КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

© Н.І. Білусяк, Б.Й. Пташник

Львів, Україна

Задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь почали досліджуватись порівняно недавно (див. [1-7] та бібліографію в [4]). Однією з причин цього були труднощі, пов'язані з малими знаменниками, що виникають при побудові розв'язків цих задач. Такі задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь вивчались, головним чином, для рівнянь і систем першого та другого порядків [8-10].

В даній роботі досліджується задача Діріхле для систем слабконелінійних гіперболічних рівнянь, при цьому її результати для лінійного випадку покращують результати, отримані в роботі [5] (уточнено умови теореми існування розв'язку лінійної задачі, отримані у [5]), а нелінійний випадок є узагальненням та розвитком результатів робіт [1], [2].

В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in [0,T],\, x \in \Omega\}$, Ω – коло одиничного радіуса, розглянемо задачу

$$M[u] \equiv E\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{s=0}^{n-1} A_s \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2s}\partial x^{2(n-s)}} = f(t,x) + \varepsilon\Phi(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=T} = 0, \quad l = 0,1,..,n-1, \tag{2}$$

де $\varepsilon \in \mathbb{R}$, E – одинична матриця, $A_s = \|a^s_{rq}\|^m_{r,q=1}$ – матриці з дійсними сталими елементами, $u = col(u_1, u_2, .., u_m)$, $f = col(f_1, f_2, .., f_m)$, $\Phi = col(\Phi_1, \Phi_2, .., \Phi_m)$. Функція $\Phi(t,x,u)$ визначена в області D_1 і неперервна за змінною t та досить гладка за x, u в цій області, де

$$D_1 = \{(t,x,u) \,:\, (t,x) \in D,\, u \in \overline{S}(u^0, r)\},$$
$$\overline{S}(u^0, r) = \{u \in \overline{C}^{2n}(\overline{D}) \,:\, \|u - u^0\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant r\}, \quad r > 0,$$

$u^0 \equiv u^0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі з умовами (2) для лінійного рівняння

$$M[u] = f(t,x). \tag{1'}$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$, $f(t,x)$, $\Phi(t,x,u)$.

При дослідженні нелінійного випадку використовуватимемо деякі результати лінійної задачі.

Незбурена задача (1 ′),(2) (при $\varepsilon = 0$). Розв'язок цієї задачі шукається у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t) exp(ikx), \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ визначаються як розв'язки крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$Eu_k^{(2n)}(t) + \sum_{s=0}^{n-1} A_s (ik)^{2n-2s} u_k^{(2s)}(t) = f_k(t), \tag{4}$$

$$u_k^{(2l)}(0) = u_k^{(2l)}(T) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$f_k(t) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(t,x) exp(-ikx) dx.$$

Будемо вважати, що система рівнянь (1) – строго гіперболічна за Петровським, тобто, що всі корені рівняння

$$det \left[E\lambda^{2n} + \sum_{s=0}^{n-1} A_s \lambda^{2s} \right] = 0 \tag{6}$$

є дійсними та різними. Позначимо через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}$ додатні корені рівняння (6).

Для єдиності розв'язку задачі (1 ′),(2) у просторі $\overline{C}^{2n}(\overline{D})$ необхідно і досить, щоб усі числа $\lambda_j T/\pi$, $j = 1, \ldots, mn$, були ірраціональними.

Нехай виконуються умови єдиності розв'язку задачі (1 ′),(2). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує єдина матриця Гріна $G_k(t,\tau) = \|g_{rqk}(t,\tau)\|_{r,q=1}^m$ задачі (4),(5), за допомогою якої розв'язок цієї задачі зображається формулою

$$u_k(t) = \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \tag{7}$$

а розв'язок задачі (1 ′),(2) формально визначається рядом

$$u^0(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau exp(ikx). \tag{8}$$

