О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© В.Н. Денисов

Москва, Россия

Настоящая работа посвящается изучению стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом при $u(x, t)$.

1°. Будем обозначать: $x = (x_1, \ldots, x_N)$ — точки в N-мерном евклидовом пространстве E^N, t — точки вещественной полупрямой $t \geq 0$, $D_T = \{x \in E^N, 0 < t < T\}$, $\overline{D} = \{x \in E^N, t \geq 0\}$, $D = \{x \in E^N, t > 0\}$.

Для всех $(x, t) \in \overline{D}$ рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in D, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in E^N. \tag{2}$$

Будем предполагать, что коэффициент $c(x, t)$ определен и измерим в области D и при всех $(x, t) \in D$:

$$-M \leq c(x, t) \leq 0, \tag{3}$$

функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N

$$|u_0(x)| < M. \tag{4}$$

Под пространством $W_2{}^{1,0}(Q)$, где Q — область в E^{N+1}, будем понимать пополнение пространства $C^{0,\infty}(E^{N+1})$ по норме

$$\|f\|_{W_2{}^1(Q)} = \left[\int\limits_Q \left(f^2(x, t) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x, t)\right)^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}.$$

Через B_R обозначим открытый шар $\{x\colon |x| < R\}$ в E^N, а через $\overline{B}_R = \{|x| \leq R\}$ — замкнутый шар в E^N.

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи Коши (1), (2) в области D, если при всех $T > 0$ и $R > 0$ функция $u(x, t)$ принадлежит пространству $W_2{}^{1,0}\big(B_R \times (0, T)\big)$ и при каждом $T > 0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T} \left[-\frac{\partial \eta}{\partial t}u + \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_k} - c(x, t)u \cdot \eta\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{E^N} u_0(x)\eta(x, 0)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

для всех функций $\eta(x, t)$ из $C^{0,\infty}(E^{N+1})$, носитель которых лежит в полупространстве $\{x \in E^N, t < T\}$.

Очевидно, что всякое классическое решение задачи (1), (2) является и обобщенным решением этой задачи.

Будем предполагать, что обобщенное решение задачи (1), (2) является ограниченным в D:

$$|u(x,\, t)| < M. \tag{6}$$

При сформулированных условиях обобщенное решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно (см. [1, 2]).

Из результатов [1] о том, что классическое решение задачи Коши удовлетворяет условию Гельдера в любой замкнутой подобласти $G \subset D$ и из возможности аппроксимировать обобщенное решение задачи Коши последовательностью классических решений задач Коши с гладкими коэффициентами, равномерно в каждой внутренней подобласти $G \subset D$, следует, что обобщенное решение задачи Коши (1), (2) можно считать непрерывной функцией в D.

В работе [2, § 12, теорема 1] установлено, что

$$\text{если} \quad c(x,\, t) \le -c_0 < 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{7}$$

то существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0$$

решения задачи Коши (1), (2), равномерный по x в E^N.

В настоящей работе мы ослабим условие (7) на $c(x,\, t)$.

Будем говорить, что $c(x,\, t)$ удовлетворяет *условию* А, если существуют $\alpha > 0$ и $h > 0$ такие, что

$$c(x,\, t) \le -\alpha^2 \quad \text{при всех} \quad (x,\, t)\colon |x| < h, \;\; t > 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $N = 1$ или $N = 2$ и для $c(x,\, t)$ выполнено условие* А, *тогда решение задачи Коши* (1), (2) *стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$*:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0. \tag{9}$$

Следующие леммы 1 и 2 устанавливают точность теоремы 1.

В области $\overline{D}$ рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + c(x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{10}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in E^N, \tag{11}$$

где $-M \le c(x) \le 0$, $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная функция в E^N.

Лемма 1. *Пусть $N = 1$ или $N = 2$, тогда существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию* А *и непрерывная и ограниченная в E^N функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши* (10), (11) *не имеет равномерного в E^N предела* (9).

Лемма 2. *Пусть $N \ge 3$, тогда существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию* А *и непрерывная и ограниченная в E^N функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши* (10), (11) *не стабилизируется к нулю.*

Будем говорить, что коэффициент $c(x,\, t)$ удовлетворяет *условию* B, если существует $\alpha > 0$ и $h > 0$ такие, что

$$c(x,\, t) \le -\frac{\alpha^2}{|x|^2} \quad \text{при всех} \quad (x,\, t)\colon |x| > h, \;\; t > 0. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть $N \geq 3$ и $c(x, t)$ удовлетворяет условию В, тогда решение задачи Коши (1), (2) стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$, т. е. существует предел (9).*

Следующие леммы 3 и 4 устанавливают точность теоремы 2.

