ПРО УМОВИ КОРЕКТНОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

© Член-кор. НАНУ Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз

Львів, Україна

Резюме. Запропоновано варіаційне формулювання тривимірних крайових задач нелінійної теорії пружності. Дослідження умов коректності цих задач зведено до встановлення умов існування і єдиності узагальнених розв'язків відповідної варіаційної задачі. Сформульовано достатні локальні умови існування і єдиності мінімуму функціоналу.

Розглядається тривимірна крайова задача нелінійної теорії пружності у локальній постановці

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P} + \vec{f}_0 = 0, \quad \vec{P}_n\Big|_{\partial X_0} = \vec{P}^+, \tag{1}$$

$$\int\limits_{X_0} \vec{u}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)dV_0 = \vec{\alpha}, \quad \int\limits_{X_0} \vec{\nabla}_0 \times \vec{u}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)dV_0 = \vec{\beta}. \tag{2}$$

Тут X_0 – обмежена область евклідового простору R^3, яку займає тіло у відліковому природньому стані; ∂X_0 – поверхня тіла; $\hat{P} = dM_0/(d\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})$ – тензор напружень Піоли-Кірхгофа; $M_0 \equiv M_0\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)$ – диференційований за Гато додатньовизначений потенціал нелінійної теорії пружності; $\hat{e} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$; $\hat{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right)$ та $\hat{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right)$ – симетрична та антисиметрична складові тензора $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ відповідно; $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$ – радіус-вектор довільної точки тіла в актуальному рівноважному стані; $\vec{r}_0$ – радіус-вектор цієї точки у відліковому однорідному (природньому) стані, а $\vec{r}_{(0)}$ – радіус-вектор заданої точки тіла у відліковому стані; $\vec{u}$ – вектор переміщення точки з відлікового стану в актуальний, $\vec{P}_n = \vec{n} \cdot \hat{P}$ – вектор напруження; $\vec{n}$ – зовнішня нормаль у довільній точці поверхні тіла ∂X_0, яка існує в кожній точці цієї поверхні; $\vec{P}^+(\vec{r})$ – вектор поверхневого навантаження; $\vec{f}_0(\vec{r})$ – вектор об'ємної силової дії; $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ – задані сталі вектори; $\vec{\nabla}_0 \equiv \partial/\partial\vec{r}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i}\partial/\partial\xi^i$ – набла-оператор Гамільтона; (ξ^1,ξ^2,ξ^3) – декартові (лагранжеві) координати точок тіла у відліковому стані. Задані функції зовнішнього навантаження $\vec{P}^+, \vec{f}_0$ підпорядковані інтегральним умовам статичної рівноваги

$$\int\limits_{X_0} \vec{f}_0 dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ d\Sigma_0 = 0, \qquad \int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \times \vec{r} dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \times \vec{r} d\Sigma_0 = 0.$$

Робота виконана за часткової підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України.

1. Варіаційне формулювання крайової задачі.

З використанням функціоналу Лагранжа [2]

$$J[\vec{u}] = \int\limits_{X_0} \left[M_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}) - \vec{f}_0 \cdot \vec{u} \right] dV_0 - \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^{+} \cdot \vec{u} d\Sigma_0, \tag{3}$$

який заданий в рефлексивному банаховому просторі

$$V = \left\{ \vec{u} \in W \equiv W_2^1(X_0) \times W_2^1(X_0) \times W_2^1(X_0) : \int\limits_{X_0} \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) dV_0 = \vec{\alpha}, \right.$$

$$\left. \int\limits_{X_0} \vec{\nabla}_0 \times \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) dV_0 = \vec{\beta} \right\}$$

поставимо у відповідність крайовій задачі (1)-(2) її варіаційне формулювання. Тут W – простір Соболєва з нормою

$$\|\vec{u}\|_W = \left\{ \int\limits_{X_0} \alpha(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dV_0 + \int\limits_{X_0} \left[\sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} \right)^2 \right] dV_0 \right\}^{1/2},$$

$\alpha > 0$ – розмірний коефіцієнт.

Умовою стаціонарності функціоналу Лагранжа $J[\vec{u}]$ є рівняння крайової задачі (1)-(2). Отже, розв'язок вихідної задачі є стаціонарною точкою функціоналу. Якщо в просторі V функціонал $J[\vec{u}]$ опуклий, то розв'язок крайової задачі є точкою мінімуму функціоналу і навпаки.

