивостей фундаментальних розв'язків ультрапараболічних рівнянь, у [7,8] подано інтегральне зображення розв'язків таких задач.

Задачі без початкових умов для параболічних рівнянь вивчені у [16-18]. В [17-18] отримано розв'язність таких задач у просторах Гельдера, в [16] доведено існування єдиного розв'язку задач без початкових умов без припущень на зростання правої частини на $-\infty$.

У цій праці досліджено задачу без початкових умов (задачу Фур'є) для нелінійного ультрапараболічного рівняння. Одержано умови розв'язності цієї задачі без обмежень на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. При цьому використано методи, відомі для рівнянь параболічного та гіперболічного типів. Задачу досліджено в узагальнених просторах Лебега [19].

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ; $\widehat{\Omega} = \Omega \times (0, y_0)$, $Q = \widehat{\Omega} \times (-\infty, T)$, $-\infty < T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = \widehat{\Omega} \times (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, $Q_\tau = \widehat{\Omega} \times (-\infty, \tau)$; $\widehat{\Omega}_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$.

В області Q розглянемо задачу без початкових умов

$$u_t - \lambda(y,t)u_y - \sum_{i,l=1}^{n} (a_{il}(x,y,t)u_{x_i})_{x_l} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$
$$+c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t), \tag{1}$$
$$u|_{\Gamma\times(0,y_0)\times(-\infty,T)} = 0, \; u(x,y_0,t) = 0. \tag{2}$$

Розглянемо простір $L^{p(x)}(\widehat{\Omega})$ з нормою

$$\|v; L^{p(x)}(\widehat{\Omega})\|| = \inf\{\mu > 0 : \int_{\widehat{\Omega}} |v|^{p(x)}/\mu^{p(x)} dx < 1\}.$$

Введемо простір $V^{1,0,0}_{\rm loc}(Q)$ як замикання множини функцій $C^\infty([t_1,t_2];C_0^\infty(\widehat{\Omega}))$ за нормою $\|u_x\|_{L^2(Q_{t_1,t_2})}+\ \|u\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})}$ для кожного $t_1,t_2\in(-\infty,T]$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) $a_{il}, a_{il,x_k}\in L^\infty(Q),\quad (x,y,t)\in Q,\ i,l,k=1,\dots,n;$

$$a_0|\xi|^2\leqslant\sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t)\xi_i\xi_l;\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n, a_0=\text{const}>0;$$

(B) $b_i\in L^\infty(Q),\ i=\overline{1,n};$

(C) $c\in L^\infty(Q);$

(G) $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$, неперервна за ξ майже для всіх $(x,y,t)\in Q$;

$(g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta))(\xi-\eta)\geqslant g_0|\xi-\eta|^{p(x)};\quad |g(x,y,t,\xi)|\leqslant g^0|\xi|^{p(x)-1}$

для майже всіх $(x,y,t)\in Q$ і всіх $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^1$; $g_0=\text{const}>0,\ g^0=\text{const}>0;$

(F) $f\in L^{p'(x)}_{\rm loc}(\overline{Q}),\qquad 1/p(x)+1/p'(x)=1;$

(L) $\lambda,\ \lambda_y\in C((-\infty,T]\times[0,y_0]),\ \lambda(y,t)>0,\ \forall(y,t)\in[0,y_0]\times(-\infty,T];$

(P) $p\in L^\infty(\Omega),\ 2<p_1=\operatorname*{ess\,inf}_\Omega p(x)\leqslant\operatorname*{ess\,sup}_\Omega p(x)=p_2<+\infty;\ x\in\overline{\Omega}.$

ОЗНАЧЕННЯ. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію* $u\in V^{1,0,0}_{\rm loc}(Q)\cap C(-\infty,T;L^2(\widehat{\Omega}))$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_2}} uv\,dx\,dy+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_t}\lambda(0,t)uv\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Big[-uv_t+\lambda(y,t)uv_y+\lambda_y(y,t)uv+$$
$$+\sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_l}+\sum_{i=1}^n b_i(x,y,t)u_{x_i}v+c(x,y,t)uv+g(x,y,t,u)v\Big]\,dx\,dy\,dt=$$
$$=\int\limits_Q f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt-\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_1}}uv\,dx\,dy \tag{3}$$

для довільної функції $v\in C^1((-\infty,T];C_0^\infty(\widehat{\Omega}))$, *та всіх* t_1, t_2 *таких, що* $t_1<t_2\leqslant T$.