Лемма 3. *При $N \geq 3$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию В и непрерывная и ограниченная в E^N функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши (10), (11) не имеет равномерного в E^N предела (9).*

Лемма 4. *Пусть при некоторых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $h > 0$ для $c(x)$ справедливо представление*

$$c(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^{2+\epsilon}}, & \text{при} \quad |x| > h, \\ \quad 0, & \text{при} \quad |x| \leq h, \end{cases} \tag{13}$$

тогда существует непрерывная и ограниченная в E^N функция $u_0(x)$, для которой решение задачи Коши (10), (11) не стабилизируется к нулю.

Автор благодарит акад. В. А. Ильина за внимание и ценные советы.

2°. Основным конструктивным моментом при доказательстве теорем 1 и 2 служит понятие обобщенного антибарьера. Классическое понятие антибарьера введено в работах [3, 4].

В области D рассмотрим дифференциальный оператор

$$L\Gamma(x) = \Delta\Gamma(x) + c(x, t)\Gamma(x), \tag{14}$$

где $c(x, t)$ — ограниченная и измеримая в D функция, для которой справедливо неравенство (3). Будем говорить, что функция $\Gamma(x)$ из класса ${W_2}^{1,\mathrm{loc}}(E^N)$ является *обобщенным антибарьером* для оператора L, если $\Gamma(x)$ удовлетворяет интегральному неравенству:

$$\int\limits_{E^N} \left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + c(x, t)\Gamma\cdot\varphi \right] \mathrm{d}x \leq 0 \tag{15}$$

при любой неотрицательной в E^N функции $\varphi(x)$ из класса $C^{0,1}(E^N)$ и всех $t > 0$, и кроме того:

1) $\Gamma(x) > 0$, $x \in E^N$;
2) $\Gamma(x)$ монотонно и неограниченно возрастает при $|x| \to \infty$: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

Лемма 5. I) *Пусть при $N = 1$ или $N = 2$, коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию А, а*

II) *при $N \geq 3$ — коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию В. Тогда оператор L (14) имеет обобщенный антибарьер $\Gamma(x)$ в E^N.*

Доказательство. I) Случаи $N = 1$ и $N = 2$ рассматриваются аналогично, поэтому приведем подробное доказательство при $N = 1$, а при $N = 2$ приведем лишь ключевые моменты доказательства.

Будем строить функцию $\Gamma(x)$, зависящую от $|x|$ и имеющую неотрицательную производную $\Gamma'(r) \geq 0$, $r = |x|$.

При $0 \leq r \leq h/2$ полагаем $\Gamma(r) = 1$. При $h/2 \leq r \leq h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_1''(r) - \alpha^2\Gamma_1(r) = 0, \quad \Gamma_1|_{r=h/2} = 1, \quad \Gamma_1'|_{r=h/2} = 0. \tag{16}$$

Очевидно, что функция

$$\Gamma_1(r) = \operatorname{ch}\alpha\left(r - \frac{h}{2}\right) \tag{16.1}$$

является решением этой задачи.

При $r \geq h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_2''(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > h, \quad \Gamma_2|_{r=h} = \Gamma_1(h), \quad \Gamma_2'|_{r=h} = \Gamma_1'(h). \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17), получим

$$\Gamma_2(r) = \alpha \operatorname{sh}\frac{\alpha h}{2} \cdot r + \left[\operatorname{ch}\frac{\alpha h}{2} - \alpha h \operatorname{sh}\frac{\alpha h}{2}\right], \quad r > h. \tag{18}$$

Определим антибарьер $\Gamma(r)$ оператора (14), полагая $\Gamma(r) = 1$ при $0 \leq r \leq h/2$, $\Gamma(r) = \Gamma_1(r)$ при $h/2 \leq r \leq h$, где $\Gamma_1(r)$ — функция (16.1), $\Gamma(r) = \Gamma_2(r)$ при $r \geq h$, где $\Gamma_2(r)$ — функция (18).

Свойства 1) и 2) антибарьера непосредственно вытекают из явного вида функции $\Gamma(r)$, кроме того, функция $\Gamma(r)$ имеет непрерывную на полуоси $r \geq 0$ производную $\Gamma'(r) \geq 0$ — это очевидное следствие условий склейки производных решений в (16) и (17). Поэтому построенная функция $\Gamma(r)$ принадлежит классу ${W_2}^{1.\mathrm{loc}}(E^1)$. Докажем, что для $\Gamma(r)$ справедливо неравенство (15).

