# РЕДУКЦІЯ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДО ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

© М.І.Иванчов

Львів, Україна

В роботі розглядається можливість визначення невідомої межі тіла, що бере участь у деякому процесі, який описується рівнянням параболічного типу. Без врахування походження вільної межі (це може бути, наприклад, процес плавлення) встановлюється положення невідомої межі при умові, що для даного процесу відомі тільки його інтегральна характеристика та значення невідомої функції на вільній межі, тобто на відміну від однофазної задачі Стефана [1] на вільній межі задається тільки одна умова. Дослідження проводиться шляхом зведення даної задачі до коефіцієнтної оберненої задачі для параболічного рівняння в області з відомими сталими межами.

Припустимо, що межа $y = h(t)$ області $\tilde{Q}_T = \{(y,t) : 0 < y < h(t), 0 < t < T\}$ є невідомою. Розглянемо задачу визначення невідомих функцій $(h(t), \tilde{u}(y,t))$ з рівняння

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{yy} + b(y,t)\tilde{u}_y(y,t) + c(y,t)\tilde{u}(y,t) + f(y,t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

початкової умови

$$\tilde{u}(y,0) = \varphi(y), \quad y \in [0, h(t)], \tag{2}$$

крайових умов

$$\tilde{u}(0,t) = \mu_1(t), \quad \tilde{u}(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та інтегральної умови

$$\int_0^{h(t)} \tilde{u}(y,t)dy = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $x = \dfrac{y}{h(t)}, t = t$ задачу (1)–(4) зведемо до оберненої задачі визначення в області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ невідомих коефіцієнтів у параболічному рівнянні

$$u_t = \frac{1}{h^2(t)}u_{xx} + \left(\frac{xh'(t)}{h(t)} + \frac{b(xh(t),t)}{h(t)}\right)u_x + c(xh(t),t)u + f(xh(t),t), \ (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

з умовами

$$u(x,0)=\varphi(h(0)x), \quad x\in[0,1], \tag{6}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(1,t)=\mu_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 u(x,t)dx=\mu_3(t), \quad t\in[0,T], \tag{8}$$

де $u(x,t)\equiv\tilde{u}(xh(t),t)$.

ОЗНАЧЕННЯ. *Під розв'язком задачі (5)–(8) будемо розуміти пару функцій* $(h(t),u(x,t))$ *з класу* $C^1[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T), h(t)>0, t\in[0,T]$, *що задовольняють умови (5)–(8).*

Припустимо, що виконуються наступні умови:

**(A)** $\mu_i(t)\in C^1[0,T], \mu_i(t)>0, t\in[0,T], i=1,2,3; \varphi(h_0x)\in C^2[0,1], \varphi(h_0x)>0, x\in[0,1]$, де $h_0>0$ є розв'язком рівняння $\int\limits_0^{h_0}\varphi(x)dx=\mu_3(0); b(H_1x,t), c(H_1x,t), f(H_1x,t)\in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T), 0<\gamma<1$[2], $f(H_1x,t)\geq 0, c(H_1x,t)\leq 0, (x,t)\in\overline{Q}_T$, де $H_1=\max\limits_{[0,T]}\mu_3(t)\left(\min\left\{\min\limits_{[0,1]}\varphi(h_0x), \min\limits_{[0,T]}\mu_1(t), \min\limits_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}\right)^{-1}>0;$

**(B)** $\varphi(0)=\mu_1(0), \varphi(h(0))=\mu_2(0), h(0)\int\limits_0^1\varphi(h(0)x)dx=\mu_3(0)$.

Що стосується наявних в умовах **(A)** констант $h_0, H_1$, то з припущень $\varphi(x)>0, \mu_3(0)>0$ слідує існування єдиного значення $h(0)=h_0>0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0),$$