2. Існування розв'язку

ТЕОРЕМА 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**-**(L)**, **(P)**, a_{ilt}, a_{iltt}, a_{ily}, b_{iy}, b_{it}, c_y, $c_t\in L^\infty(Q)$, $i,l=\overline{1,n}$; *існують сталі* $a_1\geqslant0$ *така, що* $a_1|\xi|^2\leqslant\sum\limits_{i,l=1}^n a_{ilt}(x,y,t)\xi_i\xi_l$; $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ *та* $G_0\geqslant0$, g^1, $\tilde g^1$ *такі, що* $|g_\xi(x,y,t,\xi)|\geqslant G_0|\xi|^{p(x)-2}$; $|g_y(x,y,t,\xi)|\leqslant\tilde g^1|\xi|^{p(x)-1}$; $|g_t(x,y,t,\xi)|\leqslant g^1|\xi|^{p(x)-1}$; $f_y,f_t\in L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$, $f(x,y_0,t)=0$; $p_2=2+\frac{2}{n}$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1),(2).*

Доведення. 1. В області $Q_{t_0,T}$ ($t_0 < T$ - довільне) розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з умовами (2) та $u(x,y,t_0)=0$. Нехай $\{\varphi^k(x)\}$ – база простору $H_0^1(\Omega)\cap L^{p(x)}(\Omega)$,

$$\varphi^{k,s}(x,y)=\varphi^k(x)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y,\ u^{j,t_0}(x,y,t)=\sum_{k,s=1}^{j}c_{ks}^j(t)\varphi^{k,s}(x,y),\ j=1,2,\dots \tag{4}$$

де $c_{ks}^j(t)$ є розв'язком задачі

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau}\Big[u_t^{j,t_0}\varphi^{k,s}-\lambda(y,t)u_y^{j,t_0}\varphi^{k,s}+\sum_{i,l=1}^{n}a_{il}(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}\varphi_{x_l}^{k,s}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}\varphi^{k,s}+$$

$$+c(x,y,t)u^{j,t_0}\varphi^{k,s}+g(x,y,t,u^{j,t_0})\varphi^{k,s}\Big]\,dx\,dy=\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau}f(x,y,t)\varphi^{k,s}\,dx\,dy, \tag{5}$$

$$c_{ks}^j(t_0)=0,\qquad k,s\in\{1,\dots,j\}. \tag{6}$$

За теоремою Каратеодорі [20, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (5) - (6). Домножимо (5) на $c_{ks}^j(t)$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t по проміжку $[t_0,\tau]$ і оцінимо кожний доданок отриманої рівності. Матимемо:

$$\tau_1=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}u_t^{j,t_0}u^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt=\frac12\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau}(u^{j,t_0})^2\,dx\,dy;$$

$$\tau_2=-\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\lambda(y,t)u_y^{j,t_0}u^{j,t_0}dxdydt=\frac12\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(0,t)(u^{j,t_0}(x,0,t))^2\,dx\,dt+$$

$$+\frac12\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\lambda_y(y,t)(u^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_3=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i,l=1}^{n}a_{il}(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}u_{x_l}^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\geqslant a_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_4=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}b_i(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}u^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant\frac12\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^{n}\delta(b^0)^2(u_{x_i}^{j,t_0})^2+\frac{n}{\delta}(u^{j,t_0})^2\Big]\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_5=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}c(x,y,t)u^{j,t_0}u^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant c^0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}(u^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_6=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}g(x,y,t,u^{j,t_0})u^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\geqslant g_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^{j,t_0}|^{p(x)}\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_7=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f(x,y,t)u^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left[\frac{|f(x,y,t)|^{p'(x)}}{p'(x)\delta^{\frac{1}{p_1-1}}}+\frac{\delta|u^{j,t_0}|^{p(x)}}{p(x)}\right]dx\,dy\,dt,$$

де $c(x,y,t) \leqslant c^0 = \text{const}$, $|b_i(x,y,t)| \leqslant b^0 = \text{const}$, $\forall i = \overline{1,n}$. Вибравши δ з умов $2a_0 - (b^0)^2\delta > 0$, $g_0 \geqslant \delta p_1^{-1}$, врахувавши ці оцінки та застосувавши лему Гронуолла - Беллмана до отриманої з них нерівності, одержимо оцінку

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau} (u^{j,t_0})^2\,dx\,dy + \int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega} \lambda(0,t)(u^{j,t_0})^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n}(u^{j,t_0}_{x_i})^2 + |u^{j,t_0}|^{p(x)}\right] dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_{Q} |f|^{p'(x)}\,dx\,dy\,dt, \tag{7}$$

в якій стала M_1 не залежить від j.

2. Зауважимо, що $\left(\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y\right)_{yy} = -\omega_s \cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$, де $\omega_s = \left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}\right)^2$. Доможимо (5) на $c^j_{ks}(t)\omega_s$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t від t_0 до τ та замінимо значення $\sum\limits_{s,k=1}^{j} c^j_{ks}(t)\omega_s\varphi^{k,s}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u^{j,t_0}_{yy}$. Після таких перетворень оцінимо кожний з доданків одержаної рівності окремо:

$$\tau_8 = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u^{j,t_0}_t u^{j,t_0}_{yy}\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u^{j,t_0}_{ty} u^{j,t_0}_{y}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau} (u^{j,t_0}_y)^2\,dx\,dy;$$