Учитывая условие A, в силу уравнения (17), получим

$$\Gamma'' + c(x, t)\Gamma \leq \Gamma'' - \alpha^2\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad 0 < r < h. \tag{19.1}$$

Учитывая условие A, в силу уравнения (18), получим

$$\Gamma'' + c(x, t)\Gamma \leq \Gamma'' = 0 \quad \text{при} \quad r > h. \tag{19.2}$$

Из неравенств (19.1) и (19.2) следует справедливость этих неравенств и в обобщенном смысле (15) в областях $\{r < h\}$ и $\{r > h\}$ соответственно. Если область $\{r < h_1\}$ целиком содержит область $\{r < h\}$, т. е. $h_1 > h$, то, разбивая область $\{r < h_1\}$ на две области $\{r < h_1\} \equiv \{r \leq h\} \cup \{h < r < h_1\}$, интегрируя по частям в каждой из областей и используя непрерывность производной $\Gamma'(r)$ при $r = h$, получим, в силу (19.1) и (19.2) справедливость интегрального неравенства (15)

$$\int\limits_{r<h_1} [-\varphi' \cdot \Gamma' + c(x, t) \cdot \Gamma \cdot \varphi]\, \mathrm{d}r \leq 0,$$

при любой неотрицательной функции $\varphi(r)$ из $C^{0,1}(E^1)$.

Лемма 1 при $N = 1$ доказана.

При $N = 2$ ход доказательства леммы 1 аналогичен случаю $N = 1$, поэтому мы приведем лишь ключевой момент, построив $\Gamma(r)$ в явном виде.

При $r \leq h/2$ полагаем $\Gamma(r) = 1$. При $h/2 \leq r \leq h$ рассмотрим задачу:

$$\Gamma_1'' + \frac{1}{r}\Gamma_1' - \alpha^2\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1, \quad \Gamma_1'|_{r=h} = 0. \tag{20}$$

Функция $\Gamma_1(r) = I_0\big(\alpha(r - h/2)\big)$ является решением задачи (20), где $I_0(x)$ — функция Бесселя [5].

При $r \geq h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_2'' + \frac{1}{r}\Gamma_2' = 0 \quad \text{при} \quad r > h, \quad \Gamma_2|_{r=h} = \Gamma_1(h), \quad \Gamma_2'|_{r=h} = \Gamma_1'(h). \tag{21}$$

Учитывая вид общего решения уравнения (21), получим

$$\Gamma_2(r) = \alpha h \cdot I_1\left(\frac{\alpha h}{2}\right) \cdot \ln r + \left(I_0\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - h\alpha \ln h \cdot I_1\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\right). \tag{22}$$

при $r > h$. Определим антибарьер оператора (14), полагая $\Gamma(r) = 1$ при $0 \le r \le h/2$, $\Gamma(r) = \Gamma_1(r)$ при $h/2 \le r \le h$, где $\Gamma_1(r)$ — решение задачи (20), $\Gamma(r) = \Gamma_2(r)$ при $r \ge h$, где $\Gamma_2(r)$ — решение задачи (21). Из (22) следует, что $\Gamma(r)$ удовлетворяет условию 2) в определении антибарьера $\Gamma(r)$. Доказательство всех других свойств функции $\Gamma(r)$ проводится аналогично одномерному случаю. При $N = 2$ лемма 1 доказана.

II) Пусть $N \ge 3$ и выполнено условие B. При $0 \le r \le h$ полагаем $\Gamma(r) = 1$. При $r \ge h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_1'' + \frac{N-1}{r}\Gamma_1' - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma_1 = 0 \quad \text{при} \quad r > h, \quad \Gamma_1|_{r=h} = 1, \quad \Gamma_1'|_{r=h} = 0. \tag{23}$$

Ищем решение уравнения (23) в виде: $\Gamma_1(r) = r^\lambda$. Вставляя $\Gamma_1(r)$ в уравнение (23), получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + (N-2)\lambda - \alpha^2 = 0$, которое имеет корни $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Решение задачи (23) будет иметь вид:

$$\Gamma_1(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(N-2) \pm \sqrt{(N-2)^2 + 4\alpha^2}}{2}, \tag{24}$$

где C_1, C_2 — постоянные. Вставляя $\Gamma_1(r)$ в начальные условия в (23), найдем C_1 и C_2: $C_1 = \dfrac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)h^{\lambda_1}} > 0$, $C_2 = \dfrac{\lambda_1}{h^{\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2)}$.