що входить до умов узгодження **(B)**. Визначення числа $H_1>0$ базується на таких міркуваннях. З умов **(A)** за принципом максимуму [2] для розв'язку задачі (5)–(7) при довільній функції $h(t)$ має місце оцінка

$$u(x,t)\geq M_0>0, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{9}$$

де $M_0=\min\left\{\min\limits_{[0,1]}\varphi(h_0x), \min\limits_{[0,T]}\mu_1(t), \min\limits_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}$. Тоді з (8) отримуємо рівняння

$$h(t)=\frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 u(x,t)dx}, \quad t\in[0,T], \tag{10}$$

для розв'язків якого, згідно з (9), справедлива оцінка

$$0<h(t)\leq H_1<\infty, \quad t\in[0,T], \tag{11}$$

де $H_1 = \frac{1}{M_0} \max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)$.

Зведемо задачу (5)–(8) до системи рівнянь. Пряму задачу (5)–(7) замінимо інтегро-диференціальним рівнянням

$$u(x,t) = \int\limits_0^1 G_1(x,t,\xi,0)\varphi(h_0\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)d\tau}{h^2(\tau)} -$$

$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,1,\tau)\frac{\mu_2(\tau)d\tau}{h^2(\tau)} +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(x,t,\xi,\tau)\Bigg( f(\xi h(\tau),\tau) + \left(\frac{\xi h'(\tau)}{h(\tau)} + \frac{b(\xi h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\right) u_\xi(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi h(\tau),\tau)u(\xi,\tau)\Bigg) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{12}$$

де $G_1(x,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = \frac{1}{h^2(t)} u_{xx}. \tag{13}$$

Зауважимо, що функції Гріна першої $(k = 1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння (13) визначаються формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left( -\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \exp\left( -\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \quad k = 1,2, \qquad \theta(t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{h^2(\tau)}. \tag{14}$$

Виходячи з (14), легко перевірити виконання таких співвідношень:

$$G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau) = -G_{2x}(x,t,\xi,\tau), \quad G_{1x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau),$$
$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = -h^2(\tau) G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau). \tag{15}$$

Диференціюючи (12) по $x$ та інтегруючи по частинах з використанням (15), знаходимо

$$v(x,t) = h_0 \int\limits_0^1 G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(f(\xi h(\tau),\tau)+\left(\frac{\xi h'(\tau)}{h(\tau)}+\frac{b(\xi h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\right)u_\xi(\xi,\tau)+\right.$$

$$\left.+c(\xi h(\tau),\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{16}$$

де $v\equiv u_x$.

Диференціюванням по $t$ з (8) отримуємо

$$h'(t)\int_0^1 u(x,t)dx+h(t)\int_0^1 u_t(x,t)dx=\mu_3'(t). \tag{17}$$

Враховуючи рівняння (5), обчислимо

$$\int_0^1 u_t(x,t)dx=\frac{1}{h^2(t)}(u_x(1,t)-u_x(0,t))+\frac{h'(t)}{h(t)}\left(\mu_2(t)-\int_0^1 u(x,t)dx\right)+$$

$$+\int_0^1\left(f(xh(t),t)+\frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t)+c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx.$$

Підставляючи отриманий вираз в (17), знаходимо

$$h'(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\frac{u_x(1,t)-u_x(0,t)}{h(t)}+h'(t)\left(\mu_2(t)-\int_0^1 u(x,t)dx\right)+$$

$$+h(t)\int_0^1\left(f(xh(t),t)+\frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t)+c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx=\mu_3'(t).$$

Звідси маємо

$$\frac{h'(t)}{h(t)}=\frac{1}{\mu_2(t)}\left(\frac{\mu_3'(t)}{h(t)}-\frac{u_x(1,t)-u_x(0,t)}{h^2(t)}-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left(f(xh(t),t)+\frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t)+c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx\right),\quad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Позначаючи $\dfrac{h'(t)}{h(t)}\equiv q(t)$, перепишемо (12), (16), (18):

$$u(x,t)=\int_0^1 G_1(x,t,\xi,0)\varphi(h_0\xi)d\xi+\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)d\tau}{h^2(\tau)}-$$