$$\tau_9 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \lambda(y,t) u^{j,t_0}_y u^{j,t_0}_{yy}\,dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega} \lambda(y_0,t)(u^{j,t_0}_y)^2\,dx\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \lambda_y(y,t)(u^{j,t_0}_y)^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{10} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t) u^{j,t_0}_{x_i} u^{j,t_0}_{x_l yy}\,dx\,dy\,dt \geqslant a_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} (u^{j,t_0}_{x_i y})^2\,dx\,dy\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\tilde{a}n}{\delta}(u^{j,t_0}_{x_i})^2 + n\delta(u^{j,t_0}_{x_i y})^2\right] dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{11} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t) u^{j,t_0}_{x_i} u^{j,t_0}_{yy}\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\tilde{b}\delta \sum_{i=1}^{n}(u^{j,t_0}_{x_i})^2 + \right.$$
$$\left. + (b^0)^2\delta \sum_{i=1}^{n} (u^{j,t_0}_{x_i y})^2 + \frac{2n}{\delta}(u^{j,t_0}_y)^2\right] dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{12} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} c(x,y,t) u^{j,t_0} u^{j,t_0}_{yy}\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\left(\frac{\tilde{c}}{\delta} + 2c^0\right)(u^{j,t_0}_y)^2 + \delta(u^{j,t_0})^2\right] dx\,dy\,dt.$$

Зауважимо, що $|g(x,y_0,t,u^{j,t_0}(x,y_0,t))| \leqslant g_0|u^{j,t_0}(x,y_0,t)|^{p(x)-1} = 0$. Тому, застосувавши умову (**G**), та, оскільки, на підставі властивостей функцій з простору

$L^{p(x)}(Q_{t_0,T})$ існує стала r така, що

$$\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left(\frac{\partial g(x,y,t,u^{j,t_0})}{\partial y}\right)^2 dx\,dy\,dt \leqslant \frac{(\tilde{g}^1)^2\delta}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^{j,t_0}|^{2(p(x)-1)}\,dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\tilde{g}^1)^2\delta}{2}\|u^{j,t_0};L^{2(p(x)-1)}(Q_{t_0,\tau})\|^r \leqslant \frac{(\tilde{g}^1)^2\delta\mu}{2}\left(\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n(u^{j,t_0}_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt\right)^{r/2} \leqslant M_2,$$

M_2- стала, одержимо

$$\tau_{13} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} g(x,y,t,u^{j,t_0})u^{j,t_0}_{yy}\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant G_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^{j,t_0}|^{p(x)-2}|u^{j,t_0}_y|^2\,dx\,dy\,dt - \frac{1}{2\delta}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}(u^{j,t_0}_y)^2\,dx\,dy\,dt - M_2;$$

$$\tau_{14} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f(x,y,t)u^{j,t_0}_{yy}\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left[\delta|f_y|^2+\frac{1}{\delta}|u^{j,t_0}_y|^2\right]dx\,dy\,dt,$$

Тут $\tilde{a} = \max\limits_{i,l}\sup\limits_{Q}|a_{il,y}(x,y,t)|^2$, $\tilde{b} = \max\limits_{i}\sup\limits_{Q}|b_{iy}(x,y,t)|^2$, $\tilde{c} = \sup\limits_{Q}|c_y(x,y,t)|^2$. За теоремою вкладення знаходимо, що в умові $(\mathbf{P})$ $p_2 = \frac{2n+2}{n}$. Зауважимо, якщо $g(x,y,t,\xi) \equiv g(x,t,\xi)$, то $\tilde{g}^1 = 0$ і, отже, $p_2 < +\infty$ при довільному n. Після проведених оцінок, використавши (7) та вибравши δ з умови $2a_0 - n\delta - (b^0)^2\delta > 0$, застосувавши лему Гронуолла - Беллмана, матимемо оцінку

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau}(u^{j,t_0}_y)^2\,dx\,dy + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n(u^{j,t_0}_{x_iy})^2\,dx\,dy\,dt \leqslant M_3\int\limits_{Q}\left(|f|^{p'(x)}+|f_y|^2\right)dx\,dy\,dt + M_4, \quad (8)$$

в якій сталі M_3, M_4 не залежать від j.

3. Оскільки $u^{j,t_0}(x,y,t_0) = 0$ і виконується умова $(\mathbf{G})$, то з (5) випливатиме, що

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_0}}(u^{j,t_0}_t)^2\,dxdy \leqslant \int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_0}}|f(x,y,t_0)|^2\,dxdy.$$

