Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с. 181-189.

ЛОКАЛЬНЫЕ L_p–ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Скрыпник Т.М.

Донецк, Украина

1. В работе изучаются внутренние оценки и оценки вблизи границы производных решений линейного эллиптического уравнения

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 1} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^{\beta}u(x)\right) = \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}f(x), \quad x\in\Omega \tag{1}$$

с измеримыми коэффициентами. Здесь Ω – ограниченное открытое множество в R^n. Предполагаем, что $n>2$, при $n=2$ нужно сделать небольшие изменения, связанные с применением теоремы вложения. Дополнительные условия на границу области будут сформулированы ниже. В (1) и далее используются стандартные мультииндексные обозначения: $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – мультииндекс, компоненты α_i которого являются неотрицательными целыми числами, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$, $\mathcal{D}^{\alpha}u(x)=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, если $|\alpha|=1$, $\mathcal{D}^{\alpha}u(x)=u(x)$, если $|\alpha|=0$.

При получении оценок вблизи границы будем предполагать, что для некоторой точки $x_0\in\partial\Omega$ выполнены условия

$$u(x)=0 \quad \text{для} \quad x\in\Gamma'\cap B(x_0,R_0), \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha|=1}\sum_{|\beta|\leqslant 1} a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^{\beta}u(x)\cos(\nu,x_{\alpha})=0 \;\; \text{для} \;\; x\in\Gamma''\cap B(x_0,R_0) \tag{3}$$

при некотором $R_0>0$. Здесь Γ',Γ'' – такие открытые подмножества $\partial\Omega$, что $\Gamma'\cap\Gamma''=\emptyset$, $\overline{\Gamma'}\cup\overline{\Gamma''}=\partial\Omega$, $B(x_0,R_0)$ – открытый шар радиуса R_0 с центром в точке x_0. В случае гладкой границы $\partial\Omega$ $\cos(\nu,x_{\alpha})$ – косинус угла между ортом внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x и осью x_i, если $|\alpha|=\alpha_i=1$.

Обозначим далее нормы в пространствах $W^1_p(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ через $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ соответственно. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

а) коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$, $|\alpha|,|\beta|\leqslant 1$, уравнения (1) определены при $x\in\Omega$, измеримы и удовлетворяют при $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$ следующим неравенствам

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\geqslant \nu_1|\xi|^2, \tag{4}$$

$$|\alpha_{\alpha\beta}(x)|\leqslant\nu_2 \quad \text{при} \quad |\alpha|=|\beta|=1, \tag{5}$$

$$\sum_{|\alpha|=1}\{\|a_{\alpha,0}(x)\|_{r_1,\Omega}+\|a_{0,\alpha}(x)\|_{r_1,\Omega}\}+\|a_{0,0}(x)\|_{\frac{r_1}{2},\Omega}\leqslant\nu_2 \tag{6}$$

с положительными постоянными ν_1, ν_2 и $r_1 > n$.

б) Функции $f_\alpha(x)$, $|\alpha| \leqslant 1$, принадлежат пространствам $L_{p_\alpha}(\Omega)$ с $p_\alpha = p$ при $|\alpha| = 1$, $p_\alpha = \dfrac{np}{n+p}$ при $|\alpha| = 0$ с некоторым $p > 2$.

При изучении поведения решения вблизи границы будут также предполагаться следующие условия:

в) существует положительное число δ_1 такое, что для любых $y \in \Gamma'$, $R \in (0, R_0)$, выполнено неравенство

$$mes\,(B(y,R) \setminus \Omega) \geqslant \delta_1\, mes\, B(y,R); \tag{7}$$

г) существует положительное число d такое, что для любых $y \in \Gamma''$, $R \in (0, R_0)$, $r \in (1,2)$ и произвольной функции $u(x) \in W_r^1(\Omega(y,R))$ существует ее продолжение $\tilde{u}(x) \in W_r^1\Big(B\Big(y, \dfrac{R}{2}\Big)\Big)$, удовлетворяющее оценке