У квадраті $K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant t, \tau \leqslant T\}$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$ елементи матриць $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, зображаються формулами

$$\begin{gathered} g_{rqk}(t,\tau) = |k|^{-2n+1} (sgn(t-\tau) \sum_{\nu=1}^{mn} A_\nu^{rq} sh(i|k|\lambda_\nu(t-\tau)) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{mn} B_{jp\mu}^{rq} (sh(i|k|\lambda_{(j-1)m+p}(t-T)) \times \\ \times (sh(i|k|\lambda_\mu \tau) + sh(i|k|\lambda_\mu(\tau-T))) sh^{-1}(i|k|\lambda_{(j-1)m+p}(\tau-T)), \\ r,q = 1, \ldots, m, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{gathered} \tag{9}$$

де A_{ν}^{rq} , $B_{jp\mu}^{rq}$ – сталі, які залежать від коефіцієнтів рівняння (1) і не залежать від k .

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функції $g_{rqk}(t,\tau)$ довизначаємо за неперервністю справа (зліва).

Формули (9) містять у знаменниках вирази $sh(i|k|\lambda_s T)$, $s = 1,\ldots,mn$, модулі яких, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини $k \in \mathbb{Z}$. Тому ряд (8) є, взагалі кажучи, розбіжним, а питання про існування розв'язку задачі (1 ′),(2) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Для доведення існування розв'язків задач (1 ′),(2) та (1),(2) використовуємо таку лему, яка доведена в роботі [1].

Лема. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел a/π , ряд*

$$\sum_{|k|>0} |k|^{1-s}|1 - exp(2ia|k|)|^{-1}$$

є збіжним при $s \geqslant 3$.

Теорема 1. *Нехай $f \in \overline{C}^{(0,3)}(\overline{D})$. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\lambda_r T/\pi$, $r = 1,\ldots,mn$, існує єдиний розв'язок задачі (1 ′),(2) з простору $\overline{C}^{2n}(\overline{D})$, який зображається рядом (8) і неперервно залежить від $f(t,x)$.*

Доведення. Із оцінок

$$\tilde{f}_{qk} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} |f_{qk}(t)| \leqslant C_0|k|^{-3}\|f_q\|_{C^{(0,3)}(\overline{D})}, \tag{10}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\int_0^T g_{rqk}(t,\tau)f_{qk}(\tau)d\tau\right| \leqslant |k|^{-2n+1+l}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{mn}\overline{C}_j|1 - exp(2i|k|\lambda_j T)|^{-1}\tilde{f}_{qk},\ r,q = 1,\ldots,m,\ l = 0,1,\ldots,2n,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{11}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\int_0^T g_{rq0}(t,\tau)f_{q0}(\tau)d\tau\right| \leqslant C_1, \tag{12}$$

та з леми випливає, що для майже всіх чисел $\lambda_r T/\pi$, $r = 1,\ldots,mn$, справедлива наступна оцінка

$$\|u^0\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant C_2\|f\|_{\overline{C}^{(0,3)}(\overline{D})} \equiv \omega, \tag{13}$$

де ω , $C_0,C_1,C_2,\overline{C}_s, s = 1,\ldots mn,$ – додатні сталі, не залежні від k . З останньої нерівності випливає доведення теореми.

2.Збурена задача (1),(2). ($\varepsilon \neq 0$). Нехай

$$\Phi_j(t,x,u) = \sum_{|k|\geqslant 0} \Phi_{jk}(t,\{u_s(t)\}) exp(ikx), \quad j=1,\dots,m, \tag{14}$$

$$\Phi_{jk}(t,\{u_s(t)\}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \Phi_j \left(t, x, \sum_{|s|\geqslant 0} u_s(t) exp(isx) \right) exp(-ikx) dx.$$

Якщо ряди

$$(2\pi)^{-1} \sum_{|k|\geqslant 0} g_{jrk}(t,\tau) exp(ik(x-\xi)), \quad j,r=1,\dots,m \tag{15}$$

рівномірно збігаються в області $\overline{D}\times\overline{D}$ до функцій $K_{jr}(t,x,\tau,\xi)$, відповідно, то задача (1),(2) зводиться до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\tau d\xi, \tag{16}$$

де $K(t,x,\tau,\xi) = \|K_{jr}(t,x,\tau,\xi)\|_{j,r=1}^m$.