$$-\int_0^t G_{1\xi}(x,t,1,\tau)\frac{\mu_2(\tau)d\tau}{h^2(\tau)}+\int_0^t\int_0^1 G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(f(\xi h(\tau),\tau)+(\xi q(\tau)+$$

$$+\frac{b(\xi h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)v(\xi,\tau)+c(\xi h(\tau),\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (19)$$

$$v(x,t)=h_0\int_0^1 G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)d\xi-\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(x,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^1 G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big(f(\xi h(\tau),\tau)+$$

$$+\Big(\xi q(\tau)+\frac{b(\xi h(\tau),\tau)}{h(\tau)}\Big)v(\xi,\tau)+c(\xi h(\tau),\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (20)$$

$$q(t)=\frac{1}{\mu_2(t)}\Big(\frac{\mu_3'(t)}{h(t)}-\frac{v(1,t)-v(0,t)}{h^2(t)}-\int_0^1\Big(f(xh(t),t)+\frac{b(xh(t),t)}{h(t)}v(x,t)+$$

$$+c(xh(t),t)u(x,t))dx\Big),\quad t\in[0,T]. \qquad (21)$$

Отже, задачу (5)–(8) зведено до системи рівнянь (10), (19)–(21). Встановимо еквівалентність задачі (5)–(8) та системи рівнянь (10), (19)–(21). Зі способу отримання системи рівнянь (10), (19)–(21) очевидно, що коли $(h(t),u(x,t))\in C^1[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(8), то функції $(h(t),u(x,t),q(t)\equiv\frac{h'(t)}{h(t)},v(x,t)\equiv u_x(x,t))$ задовольняють систему рівнянь (10), (19)–(21).

Покажемо, що правильним є і зворотне твердження: якщо $(h(t),\ q(t),\ u(x,t),\ v(x,t))\in(C[0,T])^2\times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи рівнянь (10), (19)–(21), то функції $h(t)$ і $u(x,t)$ належать до класів $C^1[0,T]$ та $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, відповідно, і є розв'язком задачі (5)–(8). Всюди тут припускається, що $h(t)>0$ на $[0,T]$.

Отже, нехай виконується (19) з неперервними функціями $h(t),q(t),u(x,t)$. Тоді, враховуючи умови $(\mathbf{A})$, співвідношення (19) можна диференціювати по $x$. Проводячи перетворення, аналогічні до вищенаведених, і порівнюючи результат із співвідношенням (20), отримуємо, що $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$. Підставляючи замість $v$ функцію $u_x$ в (19), робимо висновок про те, що $u(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t=\frac{1}{h^2(t)}u_{xx}+\Big(xq(t)+\frac{b(xh(t),t)}{h(t)}\Big)u_x+c(xh(t),t)u+f(xh(t),t),\quad (x,t)\in Q_T, \quad (22)$$

задовольняє умови (6), (7) і належить до $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Звідси згідно з рівнянням (10) випливає, що $h(t)\in C^1[0,T]$.

Запишемо (10) у вигляді $h(t)\int_0^1 u(x,t)\,dx=\mu_3(t)$ і продиференціюємо дану рівність по $t$. Враховуючи те, що $u(x,t)$ задовольняє рівняння (22), маємо

$$h'(t)\int\limits_0^1 u(x,t)dx + h(t)\left(\frac{u_x(1,t)-u_x(0,t)}{h^2(t)} + q(t)\left(\mu_2(t) - \int\limits_0^1 u(x,t)dx\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \left(f(xh(t),t) + \frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t) + c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx\right) = \mu_3'(t).$$

Замінимо $\int\limits_0^1 u(x,t)dx$ його значенням, знайденим з (10):

$$\frac{h'(t)\mu_3(t)}{h(t)} + \frac{u_x(1,t)-u_x(0,t)}{h(t)} + q(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_3(t)) +$$

$$+h(t)\int\limits_0^1 \left(f(xh(t),t) + \frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t) + c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx = \mu_3'(t).$$