Продиференціюємо (5) за t, домножимо на $c^j_{kst}\,(t)$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t від t_0 до τ і оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$\tau_{16} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u^{j,t_0}_{tt}u^{j,t_0}_t\,dx\,dy\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\widehat{\Omega}_\tau}(u^{j,t_0}_t)^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_0}}|f(x,y,t_0)|^2\,dxdy;$$

$$\tau_{17} = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left[\lambda_t(y,t)u^{j,t_0}_y + \lambda(y,t)u^{j,t_0}_{yt}\right]u^{j,t_0}_t\,dx\,dy\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left[|\lambda_1|^2\frac{(u^{j,t_0}_y)^2}{\delta}+\right.$$

$$+\delta(u_t^{j,t_0})^2\Big]\,dx\,dy\,dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}\lambda(0,t)(u_t^{j,t_0})^2\,dxdt+\int_{Q_{t_0,\tau}}\frac{\lambda_y}{2}(u_t^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{18}=\int_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i,l=1}^{n}\left(a_{il}(x,y,t)u_{x_it}^{j,t_0}+a_{ilt}(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}\right)u_{x_lt}^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_{Q_{t_0,T}}\sum_{i=1}^{n}\left[a_0(u_{x_it}^{j,t_0})^2-\frac{a^2}{2}(u_{x_i}^{j,t_0})^2\right]dx\,dy\,dt+\frac{a_1}{2}\int_{\widehat{\Omega}_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{j,t_0})^2\,dx\,dy.$$

$$\tau_{19}=\int_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left[b_{it}(x,y,t)u_{x_i}^{j,t_0}+b_i(x,y,t)u_{x_it}^{j,t_0}\right]u_t^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_{Q_{t_0,\tau}}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\delta(b^0)^2(u_{x_it}^{j,t_0})^2+$$

$$+\frac{n}{\delta}(u_t^{j,t_0})^2+\frac{(b^1)^2}{\delta}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{j,t_0})^2+n\delta(u_t^{j,t_0})^2\Bigg]\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{20}=\int_{Q_{t_0,\tau}}\left[c_t(x,y,t)u^{j,t_0}+c(x,y,t)u_t^{j,t_0}\right]u_t^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{Q_{t_0,\tau}}\left[c^0(u_t^{j,t_0})^2+\frac{\delta}{2}(u_t^{j,t_0})^2+\frac{(c^1)^2}{2\delta}(u^{j,t_0})^2\right]dx\,dy\,dt;$$

За теоремою вкладення та оцінкою (8)

$$\tau_{21}=\int_{Q_{t_0,\tau}}g_t(x,y,t,u^{j,t_0})u_t^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\geqslant$$

$$\geqslant G_0\int_{Q_{t_0,\tau}}|u^{j,t_0}|^{p(x)-2}|u_t^{j,t_0}|^2\,dx\,dy\,dt-\frac{1}{2\delta}\int_{Q_{t_0,\tau}}(u_t^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt-M_5;$$

$$\tau_{22}=\int_{Q_{t_0,\tau}}f_t(x,y,t)u_t^{j,t_0}\,dx\,dy\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_{Q_{t_0,\tau}}\left[\frac{|f_t(x,y,t)|^2}{\delta}+\delta|u_t^{j,t_0}|^2\right]dx\,dy\,dt.$$

Тут $a^2=\max\limits_{i,l}\sup\limits_{Q}|a_{il,tt}(x,y,t)|^2$, $b^1=\max\limits_{i}\sup\limits_{Q}|b_{it}(x,y,t)|^2$, $c^1=\sup\limits_{Q}|c_t(x,y,t)|^2$, Після проведених оцінок, вибравши $\delta>0$ з умови $2a_0-(b^0)^2\delta>0$ та застосувавши лему Гроноулла - Беллмана і оцінку (8), матимемо нерівність

$$\int_{\widehat{\Omega}_\tau}(u_t^{j,t_0})^2\,dx\,dy+\int_{t_0}^{\tau}\int_{\Omega}\lambda(0,t)(u_t^{j,t_0})^2\,dx\,dt+\int_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_it}^{j,t_0})^2\,dx\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_6\int_{Q}\left[|f|^{p'(x)}+|f_y|^2+|f_t|^2\right]dx\,dy\,dt \qquad (9)$$

в якій стала M_6 не залежить від j. З оцінок (7)-(9) випливають такі збіжності деякої підпослідовності $\{u^{j_k,t_0}\}$ послідовності $\{u^{j,t_0}\}$:

$$u^{j_k,t_0} \to u^{t_0} - *\text{- слабко в } L^\infty(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}));\ u^{j_k,t_0}_{x_i} \to u^{t_0}_{x_i} \text{ слабко в } L^2(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}));$$
$$u^{j_k,t_0} \to u^{t_0}\text{-слабко в } L^{p(x)}(Q_{t_0,T});\ \sqrt{\lambda(0,\cdot)}u^{j_k,t_0}(\cdot,0,\cdot) \to \xi_1 \text{ слабко в } L^2((t_0,T)\times\Omega);$$
$$u^{j_k,t_0}(\cdot,\cdot,T) \to \sigma - \text{ слабко в } L^2(\widehat{\Omega});\ u^{j_k,t_0}_y \to u^{t_0}_y *\text{-слабко в } L^\infty(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}));$$
$$u^{j_k,t_0}_t \to u^{t_0}_t *\text{- слабко в } L^\infty(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega})). \tag{10}$$