Определим антибарьер Γ оператора (14), полагая $\Gamma(r) = 1$, при $0 \le r \le h$. $\Gamma(r) = \Gamma_1(r)$, при $r > h$, где $\Gamma_1(r)$ — решение задачи (23). Свойства 1) и 2) антибарьера вытекают из явного вида функции $\Gamma(r)$, кроме того, функция $\Gamma(r)$ имеет непрерывную производную $\Gamma'(r) \ge 0$ — это очевидное следствие условий склейки решений (23). Поэтому построенная функция $\Gamma(r)$ принадлежит классу ${W_2}^{1,\mathrm{loc}}(E^N)$. Докажем, что для $\Gamma(r)$ справедливо неравенство (15). Учитывая условие B, в силу уравнения (23), получим

$$\Delta\Gamma + c(x,t)\Gamma \le \Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma = 0, \quad \text{при} \quad r > h, \tag{24.1}$$

$$\Delta\Gamma + c(x,t)\Gamma \le \Delta\Gamma = \Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' = 0, \quad \text{при} \quad 0 \le r \le h. \tag{24.2}$$

Из неравенств (24.1) и (24.2), точно так же, как и в случае $N = 1$, получаем справедливость неравенства (15) при любой неотрицательной функции $\varphi(x)$ из класса $C^{0,1}(E^N)$.

Лемма 5 доказана.

В цилиндре $\overline{Q}_h = \{|x| \le h, t \ge 0\} \subset E^N$, $N \ge 1$ рассмотрим задачу

$$\Delta V + c(x,t)V - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{в } Q_h, \tag{25.1}$$

$$V|_{|x|=h} = 0, \quad t > 0, \tag{25.2}$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in B_h, \tag{25.3}$$

где $c(x,t)$ — удовлетворяет условию (3), а функция $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция в B_h. Решение задачи (25.1)-(25.3) понимается в обобщенном смысле [1], т. е. функция $V(x,t)$ принадлежит классу ${W_2}^{1,0}$ в цилиндре $Q_{h,T}$, при всех

$T > 0$ и удовлетворяет граничному условию (25.2) и при каждом $T > 0$ справедливо тождество:

$$\int\limits_{Q_{h,T}} \left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + cV\eta + V\frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int\limits_{|x| \le h} \varphi(x) \eta(x, 0)\, \mathrm{d}x,$$

для всех функций $\eta(x, t)$ из $W_2{}^1(Q_{h,T})$, удовлетворяющих условиям

$$\eta \Big|_{\substack{|x|<h,\\ t=T}} = 0, \quad \eta \Big|_{\substack{|x|=h,\\ 0<t<T}} = 0.$$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например [2, § 12, теорема 2]).

Лемма 6 [2]. *Решение задачи* (25.1) - (25.3) *стабилизируется к нулю, равномерно по* x *в замкнутом шаре* $\overline{B}_h$.

$$\lim_{t \to \infty} V(x, t) = 0. \tag{26}$$

Доказательство теорем 1 и 2 будем проводить одновременно, ибо оно опирается лишь на свойства антибарьера Γ из леммы 5.

В области D рассмотрим функции

$$W^-(x, t) = \delta \cdot \Gamma(|x|) - u(x, t), \tag{27.1}$$

$$W^+(x, t) = \delta \cdot \Gamma(|x|) + u(x, t), \tag{27.2}$$

где $u(x, t)$ — решение задачи Коши (1), (2), $\Gamma(|x|)$ — обобщенный антибарьер оператора (14), $\delta > 0$ — число, которое мы выберем ниже.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем некоторое $k > 0$ и рассмотрим замкнутый шар $\overline{B}_k$. Выберем число $\delta = \delta(\varepsilon, k) > 0$ так, что при всех $x \in \overline{B}_k$ справедливо

$$\delta \cdot \Gamma(|x|) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

Ясно, что функции $W^-(x, t)$ и $W^+(x, t)$ являются обобщенными решениями задач:

$$\Delta W^- + c(x, t) W^- - \frac{\partial W^-}{\partial t} \le 0 \quad \text{в } D, \tag{29.1}$$

$$W^-|_{t=0} = \delta \cdot \Gamma(|x|) - u_0(x) = \varphi_1(x), \quad x \in E^N; \tag{29.2}$$

$$\Delta W^+ + c(x, t) W^+ - \frac{\partial W^+}{\partial t} \le 0 \quad \text{в } D, \tag{30.1}$$

$$W^+|_{t=0} = \delta \cdot \Gamma(|x|) - u_0(x) = \varphi_2(x), \quad x \in E^N. \tag{30.2}$$

Так как $\Gamma(|x|)$ в силу леммы 5, является монотонно и неограниченно возрастающей, а функция $u(x, t)$ ограниченная, то существует $n > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$W^-(x, t)|_{|x|=n} > 0, \quad \text{при всех} \quad t > 0, \tag{31.1}$$

$$W^+(x, t)|_{|x|=n} > 0, \quad \text{при всех} \quad t > 0 \tag{31.2}$$

Введем обозначения: $\varphi^-(x) = \varphi(x)$, если $\varphi(x) \le 0$ и $\varphi^-(x) = 0$ в противном случае, $\varphi^+(x) = \varphi(x)$, если $\varphi(x) \ge 0$ и $\varphi^+(x) = 0$ в противном случае. Ясно, что справедливо равенство $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$.