Звідси знаходимо

$$q(t) = \frac{1}{h(t)\mu_2(t)}\left(\mu_3'(t) - \frac{u_x(1,t)-u_x(0,t)}{h(t)} - \left(\frac{h'(t)}{h(t)} - q(t)\right)\mu_3(t) - \right.$$

$$\left. -h(t)\int\limits_0^1 \left(f(xh(t),t) + \frac{b(xh(t),t)}{h(t)}u_x(x,t) + c(xh(t),t)u(x,t)\right)dx\right).$$

Віднімаючи співвідношення (21) від даної рівності (з врахуванням встановленої раніше рівності $v \equiv u_x$,) отримуємо $q(t) \equiv \dfrac{h'(t)}{h(t)}$. Підставляючи це значення замість $q(t)$ в рівняння (22), маємо, що $(h(t), u(x,t))$ є розв'язком задачі (5)–(8). Отже, еквівалентність задачі (5)–(8) та системи рівнянь (10), (19)–(21) у зазначеному вище сенсі встановлено.

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (10), (19)–(21) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Попередньо встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (10), (19)–(21). Зважаючи на еквівалентність задач (5)–(8) і (10), (19)–(21), для розв'язків системи рівнянь (10), (19)–(21) мають місце встановлені вище оцінки (9), (11). Крім того, при наявності оцінки (11) розв'язок задачі (5)–(7) можна оцінити зверху

$$u(x,t) \le M_1 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{23}$$

де стала $M_1 > 0$ визначається відомими величинами. Тоді з (10) маємо

$$h(t) \ge H_0 > 0, \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

з сталою $H_0 = \frac{1}{M_1}\min\limits_{[0,T]}\mu_3(t)$.

Отже, залишається оцінити $v(x,t)$ і $q(t)$.

Позначаючи $\max\limits_{x\in[0,1]} |v(x,t)| \equiv V(t)$ і використовуючи оцінки (9), (11), (23), (24), з (20) і (21) отримуємо

$$V(t) \leq C_1 + C_2 \int\limits_0^t \frac{|q(\tau)|V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad |q(t)| \leq C_3 + C_4 V(t), \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

де сталі $C_i > 0, i = \overline{1,4}$, виражаються через відомі величини. Звідси знаходимо

$$V(t) \leq C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{26}$$

Піднесемо обидві частини (26) до квадрату. Використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$V^2(t) \leq C_7 + C_8 \left( \int\limits_0^t \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right)^2.$$

З даної нерівності знаходимо

$$\int\limits_0^t \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \leq C_9 + C_8 \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} \left( \int\limits_0^\sigma \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}} \right)^2 d\sigma \leq$$

$$\leq C_9 + C_{10} \int\limits_0^t V^4(\tau)d\tau.$$

Тоді з (26) отримуємо

$$V(t) \leq C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t V^4(\tau)d\tau. \tag{27}$$

Для розв'язання нерівності (27) застосуємо метод Гронуолла. Позначимо

$$W(t) \equiv C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t V^4(\tau)d\tau.$$

Знайдемо

$$W'(t) = C_{12}V^4(t) \leq C_{12}W^4(t).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$W(t) \leq \frac{C_{11}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{11}^3 C_{12} t}}, \quad t \in [0, t_0], \tag{28}$$

при умові, що число $t_0, 0 < t_0 \leq T$, задовольняє нерівність

$$1 - 3C_{11}^3 C_{12} t_0 > 0. \tag{29}$$

Тоді з (27), (28) і (25) отримуємо оцінки

$$|v(x,t)| \leq M_2 < \infty, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,t_0], \tag{30}$$

$$|q(t)| \leq M_3 < \infty, \quad t \in [0,t_0], \tag{31}$$

з відомими сталими $M_2 > 0, M_3 > 0$.

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (10), (19)–(21) встановлені.