Встановимо достатні умови опуклості функціоналу $J[\vec{u}]$.

Відомо [4], що для ізотропних матеріалів потенціал M_0 є функцією семи незалежних скалярних інваріантів тензора $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$M_0 = M_0(A),$$

$$A = (A_1, A_2, ..., A_7) \equiv (I(\hat{b}), I(\hat{b}^2), I(\hat{c}^2), I(\hat{b}^3), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{b}), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{b}^2), I(\hat{c}^2 \cdot \hat{b} \cdot \hat{c} \cdot \hat{b}^2)),$$

де $\hat{c}^i \cdot \hat{b}^j = \underbrace{\hat{c} \cdot \hat{c} \cdot ... \cdot \hat{c}}_{i} \cdot \underbrace{\hat{b} \cdot \hat{b} \cdot ... \cdot \hat{b}}_{j}$; $I(\cdot)$ – перший алгебраїчний інваріант тензора другої валентності.

Диференціал Гато функціоналу $J[\vec{u}]$ в напрямку $\vec{\varphi}$, з врахуванням подання потенціалу M_0 як функції семи незалежних скалярних інваріантів тензора $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, є

$$J'(\vec{u}, \vec{\varphi}) = \int\limits_{X_0} \left[\frac{\partial M_0(A)}{\partial A_i} \cdot \left. \frac{dA_i[\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \theta \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}]}{d\theta} \right|_{\theta=0} - \vec{f}_0 \cdot \vec{\varphi} \right] dV_0 -$$

$$- \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^{+} \cdot \vec{\varphi} d\Sigma_0, \quad \theta \in (0,1), \quad i = \overline{1,7},$$

а другий диференціал Гато, відповідно, буде

$$J''(\vec{u},\vec{\varphi},\vec{\varphi}) = \int\limits_{X_0} \Bigg\{ \Bigg[\frac{\partial^2 M_0(A)}{\partial A_i \partial A_j} \cdot \frac{dA_i[\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \theta \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}]}{d\theta}\Bigg|_{\theta=0} + \frac{\partial M_0(A)}{\partial A_i} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial A_j} \left(\frac{dA_i[\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \theta \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}]}{d\theta}\Bigg|_{\theta=0} \right) \Bigg] \cdot \frac{dA_j[\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \gamma \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\varphi}]}{d\gamma}\Bigg|_{\gamma=0} \Bigg\} dV_0, \qquad (4)$$

$\theta, \gamma \in (0,1), \quad i,j = \overline{1,7}$.

Тут і надалі індекси, які повторюються, є індексами підсумовування.

Формула (4) може бути подана так

$$J''(\vec{u},\vec{\varphi},\vec{\varphi}) = \int\limits_{X_0} \frac{\partial^2 M_0}{\partial q^{mn} \partial q^{ts}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^n} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi^s} \right) dV_0, \qquad (m,n,t,s = \overline{1,3})$$

де символами q^{mn} та q^{ts} позначено $q^{mn} = \frac{\partial u_n}{\partial \xi^m}, q^{ts} = \frac{\partial u_s}{\partial \xi^t}$.

Достатньою локальною умовою опуклості функціоналу $J[\vec{u}]$ є умова

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial q^{mn} \partial q^{ts}} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^n} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi^s} \right) \geq 0, \quad \forall \vec{\varphi} \in V, \quad (m,n,t,s = \overline{1,3}). \qquad (5)$$

Додатність квадратичної форми (5), за критерієм Сільвестра, еквівалентна системі нерівностей

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \cdots, \quad \Delta_9 > 0, \qquad (6)$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_9 -$ головні мінори матриці цієї квадратичної форми.

Отже, умова (6) є достатньою локальною умовою еквівалентності вихідної крайової задачі (1)-(2) та її варіаційного формулювання.

2. Умови існування і единості узагальнених розв'язків.

Дослідження умов коректності крайової задачі (1)-(2) зводиться до встановлення умов існування і единості узагальнених розв'язків сформульованої варіаційної задачі для функціоналу (3). Метод дослідження базується на напівнеперервності знизу інтегрального функціоналу $J[\vec{u}]$ відносно деякої слабкої збіжності та слабкої компактності підпростору V в просторі узагальнених функцій $W = W_2^1(X_0) \times W_2^1(X_0) \times W_2^1(X_0)$.