З умови $(\mathbf{G})$ та збіжностей (10) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} |g(x,y,t,u^{j,t_0})|^{p(x)}\,dx\,dy\,dt \leqslant M_7 \int\limits_{Q_{t_0,T}} |u^{j,t_0}|^{p(x)}\,dx\,dy\,dt \leqslant M_8 \int\limits_Q |f|^{p'(x)}\,dx\,dy\,dt,$$

де стала M_8 не залежить від j. Звідси випливатиме, що

$$g(x,y,t,u^{j,t_0}) \to \chi \text{ слабко в } L^{p'(x)}(Q_{t_0,T}). \tag{11}$$

Оскільки $u^{j_k,t_0} \to u^{t_0}$, $u^{j_k,t_0}_y \to u^{t_0}_y$ слабко в $L^\infty(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}))$, то $u^{j_k,t_0} \to u^{t_0}$ слабко в $W^{1,2}(0,y_0;L^2([t_0;T]\times\Omega))$. Тоді $\lim\limits_{j_k\to\infty}\int\limits_{Q_{t_0,T}} u^{j_k,t_0}_y v\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_{t_0,T}} u^{t_0}_y v\,dx\,dy\,dt.$
З одержаних збіжностей та (5) знаходимо, що $u^{t_0}(x,y_0,t)=0, \sqrt{\lambda(0,t)}u^{t_0}(x,0,t) = \xi_1$ майже для всіх $(x,t)\in\Omega\times(t_0,T)$. Крім того, оскільки $u^{j_k,t_0}\to u^{t_0}$, $u^{j_k,t_0}_t \to u^{t_0}_t$ $*$- слабко в $L^\infty(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}))$, то $u^{t_0}\in C(t_0,T;L^2(\widehat{\Omega}))$, вираз $u^{t_0}(x,y,t_0)$ має зміст і $u^{t_0}(x,y,t_0)=0$, $u^{t_0}(x,y,T)=\sigma$.

Легко показати за схемою [21, с. 169], що u^{t_0} – розв'язок мішаної задачі, яка розглядалася в області $Q_{t_0,T}$.

4. Розглянемо в області $Q_{t_0,T}$ задачу (1)–(2) з початковою умовою

$$u(x,y,t_0)=0. \tag{12}$$

Виберемо $t_0 = T-1,\ T-2,\dots,T-k$ і отримаємо послідовність функцій $\{u^k\}$, які єрозв'язками мішаної задачі (1)-(2),(12) при відповідному t_0. Продовжимо кожну з функцій послідовності нулем в область Q_{T-k} і збережемо для неї те саме позначення. Існування розв'язків мішаних задач доведено. Очевидно, що функція u^k є розв'язком задачі без початкових умов (1)-(2) з правою частиною f_k в рівнянні (1), де

$$f_k(x,y,t) = \begin{cases} f(x,y,t), & (x,y,t)\in Q_{T-k,T};\\ 0, & (x,y,t)\in Q_{T-k}.\end{cases}$$

Виберемо функцію $\theta_1(t)$ [16, с. 24] таку, що $\theta_1\in C^1(\mathbb{R})$, $\theta_1'(t)\geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $0\leqslant\theta_1(t)\leqslant 1$; $\theta_1(t)=0$, якщо $t\in(-\infty;-1]$, $\theta_1(t)=\exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t\in(-1;-1/2]$, $\theta_1(t)\geqslant\exp\{-2\}$, якщо $t\in(-1/2;0)$, $\theta_1(t)=1$, якщо $t\in[0,+\infty)$. Зауважимо, що

$$\sup_{\mathbb{R}}\theta_1'(t)\theta_1^{-\varkappa}(t)\leqslant C, \tag{13}$$

де $0 < \varkappa < 1$, C – стала, яка залежить тільки від $\varkappa$. Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ в просторах $C(-\infty,T;L^2(\widehat{\Omega}))$ та $V_{\rm loc}^{1,0,0}(Q)$.

Функція $u^m - u^k$ задовольнятиме рівняння

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_2}} (u^m - u^k)v\,dx\,dy + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_t} \lambda(0,t)(u^m - u^k)v\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(u^m - u^k)v_t +$$

$$+\lambda(y,t)(u^m - u^k)v_y + \lambda_y(y,t)(u^m - u^k)v + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)(u^m_{x_i} - u^k_{x_i})v_{x_l} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)(u^m_{x_i} - u^k_{x_i})v + c(x,y,t)(u^m - u^k)v + (g(x,y,t,u^m) -$$

$$-g(x,y,t,u^k))v\Big]\,dxdydt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f_m(x,y,t) - f_k(x,y,t))v\,dxdydt + \int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_1}} (u^m - u^k)v\,dxdy \qquad (14)$$