Розглянемо множину функцій $\mathcal{N} = \{(h(t), q(t), u(x,t), v(x,t)) \in (C[0,t_0)])^2 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2 : H_0 \leq h(t) \leq H_1, |q(t)| \leq M_3, M_0 \leq u(x,t) \leq M_1, |v(x,t)| \leq M_2\}$. Очевидно, що множина $\mathcal{N}$ задовольняє умови теореми Шаудера. Якщо систему рівнянь (10), (19)–(21) подати у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{32}$$

де $\omega = (h,q,u,v)$, а оператор $P$ визначається правими частинами рівнянь (10), (19)–(21), то внаслідок оцінок (9), (11), (23), (24) (30), (31) оператор $P$ переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Доведення того, що оператор $P$ є цілком неперервним на $\mathcal{N}$, проводиться аналогічно [3]. Отже, за теоремою Шаудера існує розв'язок $(h(t),\ q(t),\ u(x,t),\ v(x,t))$ системи рівнянь (10), (19)–(21), що належить класу $(C[0,t_0)])^2 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$. Внаслідок еквівалентності задач (10), (19)–(21) та (5)–(8) отримуємо існування розв'язку $(h(t), u(x,t))$ задачі (5)–(8) з класу $C^1[0,t_0)] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$.

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 1. *При виконанні умов* **(A)**, **(B)** *можна вказати таке значення $t_0$, $0 < t_0 \leq T$, яке задовольняє умову (29), що розв'язок задачі (5)-(8) існує при $(x,t) \in [0,1] \times [0,t_0]$.*

Встановимо умови єдиності розв'язку задачі (5)–(8).

Теорема 2. *При виконанні умов*

$b(x,t), c(x,t) \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \varphi(x) \neq 0, x \in [0,\infty), \mu_2(t) \neq 0, \mu_3(t) \neq 0, t \in [0,T]$ *розв'язок задачі (5)-(8) єдиний.*

**Доведення.** Припустимо, що задача (5)–(8) має два розв'язки $(h_i(t), u_i(x,t)) \in C^1[0,T)] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), h_i(t) > 0, t \in [0,T], i = 1,2$. Позначимо $\dfrac{1}{h_i^2(t)} \equiv a_i(t), \dfrac{h_i'(t)}{h_i(t)} \equiv q_i(t)$. Тоді мають місце співвідношення

$$u_{it} = a_i(t) u_{ixx} + \left( x q_i(t) + \frac{b_i(xh_i(t),t}{h_i(t)} \right) u_{ix} + \\ + c(xh_i(t),t) u_i + f(xh_i(t),t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{33}$$

$$u_i(x,0) = \varphi(h_i(0)x), \quad x \in [0,1], \tag{34}$$

$$u_i(0,t)=\mu_1(t),\quad u_i(1,t)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$h_i(t)\int\limits_0^1 u_i(x,t)dx=\mu_3(t),\quad t\in[0,T],\quad i=1,2. \tag{36}$$

Як видно з доведення теореми 1, при зроблених припущеннях маємо $h_1(0)=h_2(0)$. Тоді різниці $a(t)\equiv a_1(t)-a_2(t), u(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t), q(t)\equiv q_1(t)-q_2(t)$ задовольнятимуть умови

$$u_t=a_1(t)u_{xx}+\left(xq_1(t)+\frac{b_1(xh_1(t),t}{h_1(t)}\right)u_x+c(xh_1(t),t)u+a(t)u_{2xx}(x,t)+$$
$$+\left(xq(t)+b_1(xh_1(t),t)\sqrt{a_1(t)}-b_2(xh_2(t),t)\sqrt{a_2(t)}\right)u_{2x}(x,t)+(c(xh_1(t),t)-$$
$$-c(xh_2(t),t))u_2(x,t)+f(xh_1(t),t)-f(xh_2(t),t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{37}$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in[0,1],\quad u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{38}$$

$$\sqrt{a_1(t)}-\sqrt{a_2(t)}=\frac{1}{\mu_3(t)}\int\limits_0^1 u(x,t)dx,\quad t\in[0,T]. \tag{39}$$