Сформулюємо в загальному випадку відповідну [3] теорему існування і единості мінімуму функціоналу Лагранжа $J[\vec{u}]$.

Теорема 1. *Нехай V є обмеженим слабо замкненим підпростором в рефлексивному банаховому просторі W, а функціонал Лагранжа $J[\vec{u}]$ двічі неперервно диференційований за Гато. Тоді:*

I°. Якщо перший диференціал Гато функціоналу $J[\vec{u}]$ в напрямку $\vec{\varphi}$

$$J'(\vec{u},\vec{\varphi}) \text{ - лінійний і неперервний за } \vec{\varphi} \qquad \forall \vec{u},\vec{\varphi} \in V,$$

а для другого диференціалу Гато $J''(\vec{u},\vec{\varphi},\vec{\psi})$ виконується умова

$$J''(\vec{u},\vec{\varphi},\vec{\varphi}) \geq 0 \qquad \forall \vec{u},\vec{\varphi} \in V,$$

то існує мінімум функціоналу $J[\vec{u}]$ в просторі V;

II°. Якщо виконуються умови пункту I° і, крім того, функціонал $J[\vec{u}]$ є строго опуклим, то в просторі V цей мінімум єдиний.

2.1. Побудова мінімізуючої послідовності для пластин.

Відповідно до [1] виберемо в просторі V мінімізуючу послідовність функцій

$$\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{r}_{30}/l\right) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}), \quad (m \in N),$$

кожен елемент якої є розв'язком вихідної крайової задачі (1)-(2) для функцій зовнішнього силового навантаження $\vec{P}^{+}_{m} = \sum\limits_{j=1}^{m} \hat{\Phi}^{(j-1)}\left(\xi^3/l\right) \overset{j-1}{\cdot} \hat{p}^{+(j)}\left(\xi^1,\xi^2\right)$, $\vec{f}_{0m} = \sum\limits_{j=1}^{m} \hat{\Phi}^{(j-1)}\left(\xi^3/l\right) \overset{j-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(j)}\left(\xi^1,\xi^2\right)$:

$$\int_{-h}^{h} \left[\left(\frac{\partial \vec{P}_1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \vec{P}_2}{\partial \xi^2}\right) \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \vec{P}_3 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^3}\right] d\xi^3 + \hat{F}^{(i)} = 0,$$

$$\left.\left[\int_{-h}^{h} \vec{P}_n \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3\right]\right|_{\partial X_0^c} =$$

$$= \int_{-h}^{h} \sum_{j=1}^{m} \hat{p}^{+(j)^T} \overset{j-1}{\cdot} \hat{\Phi}^{(j-1)^T} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3. \quad (i = \overline{1,m})$$

Тут $\vec{u}_m(\vec{r}_0) = \vec{u}_m(\vec{r}_{120} + \vec{r}_{30})$; $\left\{\hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{r}_{30}/l\right)\right\}$, $i \in \mathbf{N}$ – задана база тензорних функцій зростаючої валентності; $\vec{r}_{120} = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0}$ – радіус-вектор точок серединної поверхні пластини $(\xi^3 = 0)$, $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$ – вектор положення точок по нормалі до серединної поверхні $(-h \le \xi^3 \le h,\ 2h$ – товщина пластини); індекси $(i-1)$ та (i) вказують валентність тензорних функцій; "$\overset{i-1}{\cdot}$" – $(i-1)$ - кратний внутрішній добуток тензорів, "$\cdot$" – 1-кратний внутрішній добуток; $\vec{P}_k = \vec{\ni}_0^{\,k} \cdot \hat{P}$, $(k = \overline{1,3})$; $\hat{F}^{(i)} = \int\limits_{-h}^{h} \sum\limits_{j=1}^{m} \hat{f}_0^{(j)^T} \overset{j-1}{\cdot} \hat{\Phi}^{(j-1)^T} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3 + \vec{P}^{+}_{3+} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)}_{+} - \vec{P}^{+}_{3-} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)}_{-}$; X_0^c – серединна поверхня пластини; нижні індекси "$\pm$" позначають граничні значення відповідних величин при $\xi^3 = \pm h$; $\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел; l – характерний розмір серединної поверхні пластини.