для довільної функції $v \in C^1((-\infty,T];C_0^\infty(\widehat{\Omega}))$, $t_1 < t_2 \leqslant T$. Оцінимо кожний доданок цієї рівності, вибравши $v = (u^m - u^k)\theta(t)$, де $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$, $\delta > 0$ і $t_1 - \delta$ та β замість відповідно t_1 і t_2, де β - довільне число з проміжку $[t_1,t_2]$. Тоді, врахувавши (13), маємо

$$\tau_{22} = \int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2\,dx\,dy; \quad \tau_{23} = \int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_1-\delta}} (u^m - u^k)^2\theta(t_1 - \delta)\,dx\,dy = 0;$$

$$\tau_{24} = -\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (u^m - u^k)((u^m - u^k)\theta(t))_t\,dx\,dy\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2\,dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (u^m - u^k)^2\theta'(t)\,dx\,dy\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\widehat{\Omega}_\beta} (u^m - u^k)^2\,dx\,dy +$$

$$+\frac{2\delta_1}{p_1}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,t_1}} |u^m - u^k|^{p(x)}\theta(t)\,dx\,dy\,dt + 2C_1[\delta_1\delta]^{-2/(p_1-2)}.$$

$$\tau_{25} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \lambda(y,t)(u^m_y - u^k_y)(u^m - u^k)\theta(t)\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_1-\delta}^{\beta}\int\limits_{\Omega} \lambda(0,t)(u^m - u^k)^2\theta(t)\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \lambda_y(y,t)(u^m - u^k)^2\theta(t)\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{26} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \lambda_y(y,t)(u^m - u^k)^2\theta(t)\,dx\,dy\,dt;$$

$$\tau_{27} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)(u^m_{x_i} - u^k_{x_i})(u^m_{x_l} - u^k_{x_l})\theta(t)\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant a_0 \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \sum_{i=1}^{n} (u^m_{x_i} - u^k_{x_i})^2 \theta(t)\, dx\, dy\, dt;$$

$$\tau_{28} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)(u^m_{x_i} - u^k_{x_i})(u^m - u^k)\theta(t)\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_2 (b^0)^2 (u^m_{x_i} - u^k_{x_i})^2 + \frac{n}{\delta_2}(u^m - u^k)^2\right] \theta(t)\, dx\, dy\, dt;$$

$$\tau_{29} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} c(x,y,t)(u^m - u^k)^2 \theta(t)\, dx\, dy\, dt \leqslant c^0 \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (u^m - u^k)^2\, dx\, dy\, dt;$$

$$\tau_{30} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^k))(u^m - u^k)\theta(t)\, dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant g_0 \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} |u^m - u^k|^{p(x)} \theta(t)\, dx\, dy\, dt;$$

$$\tau_{31} = \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} (f_m(x,y,t) - f_k(x,y,t))(u^m - u^k)\theta(t)\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\beta}} \left[\frac{|f_m - f_k|^{p'(x)}}{p'(x)\varepsilon^{\frac{1}{p_1-1}}} + \frac{\varepsilon |u^m - u^k|^{p(x)}}{p(x)}\right] \theta(t)\, dx\, dy\, dt.$$

Виберемо $\delta_1, \varepsilon, \delta_2$ так, щоб виконувалися нерівності $2a_0 - (b^0)^2\delta_2 > 0$; $p_1 g_0 - \varepsilon + \delta_1 > 0$, k, m - довільні, такі, що $T - k < t_1 - \delta$, $T - m < t_1 - \delta$. При так вибраних k та m $f_m - f_k = 0$ в $Q_{t_1-\delta,\beta}$. Тоді з проведених оцінок випливатиме оцінка

$$\max_{[t_1,t_2]} \int\limits_{\widehat{\Omega}} (u^m - u^k)^2\, dx\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \lambda(0,t)(u^m - u^k)^2 \theta(t)\, dx\, dt + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \left[\sum_{i=1}^{n} (u^m_{x_i} - u^k_{x_i})^2 + \right.$$

$$\left. + |u^m - u^k|^{p(x)}\right] \theta(t)\, dx\, dy\, dt \leqslant C_2 \delta^{-\frac{2}{p_1-2}}. \qquad (15)$$

Сталі C_1, C_2 залежать тільки від $\varkappa$. Виберемо $\varepsilon > 0$ - довільне як завгодно мале число, δ таким чином, щоб права частина (15) була менша ε. Тоді для довільних $k, m \geqslant k_0$, де $k_0 = [T - t_1 + \delta] + 1$ матимемо, що ліва частина (15) менша за ε. Тому $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ - фундаментальна в просторах $C(-\infty, T; L^2(\widehat{\Omega}))$ та $V^{1,0,0}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Отже, існує функція $u(x,y,t)$ така, що $u^k \to u$ в $C(-\infty, T; L^2(\widehat{\Omega}))$, $u^k_{x_i} \to u_{x_i}$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$, $u^k \to u$ в $L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(Q)$, $u^k(\cdot, 0, \cdot) \to \tilde{u}(\cdot, 0, \cdot)$ в $L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T] \times \Omega)$.