В цилиндре $\overline{Q}_n = \{|x| \le n,\, t \ge 0\}$ рассмотрим функцию

$$z_1(x, t) = V_1(x, t) - W^-(x, t), \tag{32}$$

где $W^-(x, t)$ — решение задачи (29.1), (29.2), а $V_1(x, t)$ — обобщенное решение задачи

$$\Delta V_1 + c(x, t)V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \quad \text{в } Q_n, \tag{33.1}$$

$$V_1|_{|x|=n} = 0, \quad t > 0, \tag{33.2}$$

$$V_1|_{t=0} = \varphi_1^-(x), \quad x \in B_n, \tag{33.3}$$

где $\varphi_1^-(x) = \min\left(\delta\Gamma(|x|) - u_0, 0\right)$, при $|x| < n$.

В силу (33.1), (29.1), (33.2), (31.2), получаем, что функция (32) удовлетворяет неравенствам:

$$\Delta z_1 + c(x, t)z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial t} \geq 0 \quad \text{в } Q_n,$$

$$z_1|_{|x|=n} \leq 0, \quad t > 0,$$

$$z_1|_{t=0} = \varphi_1^-(x) - \left[\varphi_1^+(x) + \varphi_1^-(x)\right] = -\varphi_1^-(x) \leq 0.$$

Применяя принцип максимума для слабых решений ([1, с. 213]), получим, что во внутренних точках Q_h справедливо неравенство:

$$z_1(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in Q_n, \quad \text{т. е.} \quad V_1(x, t) \leq W^-(x, t) \quad \text{при} \quad |x| \leq n, \quad t \geq 0. \tag{34}$$

В цилиндре $\overline{Q}_n$ рассмотрим функцию

$$z_2(x, t) = V_2(x, t) - W^+(x, t),$$

где $V_2(x, t)$ — обобщенное решение задачи

$$\Delta V_2 + c(x, t)V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \quad \text{в } Q_n, \tag{35.1}$$

$$V_2|_{|x|=n} = 0, \quad t > 0, \tag{35.2}$$

$$V_2|_{t=0} = \varphi_2^-(x), \quad x \in B_n, \tag{35.3}$$

где $\varphi_2^-(x) = \min\left(\delta\Gamma(x) + u(x, t), 0\right)$, при $|x| < n$.

Точно так же, как и в случае $z_1(x, t)$, используя принцип максимума [1], получаем неравенство

$$V_2(x, t) \leq W^+(x, t) \quad \text{при} \quad |x| \leq n, \quad t > 0. \tag{36}$$

Применим к функции $V_1(x, t)$ лемму 6, получим, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} V_1(x, t) = 0$, равномерно по $x \in B_n$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in B_n$ справедливо неравенство:

$$V_1(x, t) > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

Учитывая (34) и (37) при тех же x и t, получим

$$u(x, t) < \delta\Gamma(|x|) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

При x из шара B_k из последнего неравенства и неравенства (28), получим, что

$$\varlimsup_{t\to\infty} u(x, t) < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in B_n. \tag{38}$$

Применяя к функции $V_2(x, t)$ лемму 6, получим, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} V_2(x, t) = 0$, равномерно по $x \in B_n$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in B_n$ справедливо неравенство

$$V_2(x, t) > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{39}$$

Учитывая (36) и (39) при тех же x и t, получим

$$u(x,t) > -\frac{\varepsilon}{2} - \delta\Gamma(|x|).$$

При x из шара B_k из последнего неравенства и неравенства (28), получим, что

$$\varliminf_{t\to\infty} u(x,t) > -\varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in B_h. \tag{40}$$

Из (38) и (40) получаем, что существует предел (9), равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

Доказательство леммы 1. При $N = 1$ рассмотрим задачу Коши (10), (11), в которой положим $u_0(x) = 1$ и

$$c(x) = \begin{cases} -\alpha^2, & \text{при} \quad |x| < h, \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geq h. \end{cases} \tag{41}$$

Докажем, что решение $u(x,t)$ этой задачи Коши не имеет равномерного в E^1 предела (9). Введем функцию $V(x,t) = 1 - u(x,t)$. Тогда для $V(x,t)$ получим задачу Коши

$$V_{xx} + c(x)V - \frac{\partial V}{\partial t} = c(x), \tag{42.1}$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad x \in E^1. \tag{42.2}$$

При $|x| \geq h$ решение этой задачи имеет вид [5]

$$V(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(|x| - h)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(|x|-h)^2}{4(t-\tau)}} V_1(x,t)\, d\tau, \tag{42.3}$$

где $V_1(x,t)$ — решение задачи.