Надалі за функції $\hat{\Phi}^{(j-1)}\left(\vec{r}_{30}/l\right)$ виберемо

$$\hat{\Phi}^{(j-1)}\left(\frac{1}{l}\vec{r}_{30}\right) \equiv \left(\frac{1}{l}\vec{r}_{30}\right)^{j-1} = \left(\frac{1}{l}\right)^{j-1} \underbrace{\vec{r}_{30} \otimes \vec{r}_{30} \otimes \cdots \otimes \vec{r}_{30}}_{j-1} =$$

$$= \left(\frac{\xi^3}{l}\right)^{j-1} \underbrace{\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \cdots \otimes \vec{\ni}_3^{\,0}}_{j-1}.$$

Лема 1. *Припустимо, що функції* $\left[\left(\vec{\ni}_3^0\right)^{j-1} \overset{j-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(j)}\right]_i$, $\left[\left(\vec{\ni}_3^0\right)^{j-1} \overset{j-1}{\cdot} \hat{p}^{+(j)}\right]_i$, $(j \in \mathbf{N})$, $(i = 1,2,3)$ *є класу* $L_2(X_0^c)$. *Тоді послідовність розв'язків* $\{\vec{u}_m\} \in V \cap L_2(X_0^c)$ $(m \in \mathbf{N})$ *є слабо збіжною до* $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \in V \cap L_2(X_0^c)$ *при* $m \to \infty$.

Доведення. Для лінійного неперервного функціоналу $\int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{u} dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \cdot \vec{u} d\Sigma_0$ розглянемо

$$\left| \int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \cdot (\vec{u} - \vec{u}_m)\, dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \cdot (\vec{u} - \vec{u}_m)\, d\Sigma_0 \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{X_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(k)}(\vec{r}_{120}) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) - \right.\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \right] dV_0 +$$

$$+ \int\limits_{\partial X_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{p}^{+(k)}(\vec{r}_{120}) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) - \right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \right] d\Sigma_0 \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{X_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(k)}(\vec{r}_{120}) \right] \cdot \left[\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \right] dV_0 + \right.$$

$$+ \int\limits_{\partial X_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{p}^{+(k)}(\vec{r}_{120}) \right] \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \right] d\Sigma_0 \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{X_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(k)} \right] \cdot \left[\left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120}) \right] dV_0 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\partial X_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left[\left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{p}^{+(k)} \right] \cdot \left[\left(\frac{\xi^3}{l}\vec{\ni}_3^0\right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)} \right] d\Sigma_0 \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left[\left. \frac{(\xi^3)^{k+i-1}}{(k+i-1)l^{k+i-2}} \right|_{\xi^3=-h}^{h} \left| \int\limits_{X_0^c} \left[\left(\vec{\ni}_3^0\right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{f}_0^{(k)} \right] \times \right.\right.$$

$$\times \left[\left(\vec{\ni}_3^0 \right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)} \right] d\Sigma_0^c \Bigg| +$$

$$+ \left. \frac{(\xi^3)^{k+i-1}}{(k+i-1)l^{k+i-2}} \right|_{\xi^3=-h}^{h} \left| \int\limits_{\partial X_0^c} \left[\left(\vec{\ni}_3^0 \right)^{k-1} \overset{k-1}{\cdot} \hat{p}^{+(k)} \right] \cdot \left[\left(\vec{\ni}_3^0 \right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)} \right] dl_0 \right| \Bigg| \leq$$

$$\leq Const \cdot \left[\|\vec{f}_0\|_V + \|\vec{P}^+\|_V \right] \cdot \|\vec{u}\|_V \cdot \left(\frac{h^{m+1}}{(m+1)l^m} - \frac{(-h)^{m+1}}{(m+1)l^m} \right) + \circ \left(\left| \frac{h}{l} \right|^m \right) \leq$$

$$\leq Const_1 \cdot \left(\frac{h^{m+1}}{(m+1)l^m} - \frac{(-h)^{m+1}}{(m+1)l^m} \right) + \circ \left(\left| \frac{h}{l} \right|^m \right) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Отже, за означенням, послідовність $\{\vec{u}_m\}$ є слабо збіжною до $\vec{u}$ при $m \to \infty$. Лема 1 доведена.