5. Використовуючи (5), збіжності (10), (11) та отримані вище оцінки легко одержати рівність

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_2}} uv\,dxdy - \int\limits_{\widehat{\Omega}_{t_1}} uv\,dxdy + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-uv_t+\lambda_y(y,t)uv+\lambda(y,t)uv_y + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}v+\chi v+c(x,y,t)uv\Big]\,dxdydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\lambda(0,t)\tilde{u}v\,dxdt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} fv\,dxdydt, \tag{16}$$

для довільної функції $v \in C^1(\overline{Q})$ такої, що $v|_{\Gamma\times(0,y_0)\times(t_1,t_2)} = 0$, $v(x,y_0,t) = 0$. Нехай в (16) функція $v \in C_0^1(\overline{Q})$. Тоді (16) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v_t-\lambda(y,t)v_y)u\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[F(x,y,t)v+\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_l}\Big]\,dx\,dy\,dt, \tag{17}$$

де $F(x,y,t) = \lambda_y(y,t)u+\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}+c(x,y,t)u+\chi-f(x,y,t)$. Позначимо через $F_1(x,y,t) = F(x,y,t) + \sum\limits_{i,l=1}^{n}(a_{il}(x,y,t)u_{x_i})_{x_l}$.

Нехай $y=\rho(t,\xi,\tau)$- є розв'язком задачі Коші $\frac{dy}{dt}=-\lambda(y,t)$, $y(\tau)=\xi$. Вздовж кожного такого розв'язку $F\in L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\widehat{\Omega}))$, $F_1\in L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\widehat{\Omega})+W^{-1,2}(\widehat{\Omega}))$, де $[t_1,t_2]$ – відрізок, на якому визначений такий розв'язок, $q_1=\inf\limits_{\Omega}p'(x)$.

В (17) зробимо заміну змінних: $y=\rho(\tau,\xi,t_2)$, $t=\tau$. Якобіан переходу $J=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}=\exp\{-\int\limits_{t_2}^{\tau}\lambda_y\,dt\}$, $J_\tau=-\lambda_y(\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J$. Нехай область $(0,y_0)\times(t_1,t_2)$ при такому відображенні отримується з області D_1. Тоді з (17)

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{D_1} u(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)(v(\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J)_\tau\,d\xi\,d\tau\,dx =$$

$$=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{D_1}\Big[\Big(F(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)+J_\tau\frac{u(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)}{J}\Big)v(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J+$$

$$+\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)u_{x_i}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)v_{x_l}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J\Big]\,d\xi\,d\tau\,dx.$$

Тобто,

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{D_1}\frac{d}{d\tau}u(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)v(\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J\,d\xi\,d\tau\,dx = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{D_1}[-F(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)-$$

$$-\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)u_{x_i}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)v_{x_l}(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)+$$

$$+\lambda_y(\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)\times u(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)\Big]J\,d\xi\,d\tau\,dx$$

і $\frac{d}{d\tau}u(x,\rho(\cdot,\xi,t_2),\tau)$ є функцією з простору $L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\widehat{\Omega})+W^{-1,2}(\widehat{\Omega}))$ для кожного $\xi\in[0,y_0]$. Тоді вираз $u_t-\lambda(y,t)u_y$ має зміст і в формулі (16) можна взяти $v=u$.

Нехай область $D_1=\{(\tau,\xi):t_1<\tau<t_2,\ \varphi_1(\tau,t_2)<\xi<\psi_1(\tau,t_2)\}$, ξ_0, ξ_1 є розв'язками рівнянь $\rho(t_1,\xi,t_2)=0$, $\rho(t_1,\xi,t_2)=y_0$ відповідно. Рівняння $\rho(t,\xi,t_2)=0$, $\rho(t,\xi,t_2)=y_0$ можна розв'язати стосовно τ: $\tilde{\tau}=\varphi(t,t_2)$, $\bar{\tilde{\tau}}=\psi(t,t_2)$. Виберемо в (17) функцію $v\in C^1((-\infty,T];L^2(\widehat{\Omega}))$. Тоді

$$\int_{\Omega}\int_{D_1}u(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)(v(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J)_\tau\,d\xi\,d\tau\,dx=$$

$$=\int_{\Omega}\Big[\int_{\xi_0}^{0}u(x,0,\tilde{\tau})v(x,0,\tilde{\tau})J(\tilde{\tau})\,d\xi-\int_{0}^{y_0}u(x,\xi,t_2)v(x,\xi,t_2)J(t_2)\,d\xi-$$

$$-\int_{\xi_0}^{\xi_1}u(x,\rho(t_1,\xi,t_2),t_1)v(x,\rho(t_1,\xi,t_2),t_1)J(t_1)\,d\xi-\int_{\xi_1}^{y_0}u(x,y_0,\bar{\tilde{\tau}})v(x,y_0,\bar{\tilde{\tau}})J(\bar{\tilde{\tau}})\,d\xi\Big]\,dx-$$

$$-\int_{\Omega}\int_{D_1}u_\tau(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)v(x,\rho(\tau,\xi,t_2),\tau)J\,d\xi\,d\tau\,dx.$$