$$V_{1\,xx} - \alpha^2 V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\alpha^2 \quad \text{при} \quad |x| < h, \ t > 0,$$
$$V_1|_{t=0} = 0, \quad |x| < h.$$

Рассмотрим $x \geq h$ и учитывая, что функция $V_1(x,t)$ является ограниченной $|V_1(x,t)| \leq M_1$, после замены переменой $\sigma = \dfrac{(x-h)^2}{4(t-\tau)}$, будем иметь:

$$|V(x,t)| \leq \frac{M_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-h}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-h)^2}{4(t-\tau)}}\, d\tau \leq C \cdot \int_{(x-h)^2/(4t)}^{\infty} e^{-\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}. \tag{43}$$

При любом фиксированном $t > 0$ и $x \to +\infty$, в силу сходимости интеграла в правой части (43), получим, что существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} V(x,t) = 0. \tag{44}$$

Поэтому при любом $t > 0$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 1. \tag{45}$$

Применяя к $u(x,t)$ теорему 1, получим, что существует предел (9), равномерно по x на каждом компакте K.

Из существования предела (45) следует, что для $t > 0$ и $\varepsilon = 1/2$ существует $A_\varepsilon(t) > 0$ такое, что при $x > A_\varepsilon(t)$ справедливо неравенство

$$u(x, t) > \frac{1}{2}.$$

Полученное неравенство противоречит существованию равномерного в E^1 предела (9). При $N = 1$ лемма 1 доказана.

Пусть $N = 2$. Рассмотрим задачу (10), (11), в которой положим $u_0(x) \equiv 1$, а $c(x)$ имеет вид (41) при $N = 2$.

Докажем, что решение этой задачи Коши не имеет *равномерного* в E^2 предела (9). Введем функцию $V(x, t) = 1 - u(x, t)$. Тогда для $V(x, t)$ получим задачу:

$$\Delta V + c(x)V - \frac{\partial V}{\partial t} = +c(x), \quad V|_{t=0} = 0. \tag{46}$$

Рассмотрим функцию

$$W(x, t) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int\limits_{-1}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{|\xi|\le h} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi. \tag{47}$$

Легко видеть, что $W(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\Delta W - \frac{\partial W}{\partial t} = +c(x), \quad W|_{t=0} = \Psi(x), \tag{48}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int\limits_{0}^{1} \frac{d\sigma}{\sigma} \int\limits_{|\xi|\le h} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\sigma}}\, d\xi. \tag{49}$$

Из (47) следует, что $W(x, t) > 0$ и $W(x, t)$ возрастает по t, поэтому при $t > 0$ справедливо неравенство

$$W(x, t) > \Psi(x). \tag{50}$$

Оценивая функцию $\Psi(x)$ снизу и используя при $|x| = h$, $1/2 \le \sigma \le 1$ очевидные неравенства

$$|x-\xi|^2 \le (|x|^2 + |\xi|^2)^2 \le 4h^2, \quad e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\sigma}} \ge e^{-2h^2},$$

получим:

$$\frac{4\pi}{\alpha^2}\Psi(x) > \int\limits_{1/2}^{1} \frac{d\sigma}{\sigma} \int\limits_{|\xi|<h} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\sigma}}\, d\xi \ge \frac{\pi h^2}{2} e^{-2h^2}. \tag{51}$$

Из неравенств (50), (51) следует, что при $|x| = h$, $0 < t \le T$ справедлива оценка:

$$\min_{\substack{|x|=h,\\ 0<t\le T}} W(x, t) \ge C_1 > 0, \tag{52}$$

поэтому при $|x| = h$ и $0 < t \le T$ справедлива оценка

$$V(x, t) \le C_2 \cdot W(x, t), \tag{53}$$

где

$$C_2 = \max_{\substack{|x|=h,\\ 0<t\le T}} V(x, t) \cdot \Big[\min_{\substack{|x|=h,\\ 0<t\le T}} W(x, t) \Big]^{-1}. \tag{54}$$

При $|x| \le h$, $t \ge 0$ задача (46) имеет вид:

$$\Delta V_1 - \alpha^2 V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\alpha^2 \quad \text{при} \quad |x| \le h,\ t > 0, \quad V_1|_{t=0} = 0. \tag{55}$$

Ясно, что $V_1(x, t)$ непрерывна и ограничена $0 \le |V_1(x, t)| \le M$.