2.2. Умови напівнеперервності знизу функціоналу $J[\vec{u}]$.

Лема 2. *Нехай для тензора* $\hat{P}^* \equiv \hat{P} - \hat{P}^l$ $\Big[\hat{P}^l$ *– тензор напружень, який відповідає лінійній постановці задачі при тих самих функціях зовнішнього навантаження* $\vec{f}_0$, $\vec{P}^+$, *а* $\vec{u}^l$ *– розв'язок цієї задачі* $\Big]$ *виконується умова*

$$\left| \int\limits_{X_0} \hat{P}^*(\vec{u}) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}) dV_0 \right| \leq \left| \int\limits_{X_0} \hat{P}^l(\vec{u}) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}) dV_0 \right|.$$

Тоді $J'(\vec{u}, \vec{\varphi})$ *задовольняє наступну нерівність*

$$|J'(\vec{u}, \vec{\varphi})| \leq C \cdot \|\vec{u}\|_V \cdot \|\vec{\varphi}\|_V \qquad \forall \vec{u}, \vec{\varphi} \in V.$$

Доведення. Для вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}^l + \vec{u}^*$ перший диференціал Гато функціоналу Лагранжа в напрямку $\vec{\varphi}^*$ буде

$$J'(\vec{u}, \vec{\varphi}^*) = \int\limits_{X_0} \hat{P}(\vec{u}) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}^*) dV_0 - \int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{\varphi}^* dV_0 -$$

$$- \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \cdot \vec{\varphi}^* d\Sigma = \int\limits_{X_0} \left(\hat{P}^l(\vec{u}) + \hat{P}^*(\vec{u}) \right) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}^*) dV_0 - \int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{\varphi}^* dV_0 -$$

$$- \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \cdot \vec{\varphi}^* d\Sigma = \int\limits_{X_0} \hat{P}^*(\vec{u}) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}^*) dV_0 + \int\limits_{X_0} \vec{\nabla}_0 \cdot \left[\hat{P}^l(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi}^* \right] dV_0 -$$

$$- \int\limits_{X_0} \left[\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}^l(\vec{u}) \right] \cdot \vec{\varphi}^* dV_0 - \int\limits_{X_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{\varphi}^* dV_0 - \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}^+ \cdot \vec{\varphi}^* d\Sigma.$$

З використанням формули Гауса-Остроградського маємо

$$J'(\vec{u}, \vec{\varphi}^*) = \int\limits_{X_0} \hat{P}^*(\vec{u}) \cdot \cdot \hat{e}^T(\vec{\varphi}^*) dV_0 +$$

$$+\int\limits_{\partial X_0}\left\{\vec{n}\cdot\hat{P}^l(\vec{u})-\vec{P}^+\right\}\cdot\vec{\varphi}^* d\Sigma-\int\limits_{X_0}\left[\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P}^l(\vec{u})+\vec{f}_0\right]\cdot\vec{\varphi}^* dV_0.$$

З врахуванням існування і єдиності мінімуму функціоналу Лагранжа, який відповідає лінійній постановці задачі, отримаємо

$$J'(\vec{u},\vec{\varphi}^*)=\int\limits_{X_0}\hat{P}^*(\vec{u})\cdot\cdot\hat{e}^T(\vec{\varphi}^*)dV_0,\quad \forall\vec{u},\vec{\varphi}^*\in V.$$

В цьому випадку

$$|J'(\vec{u},\vec{\varphi}^*)|=\left|\int\limits_{X_0}\hat{P}^*(\vec{u})\cdot\cdot\hat{e}^T(\vec{\varphi}^*)dV_0\right|\le\left|\int\limits_{X_0}\hat{P}^l(\vec{u})\cdot\cdot\hat{e}^T(\vec{\varphi}^*)dV_0\right|\le$$

$$\le C\cdot\|\vec{u}\|_V\cdot\|\vec{\varphi}^*\|_V\qquad\forall\vec{u},\vec{\varphi}^*\in V.$$

Лема 2 доведена.

3. Достатні умови існування і єдиності.