Із леми та оцінок (див. (11) при $l=0$)

$$\max_{0\leqslant t,\tau\leqslant T} |g_{jrk}(t,\tau)| \leqslant |k|^{-2n+1} \sum_{p=1}^{mn} \overline{C}_p |1-exp(2i\lambda_p|k|T)|^{-1}, \quad j,r=1,\dots,m,$$

випливає, що ряди (15) збігаються рівномірно в області $\overline{D}\times\overline{D}$ для майже всіх чисел $\lambda_j T/\pi$, $j=1,\dots,mn$, якщо $n\geqslant 2$.

Позначимо через A_ν нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\overline{S}(u^0,r)$ формулою

$$A_\nu[u(t,x)] \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\tau d\xi, \tag{17}$$

а через V – сукупність вектор-функцій $v\in \overline{C}^{2n}(\overline{D})$, для яких $\|v-u^0\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant r - |\varepsilon|\Psi = \varkappa$, де

$$\Psi = C_0(1+r+\omega)^3 \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^{mn} \overline{C}_s \overline{\Phi}_r \sum_{|k|>0} |k|^{-2} |1-exp(2i|k|\lambda_s T)|^{-1} + C_1,$$

$$\overline{\Phi}_r = \max_{0\leqslant |s|\leqslant 4} \max_{D_1} |\partial^{|s|}\Phi_r(t,x,u)/\partial x^{s_0}\partial u_1^{s_1}\dots\partial u_p^{s_p}|,$$

$\omega, C_0, C_1, \overline{C}_s, s=1,\dots mn,$ – сталі, визначені формулами (10)-(13).

Тоді рівняння (16) запишеться у вигляді

$$u(t,x) = A_{u^0}[u(t,x)].$$

Теорема 2. *Нехай* $n \geqslant 2$, *виконуються умови теореми 1, і нехай функція* $\Phi(t,x,u)$ *визначена в області* D_1 *та неперервна за* t *і маєобмежені частинні похідні за* x,u *до 4-ого порядку включно в цій області. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j=1,\ldots,mn$, *і для всіх* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \min(1/\Psi, r/\Psi)$, *існує єдиний розв'язок задачі (1),(2), який неперервно залежить від* $f(t,x)$.

Доведення. За умов теореми із формули (14) отримуємо

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |\Phi_{jk}(t,\{u_s(t)\})| \leqslant C_0 \overline{\Phi}_j |k|^{-3}(1+r+\omega)^3. \tag{18}$$

Враховуючи (11), (12), (17), (18) та лему, одержуємо, що для майже всіх чисел $\lambda_j T/\pi$, $j=1,\ldots,mn$, та для всіх $\varepsilon, \varepsilon < r/\Psi$, справджується оцінка

$$\|A_v[u]-u^0\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})}| \leqslant \|v-u^0\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} + |\varepsilon| \| \int\limits_D K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa + \|\varepsilon\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{|q|\leqslant 2n} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{|q|}}{\partial t^{q_1}\partial x^{q_2}} \int\limits_0^T \sum_{r=1}^{m} \sum_{|k|\geqslant 0} g_{jrk}(t,\tau)\Phi_{rk}(\tau,\{u_s(\tau)\}) \exp(ik(x-\xi))d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa + \|\varepsilon\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{|q|\leqslant 2n} \sum_{|k|\geqslant 0} \sum_{r=1}^{m} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \frac{\partial^{q_1}}{\partial t^{q_1}} \int\limits_0^T g_{jrk}(t,\tau)d\tau \right| \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\Phi_{rk}(t,\{u_s(t)\})||k|^{q_2} \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa + \|\varepsilon\| C_0(1+r+\omega)^3 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{mn} \overline{C}_s \overline{\Phi}_r \sum_{|k|>0} |k|^{-2} |1-exp(2i|k|\lambda_s T)|^{-1} + C_1 = \varkappa + \|\varepsilon\|\Psi = r.$$