Крім того, з (33)–(36) аналогічно до (21) знаходимо

$$q_i(t)=\frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg(\mu_3'(t)\sqrt{a_i(t)}-a_i(t)(u_{ix}(1,t)-u_{ix}(0,t))-\int\limits_0^1(f(xh_i(t),t)+$$
$$+b(xh_i(t),t)\sqrt{a_i(t)}u_{ix}(x,t)+c(xh_i(t),t)u_i(x,t))dx\Bigg),\ t\in[0,T],\ i=1,2.$$

Звідси маємо

$$q(t)=\frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg(\mu_3'(t)(\sqrt{a_1(t)}-\sqrt{a_2(t)})-a_1(t)(u_x(1,t)-u_x(0,t))-a(t)(u_{2x}(1,t)-$$
$$-u_{2x}(0,t))-\int\limits_0^1(b(xh_1(t),t)u_x(x,t)+c(xh_1(t),t)u(x,t)+(b(xh_1(t),t)\sqrt{a_1(t)}-$$
$$-b(xh_2(t),t)\sqrt{a_2(t)})u_{2x}(x,t)+(c(xh_1(t),t)-c(xh_2(t),t))u_2(x,t))+f(xh_1(t),t)-$$
$$-f(xh_2(t),t))dx\Bigg),\quad t\in[0,T]. \tag{40}$$

Позначаючи через $G_1^*(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (37), (38), подамо $u(x,t)$ у вигляді

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(x,t,\xi,\tau)(a(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+\Big(\xi q(\tau)+b_1(\xi h_1(\tau),\tau)\sqrt{a_1(\tau)}-$$

$$-b_2(\xi h_2(\tau),\tau)\sqrt{a_2(\tau)}\Big)u_{2\xi}(\xi,\tau)+(c(\xi h_1(\tau),\tau)-c(\xi h_2(\tau),\tau))u_2(\xi,\tau)+$$

$$+f(\xi h_1(\tau),\tau)-f(\xi h_2(\tau),\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{41}$$

Перетворимо вирази

$$f(xh_1(t),t)-f(xh_2(t),t)=x(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 f_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=R(x,t,\sigma)}d\sigma=$$

$$=x\left(\frac{1}{\sqrt{a_1(t)}}-\frac{1}{\sqrt{a_2(t)}}\right)\int\limits_0^1 f_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=R(x,t,\sigma)}d\sigma=$$

$$=-\frac{xa(t)}{\sqrt{a_1(t)a_2(t)}(\sqrt{a_1(t)}+\sqrt{a_2(t)})}\int\limits_0^1 f_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=R(x,t,\sigma)}d\sigma,$$

$$b(xh_1(t),t)\sqrt{a_1(t)}-b(xh_2(t),t)\sqrt{a_2(t)}=a(t)\left(\frac{b(xh_1(t),t)}{\sqrt{a_1(t)}+\sqrt{a_2(t)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{\sqrt{a_1(t)a_2(t)}(\sqrt{a_1(t)}+\sqrt{a_2(t)})}\int\limits_0^1 b_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=R(x,t,\sigma)}d\sigma\right),$$

$$c(xh_1(t),t)-c(xh_2(t),t)=-\frac{xa(t)}{\sqrt{a_1(t)a_2(t)}(\sqrt{a_1(t)}+\sqrt{a_2(t)})}\int\limits_0^1 c_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=R(x,t,\sigma)}d\sigma, \tag{42}$$

де $R(x,t,\sigma)\equiv x(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t)))$. Тоді (41) можна звести до вигляду