ТЕОРЕМА 2.
I°. Нехай:

1) на обмеженому слабо замкненому підпросторі V рефлексивного банахового простору W функціонал Лагранжа $J[\vec{u}]$ є двічі неперервно диференційованим за Гато;

2) в просторі функцій $V\bigcap L_2(X_0^c)$ існує і є единим розв'язок $\vec{u}^l$ відповідної (1)-(2) крайової задачі лінійнії теорії пружності;

3) для тензорів $\hat{P}^*\equiv\hat{P}-\hat{P}^l$, $\hat{P}^l$ виконується умова

$$\left|\int\limits_{X_0}\hat{P}^*(\vec{u})\cdot\cdot\hat{e}^T(\vec{\varphi})dV_0\right|\le\left|\int\limits_{X_0}\hat{P}^l(\vec{u})\cdot\cdot\hat{e}^T(\vec{\varphi})dV_0\right|;\tag{7}$$

4) функції $\left[\left(\vec{\exists}_3^0\right)^{j-1}\overset{j-1}{\cdot}\vec{f}_0^{(j)}\right]_i$, $\left[\left(\vec{\exists}_3^0\right)^{j-1}\overset{j-1}{\cdot}\vec{p}^{+(j)}\right]_i\in L_2(X_0^c)$ $(j\in\mathbf{N})$;

5) виконуються достатні умови опуклості для функціоналу Лагранжа

$$\Delta_1>0,\quad\Delta_2>0,\quad\cdots,\quad\Delta_9>0\quad\forall\vec{\varphi}\ne0,\quad\forall\vec{u}\in V.$$

Тоді існує мінімум цього функціоналу в просторі функцій $V\bigcap L_2(X_0^c)$.

II°. Нехай:

1) виконуються умови пункту I°;

2) функціонал $J[\vec{u}]$ є строго опуклим.

Тоді в просторі $V\bigcap L_2(X_0^c)$ мінімум функціоналу є единим.

Доведення. Існування. За мінімізуючу послідовність в просторі V вибираємо послідовність вектор-функцій $\{\vec{u}_m\}$, для якої

$$J[\vec{u}_m]\to\inf_{\vec{u}\in V}J[\vec{u}],\quad m\to\infty.$$

Оскільки для функцій зовнішнього силового навантаження виконується умова 4), то, згідно леми 2, послідовність $\vec{u}_m$ є слабо збіжною до

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\xi^3}{l} \vec{\ni}_3^0 \right)^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120})$$

при $m \to \infty$ в просторі функцій $V \bigcap L_2\left(X_0^c\right)$.

З умови обмеженості та слабкої замкнутості підпростору V граничний елемент послідовності належить до V.

Виконання нерівності (7) дає неперервність першого функціоналу Гато. Ця умова разом з достатніми умовами 5) опуклості функціоналу $J\left[\vec{u}\right]$ забезпечують напівнеперервність знизу цього функціоналу. В свою чергу, згідно [5], справедливою є наступна нерівність

$$J\left[\vec{u}\right] \le \underline{\lim} J\left[\vec{u}_m\right].$$

Тому $J\left[\vec{u}\right] = \inf\limits_{\vec{u} \in V} J\left[\vec{u}\right]$. Отже, існує мінімум функціоналу $J\left[\vec{u}\right]$ в просторі $V \bigcap L_2\left(X_0^c\right)$.

Єдиність. Строгу опуклість функціоналу забезпечує виконання умов 5). Теорема доведена.

Список литературы

1. Г.І. Благута, Я.Й. Бурак, *Метод розвинення за тензорними функціями в нелінійній теорії пластин*, Вісник Львівського ун-ту **Вип. 45** (1996), с. 146-153.
2. Я.Й. Бурак, Г.І. Мороз, *Про побудову аналогу функціоналу Лагранжа крайових задач нелінійної теорії пружних пластин*, Доп. НАН України (1999), no. 2, с. 7-11.
3. В.Г. Литвинов, *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, М.: Наука (1987), 366 с.
4. Б.Е. Победря, *Лекции по тензорному анализу*, Изд-во Моск-го ун-та (1986), 262 с.
5. Ж. Сеа, *Оптимизация. Теория и алгоритмы*, М.: Мир (1973), 244 с.

Центр математичного моделювання
ІППММ НАН Укпаїни,
вул. Дудаєва, 15,
79005, Львів, Україна
E-mail address: moros@cmm.lviv.ua