Покажемо тепер, що оператор A_v є оператором стиску. Нехай $u^1, u^2 \in \overline{S}(u^0,R)$. Позначимо $\overline{u}_j(t,x) \equiv (1-\theta)u_j^1(t,x) + \theta u_j^2(t,x)$, $\theta \in (0,1)$. Із формули (17), враховуючи лему, оцінки (11)-(13), (18) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже всіх чисел $\lambda_j T/\pi$, $j=1,\ldots,mn$, є справедливою оцінка

$$\|A_v[u^1]-A_v[u^2]\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon| \| \int\limits_D K(t,x,\tau,\xi)(\Phi(\tau,\xi,u^1(\tau,\xi)) - \Phi(\tau,\xi,u^2(\tau,\xi)))d\tau d\xi\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon| \|u^1-u^2\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})} \sum_{j=1}^{m} \sum_{|q|\leqslant 2n} \sum_{|k|\geqslant 0} \sum_{r=1}^{m} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \frac{\partial^{q_1}}{\partial t^{q_1}} \int\limits_0^T g_{jrk}(t,\tau)d\tau \right| |k|^{q_2} \times$$

$$\times \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \sum_{i=1}^{m} \int\limits_\Omega \frac{\partial \Phi_r(t,\xi,\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_m)}{\partial u_i} \exp(-ikx)d\xi \right| \leqslant |\varepsilon|\Psi\|u^1-u^2\|_{\overline{C}^{2n}(\overline{D})}.$$

Із останньої нерівності бачимо, що A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon|\Psi < 1$. Крім того, A_v є неперервним за v. Згідно з теоремами 1 і 3 із [11], система рівнянь (16), а разом з нею і задача (1),(2), має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено.

Отримані результати перенесено на випадок задачі в області $D = (0,T) \times G$, G – обмежена однозв'язна область із $\mathbb{R}^p$, для систем рівнянь

$$M[u] = E\frac{\partial^{2n}u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j} L^{n-j}u(t,x) = f(t,x) + \varepsilon\Phi(t,x,u(t,x)),$$

з умовами (2) та умовами

$$L^q u(t,x)|_{\partial G} = 0, \quad t \in [0,T], \quad q = 0,1,\ldots,n-1,$$

де $L \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$ – самоспряжений еліптичний в області G диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами, $n > (3p+1)/2$.

Побудовано розв'язок задачі у вигляді векторного ряду за власними функціями задачі $LX(x) = \lambda X(x), \quad X(x)|_{\partial G} = 0$.

Список літератури

1. Білусяк Н. І., Пташник Б.Й., *Задача з умовами типу умов Діріхле для слабконелінійних гіперболічних рівнянь*, Вісник Прикарпатського університету.Природничо-математичні науки **1** (1999), 22-32.
2. Білусяк Н. І., Пташник Б.Й., *Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь*, Укр. мат. журн. **53** (2001), no. 2, 244-249.
3. Бобик І. О., Пташник Б. Й., *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіціє нтами*, Укр. мат. журн. **46** (1994), no. 7, 795-802.
4. Пташник Б.И., *Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, К.: Наук. думка, 1984., p. 284.
5. Пташник Б. И., *Задача типа Дирихле для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами*, Мат. методы и физ.-мех. поля. **2** (1975), 18-23.
6. Пташник Б. И., Фиголь В. В., *Краевая задача для системы интегро-диференциальных уравнений гиперболического типа*, Мат. методы и физ.-мех. поля **22** (1985), 7-10.
7. Фиголь В. В., *Краевая задача для гиперболических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*, Материалы 7-ой конференции молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УРСР. Львов, 1980, (Рукопись в деп. в ВИНИТИ N1379-81), p. 179-184.
8. Митропольський Ю. А., Урманчева Л. Б., *О двухточечной задаче для системмы гиперболических уравнений*, Укр. мат. журн. **42** (1990), no. 2, 1657-1663.
9. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г., *Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку*, Укр. мат. журн. **47** (1995), no. 10, 1370-1375.
10. Павленко В. Н., *О существовании полуправильного решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа*, Укр. мат. журн. **41** (1989), no. 12, 1659-1664.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, М.: Наука, 1977, p. 742.

79602, м.Львів, вул. Університетська 1,
Львівський державний університет імені Івана Франка.
E-mail address: nbil@softservecom.com