При $|x| \ge h$ и $t \ge 0$ задача Коши (46) имеет вид:

$$\Delta V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad |x| > h,\ t > 0, \tag{55.1}$$

$$V_2|_{|x|=h} = V_1(h, t) \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{55.2}$$

$$V_2|_{t=0} = 0. \tag{55.3}$$

Введем функцию $z(x, t) = V_2(x, t) - C_2 W(x, t)$, где C_2 постоянная (54). Ясно, что при $|x| > h$ и $t > 0$ функция z удовлетворяет уравнению

$$\Delta z - \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \tag{56.1}$$

При $|x| = h$ и $0 < t < T$ справедлива оценка (53), поэтому

$$z \le 0 \quad \text{при} \quad |x| = h \quad \text{и} \quad 0 < t < T. \tag{56.2}$$

При $t = 0$, $|x| > h$ справедлива оценка

$$z(x, 0) = -C_2 \cdot \Psi(x) < 0. \tag{56.3}$$

Применяя принцип максимума для решения уравнения (55.1), получим, что при $|x| > h$ и $0 < t \le T$ справедливо неравенство $z(x, t) \le 0$. Таким образом, доказано, что справедливо неравенство

$$0 \le V_2(x, t) \le C_2 \cdot W(x, t) \quad \text{при} \quad |x| \ge h,\ 0 < t < T. \tag{57}$$

Устремляя $|x|$ к бесконечности в (57), получим

$$\lim_{|x|\to\infty} V_2(x, t) = 0 \quad \text{для каждого} \quad t \in (0, T]. \tag{58}$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x, t) = 1 \quad \text{при каждом} \quad t \in (0, T]. \tag{59}$$

Из теоремы 1 следует, что существует предел (9). Как и в одномерном случае из (59) следует, что предел (9) не является равномерным по x в E^2.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $N \ge 3$. При $0 \le r \le h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_1'' + \frac{N-1}{r}\Gamma_1' - \alpha^2 \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_1|_{r=0} = 1, \quad \Gamma_1'|_{r=0} = 0. \tag{60}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\Gamma_1(r) = C_N \cdot I_{(N-2)/2}(r \cdot \alpha) \cdot (r\alpha)^{(2-N)/2}, \quad C_N = 2^{(N-2)/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right), \tag{61}$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция Эйлера, $I_\nu(x)$ — функция Бесселя [5].

При $r \ge h$ рассмотрим задачу:

$$\Gamma_2'' + \frac{N-1}{r}\Gamma_2' = 0, \quad r > h, \quad \Gamma_2|_{r=h} = \Gamma_1(h), \quad \Gamma_2'|_{r=h} = \Gamma_1'(h). \tag{62}$$

Решение задачи (62) имеет вид:

$$\Gamma_2(r) = C_1 r^{2-N} + C_2. \tag{63}$$

Постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются из начальных условий в (62). Для нас конкретный вид C_1 и C_2 не требуется, но важно, что $C_2 > 0$. Из (63) следует, что существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma_2(r) = C_2 > 0. \tag{64}$$

Рассмотрим задачу Коши (10), (11), где $c(x)$ имеет вид (41) при $N \geq 3$, начальную функцию $u_0(x)$ определим следующим образом: $u_0(x) = \Gamma_1(|x|)$ при $0 \leq r \leq h$, где $\Gamma_1(r)$ — функция (61), $u_0(x) = \Gamma_2(|x|)$ при $r \geq h$, где $\Gamma_2(r)$ — функция (63). Ясно, что эта функция $u_0(x)$ принадлежит классу ${W_2}^{1,\mathrm{loc}}(E^N)$ и удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению:

$$\Delta u_0 + c(x) u_0 = 0, \quad x \in E^N. \tag{65}$$

Поэтому решение задачи Коши (10), (11) имеет вид $u(x,t) = u_0(x) \neq 0$ для всех $t > 0$, следовательно, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_0(x) \neq 0.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим задачу Коши (10), (11), где $c(x)$ имеет вид:

$$c(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при} \quad |x| > h, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \leq h, \end{cases} \tag{66}$$

а начальная функция $u_0(x) \equiv 1$. Введем функцию $V(x,t)$: $V(x,t) = 1 - u(x,t)$. Тогда $V(x,t)$ является решением задачи

$$\Delta V + c(x)V - \frac{\partial V}{\partial t} = c(x), \quad V|_{t=0} = 0. \tag{67}$$

При $|x| > h$ перепишем задачу (67) в следующем виде:

$$\Delta V - \frac{\partial V}{\partial t} = c(x)(1 - V) = -\frac{\alpha^2}{|x|^2} u(x,t), \quad V|_{t=0} = 0. \tag{68}$$

Тогда по формуле Пуассона [5], получим:

$$V(x,t) = \alpha^2 \int_0^t \frac{d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{N/2}} \int_{|\xi|\geq h} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \frac{u(\xi, t-\tau)}{|\xi|^2} \, d\xi. \tag{69}$$