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^\star(x,t,\xi,\tau)\Bigg(\xi q(\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)+a(\tau)\Bigg(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\frac{b(\xi h_1(\tau),\tau)}{\sqrt{a_1(\tau)}+\sqrt{a_2(\tau)}}u_{2\xi}(\xi,\tau)-\frac{\xi}{\sqrt{a_1(\tau)a_2(\tau)}(\sqrt{a_1(\tau)}+\sqrt{a_2(\tau)})}\times$$

$$\times\Bigg(\sqrt{a_2(\tau)}u_{2\xi}(\xi,\tau)\int\limits_0^1 b_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma+u_2(\xi,\tau)\int\limits_0^1 c_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^1 f_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma\Bigg)\Bigg)d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{43}$$

Звідси знаходимо

$$u_x(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1x}^\star(x,t,\xi,\tau)\Bigg(\xi q(\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)+a(\tau)\Bigg(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\frac{b(\xi h_1(\tau),\tau)}{\sqrt{a_1(\tau)}+\sqrt{a_2(\tau)}}u_{2\xi}(\xi,\tau)-\frac{\xi}{\sqrt{a_1(\tau)a_2(\tau)}(\sqrt{a_1(\tau)}+\sqrt{a_2(\tau)})}\times$$

$$\times\Bigg(\sqrt{a_2(\tau)}u_{2\xi}(\xi,\tau)\int_0^1 b_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma+u_2(\xi,\tau)\int_0^1 c_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma+$$

$$+\int_0^1 f_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=R(\xi,\tau,\sigma)}d\sigma\Bigg)\Bigg)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{44}$$

Подамо (39) у вигляді

$$a(t)=\frac{\sqrt{a_1(t)}+\sqrt{a_2(t)}}{\mu_3(t)}\int_0^1 u(x,t)dx,\quad t\in[0,T]. \tag{45}$$

Використовуючи (42) та підставляючи (43) і (44) в рівняння (40) і (45), приходимо до однорідної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, ядра яких мають слабку особливість. Внаслідок єдиності розв'язку таких систем отримуємо $a(t)\equiv 0, q(t)\equiv 0, t\in[0,T]$. Враховуючи це в (33)–(35), маємо $u(xt)\equiv 0,(x,t)\in\overline{Q}_T$, і теорему доведено.

З доведення теореми 1 легко бачити, що існування розв'язку задачі (5)–(8) можна встановити і в гельдерівських класах функцій.

Теорема 3. *Якщо, крім умови* **(B)**, *виконується умова*

**(A1)** $\mu_i(t)\in H^{1+\gamma/2}[0,T]$, $0<\gamma<1$, $\mu_i(t)>0, t\in[0,T], i=1,2,3$; $\varphi(h_0x)\in H^{2+\gamma}[0,1]$, $\varphi(h_0x)>0, x\in[0,1]$, *де* $h_0>0$ *є розв'язком рівняння* $\int_0^{h_0}\varphi(x)dx=\mu_3(0)$; $b(H_1x,t), c(H_1\,x,t), f(H_1\,x,t)\in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$, $f(H_1\,x,t)\geq 0$, $c(H_1\,x,t)\leq 0,(x,t)\in\overline{Q}_T$, *де* $H_1=\max\limits_{[0,T]}\mu_3(t)\left(\min\left\{\min\limits_{[0,1]}\varphi(h_0x),\min\limits_{[0,T]}\mu_1(t),\min\limits_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}\right)^{-1}>0$,

*то задача (5)-(8) має розв'язок* $(h(t),u(x,t))$ *з класу* $H^{1+\gamma/2}[0,t_0]\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$, *де число* $t_0, 0<t_0\leq T$, *визначається відомими величинами.*

## Список літератури


1. **Фридман А.,** ***Уравнения с частными производными параболического типа,*** **М.: Мир, 1967, р. 428.**
2. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.,** ***Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа,*** **М.:"Наука", 1967, р. 736.**
3. **Иванчов Н.И.,** ***Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении,*** **Сиб. мат. журнал. – 1998. 39 (1998), no. 3, 539–550.**



вул. Університетська 1,
Львівський державний університет імені Івана Франка
79602, м.Львів, Україна
*E-mail address*: ivanchov@franko.lviv.ua