Повернемось до попередніх змінних. У першому доданку виконаємо заміну $t=\tilde{\tau}=\varphi(\xi,t_2)$. Тоді якобіан переходу дорівнюватиме $\frac{\lambda(0,t)}{J(\tilde{\tau})}$ і перший доданок дорівнює $\int_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2}\lambda(0,t)u(x,0,t)v(x,0,t)\,dtdx$. Так само, виконавши заміну змінних в інших інтегралах, одержимо інтеграли 1, 2, 3 формули (16). Вибравши тепер $v(x,y_0,t)=0$ та порівнявши одержані формули з (16), знайдемо, що $u(x,0,t)=\tilde{u}(x,0,t)$. Так само, вибравши $v(x,0,t)=0$, знайдемо, що $u(x,y_0,t)=0$. За схемою, наведеною в [21, с.169] легко показати, що u є розв'язком задачі (1), (2).

Зауваження. Якщо в умовах теореми 1 $g(x,y,t,u)=g(x)|u|^{p(x)-2}u$, $g(x)>0$, то p_2 може бути довільним скінченним числом.

3. Єдиність розв'язку.

ТЕОРЕМА 2. *Якщо виконуються умови* $(\mathbf{A})-(\mathbf{G}),(\mathbf{L})$, $(\mathbf{P})$, *де* $2<p_2<+\infty$ *то задача (1)-(2) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два різні розв'язки u_1, u_2 задачі (1), (2). Їх різниця u_1-u_2 задовольнятиме рівність (14), в якій замість u^m-u^k стоятиме u_1-u_2, $f_1-f_2\equiv 0$. Провівши перетворення подібно до перетворень після формули (14), отримаємо оцінку аналогічну до (15). Вибравши δ як завгодно великим, отримаємо, що $u_1=u_2$.

Список літератури

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М.:"Наука", 1977, p. 568.
2. У.Флеминг, Р. Ришел, *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами*, М.:"Мир", 1978, p. 316.
3. Kolmogorov A.N., *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. Math. **35** (1934), 116-117.
4. Дронь В.С., *Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова*, Науковий вісник Чернів. ун-ту.- сер. матем. **76** (2000), 32-42.
5. Малицька Г.П., *Про структуру фундаментальних розв'язків задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією*, Вісник Націон. ун-ту "Львівська політехніка", сер. прикладна матем. **411** (2000), 221-228.
6. Дронь В.С., Івасишен С.Д., *Властивості фундаментальних розв'язків і теореми единості розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь*, Укр.мат.журн. **50** (1998), no. 11, 1482-1496.
7. С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, *Про інтегральне зображення та початкові значення розв'язків деяких параболічних рівнянь, що вироджуються*, Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки **1** (1989), 16-18.
8. С.Д. Ивасишен, Л.М. Андросова, *Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова*, Дифф. уравнения **27** (1991), no. 3, 479-487.
9. Т. Г. Генчев, *Об ультрапараболических уравнениях*, Доклады АН СССР **151** (1963), no. 2, 265-268.
10. А. М. Ильин, *Об одном классе ультрапараболических уравнениях*, Доклады АН СССР **159** (1964), no. 6, 1214-1217.
11. Терсенов С.А., *О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения*, Матем. сборник **133(175)** (1987), no. 4 (8), 539-555.
12. Орлова С.А., *О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения*, Сибирск. мат. журнал **31** (1990), no. 6, 211-215.
13. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, *Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения*, Изв. АН СССР, серия матем. **1967** (31), 1341-1360.
14. В.В. Карачик, М.Ж. Улукназаров, *Операторное представление решений одной задачи ультрапараболического уравнения*, Вопросы вычисл. и прикладн. матем. - Ташкент, **1983** (72), 60-67.
15. Пятков С.Г., *Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения*, Некласические уравнения и уравнения смешанного типа.- Новосиб., 1990, p. 182-197.
16. Бокало Н.М., *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **14** (1989), 3-44.
17. С.Д. Ивасишен, *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий*, Дифф.уравн. **14** (1978), no. 2, 361-363.
18. С.Д. Ивасишен, *О параболических граничных задачах без начальных условий*, Укр.мат.журн. **34** (1982), no. 5, 547-552.
19. Kováčik O., Rákosnik J., *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechosl. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592-618.
20. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Иностр. литература, 1958, p. 474.
21. Ладыженская О.А., *Краевые задачи математической физики*, М.:"Наука", 1973, p. 407.

Краковская политехника имени Тадеуша Костюшко, Польша
Львовский государственный университет имени Ивана Франка, Украина
E-mail address: lawreniu@usk.pk.edu.pl diffeq@mf.franko.lviv.ua