Пусть фиксировано произвольное $T > 0$ и $0 < t \leq T$. Разобьем при $R > n$ интеграл (69) на два интеграла

$$V(x,t) = \frac{\alpha^2}{(2\sqrt{\pi})^N} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{N/2}} \int_{h\leq|\xi|\leq R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \frac{u(\xi, t-\tau)}{|\xi|^2} \, d\xi +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{(2\sqrt{\pi})^N} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{N/2}} \int_{|\xi|\geq R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \frac{u(\xi, t-\tau)}{|\xi|^2} \, d\xi = L_1 + L_2. \tag{70}$$

Используя в L_2 оценки $|\xi|^2 \geq R^2$, $|u(x,t)| \leq M$, $0 < t \leq T$, получим

$$|L_2| \leq \frac{C_3}{R^2} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{N/2}} \int\limits_{E^N} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\xi < \frac{C_3 T}{R^2}.$$

Для фиксированного T выберем R так, чтобы

$$|L_2| < \varepsilon \tag{71}$$

при всех $x \in E^N$ и каждого $t \in (0, T]$.

При фиксированном R устремим $|x|$ в L_1 к бесконечности и учтем, что $h \leq |\xi| \leq R$, при этом получим, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} L_1 = 0, \tag{72}$$

при любом $t \in (0, T]$. Из произвольности $T > 0$ и из (71) и (72) получим, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x,t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0, \tag{73}$$

т. е. существует предел $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = 1$ при всех $t > 0$.

Применяя теорему 2, получим, что существует предел (9). Как и в лемме 1, из существования предела (73), получим, что решение задачи Коши (10), (11) не имеет *равномерного* в E^N предела (9).

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. При $N \geq 3$ и $r \geq h$ рассмотрим задачу

$$\Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - \frac{\alpha^2}{r^{2+\varepsilon}}\Gamma = 0, \quad r > h, \quad \Gamma|_{r=h} = 1, \quad \Gamma'|_{r=h} = 0. \tag{74}$$

После замены переменной $r = t^{1/(N-2)}$, получим для $\Gamma_1(t) = \Gamma(t^{1/(N-2)})$ задачу:

$$\Gamma_1'' + \frac{2N-4}{N-2}\frac{\Gamma_1'}{t} - \frac{\alpha^2}{(N-2)t^{2+\varepsilon/(N-2)}} \cdot \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_1|_{t=h^{N-2}} = 1, \quad \Gamma_1'|_{t=h^{N-2}} = 0.$$

После замены $\Gamma_1(t) = W(t)/t$ получим для $W(t)$ задачу

$$W'' - \frac{\alpha^2}{(N-2)^2 t^{2+\varepsilon/(N-2)}} W = 0, \; W\Big|_{t=h^{N-2}} = h^{N-2}, \; W'\Big|_{t=h^{N-2}} = 1. \tag{75}$$

Так как очевидно, что $\int\limits^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{2+\varepsilon/(N-2)}} < \infty$, то применяя известный результат ([6, с.135, теорема 5]), получим, что для $W(t)$ имеет место асимптотика

$$W(t) \sim \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_1 t \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{76}$$

где ${\mathrm{d}_0}^2 + {\mathrm{d}_1}^2 \neq 0$. Поэтому для решения задачи (74) имеет место асимптотика:

$$\Gamma(r) \sim \mathrm{d}_1 + \frac{\mathrm{d}_0}{r^{N-2}} \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{77}$$

т. е. существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma(r) = \mathrm{d}_1. \tag{78}$$

Рассмотрим задачу Коши (9), (10), где $c(x)$ определено по формуле (13), а $u_0(x)$ определим так: $u_0(x) = u_0(|x|) = \Gamma(|x|)$, где $\Gamma(|x|)$ — решение задачи (74) при $r = |x| \geq h$, $u_0(|x|) = 1$ при $0 \leq |x| \leq h$. Ясно, что эта функция $u_0(x)$ является обобщенным решением уравнения (65). Поэтому $u(x,t) = u_0(x) \neq 0$ при всех $x \in E^N$, $t \geq 0$, т. е. существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = u_0(x) \neq 0$.

Лемма 4 доказана.

Список литературы

[1] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., 1967.

[2] Ильин А. М., Калашников А. С., Олеиник О. А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* . УМН. 1962. **17(3)**, 3–146.

[3] Krzyzanski M. *Sur ee probleme de Dirichlet pour l'aquation lineare du type elliptique dans un domaine non borne* Rend. Accademia Nazionale dei Lincei. **8(4)**, 1948, 403–416.

[4] Meyers N., Serrin J. *The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations* . J. Math. Mech. **9**, 1960, 513–538 .

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М., 1999.

[6] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.* М., 1954.

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет, Россия
E-mail address: `1216.g23@g23.relcom.ru`