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x} \right\|_{r, B(y, \frac{R}{2})} \leqslant d \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right\|_{r, \Omega(y,R)}, \tag{8}$$

где $\Omega(y,R) = \Omega \cap B(y,R)$;

д) для $y \in \overline{\Gamma'} \cap \overline{\Gamma''}$ выполнено условие г) и, кроме того, функция $\tilde{u}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$mes\left\{x \in B\Big(y, \frac{R}{2}\Big) \setminus \Omega : \tilde{u}(x) = 0\right\} \geqslant \delta_2\, mes\, B\Big(y, \frac{R}{2}\Big) \tag{9}$$

с положительным числом δ_2, не зависящим от $u(x), y, R$.

Замечание 1. *Просто проверяется, что условие г) выполнено в случае липшицевости части границы* Γ''. *Для выполнения условия д) достаточны липшицевость* Γ'' *и* $\overline{\Gamma'} \cap \overline{\Gamma''}$.

Функция $u(x) \in W_2^1(\Omega(x_0, R_0))$ называется локальным решением уравнения (1) в $\Omega(x_0, R_0)$, если для произвольной функции $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega(x_0, R_0))$, равной нулю вблизи $\partial\Omega(x_0, R_0)$, выполнено интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant 1} \int\limits_{\Omega(x_0,R_0)} a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\alpha u(x)\mathcal{D}^\beta \varphi(x)dx = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \int\limits_{\Omega(x_0,R_0)} f_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha \varphi(x)dx. \tag{10}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, \Gamma')$ замыкание в норме $W_2^1(\Omega)$ множества функций класса $C^\infty(\overline{\Omega})$, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности множества Γ'.

Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega(x_0, R_0), \Gamma')$ называется локальным решением задачи (1)-(3) в $\Omega(x_0, R_0)$, если выполнено интегральное тождество (10) для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega(x_0, R_0), \Gamma')$, равной нулю вблизи $\Omega \cap \partial B(x_0, R_0)$.

Будем предполагать также при получении оценок вблизи границы справедливость вложения $W_r^1(\Omega) \subset L_{\frac{nr}{n-r}}(\Omega)$ при $1 < r \leqslant 2$, так что выполнено неравенство

$$\|u\|_{\frac{nr}{n-r}, \Omega} \leqslant \kappa \|u\|_{1,r,\Omega} \quad \text{при} \quad u(x) \in W_r^1(\Omega. \tag{11}$$

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие а) и пусть* $x_0 \in \Omega$ *и* $R > 0$ *таковы, что* $B(x_0, 2R) \subset \Omega$. *Существует число* $p_1 > 2$, *зависящее лишь от* $n, \nu_1, \nu_2, r_1, \kappa$ *такое, что для любого локального в* $B(x_0, R_0)$ *решения уравнения (1) выполнена оценка*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{p,B(x_0,\frac{R}{2})} \leqslant K_1 \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|f_\alpha\|_{p_\alpha,B(x_0,2R)} + \|u\|_{\overline{p},B(x_0,2R)} \right\}, \tag{12}$$

если функции $f_\alpha(x)$ *удовлетворяют условию б) при* $2 \leqslant p \leqslant p_1$, $\overline{p} = \max\{p, \frac{2r_1}{r_1-2}\}$ *и с постоянной* K_1, *зависящей от тех же параметров, что и* p_1, *и дополнительно еще от* R.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия а), в), г), д) и пусть* $R \in (0, R_0)$. *Существует число* $p_2 > 2$, *зависящее лишь от* $n, \nu_1, \nu_2, r_1, \delta_1, \delta_2, d, \kappa$, *и такое, что для любого локального в* $\Omega(x_0, R)$ *решения задачи (1)-(3) выполнена оценка*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{p,\Omega(x_0,\frac{R}{2})} \leqslant K_2 \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|f_\alpha\|_{p_\alpha,\Omega(x_0,2R)} + \|u\|_{\overline{p},B(x_0,2R)} \right\}, \tag{13}$$

если функции $f_\alpha(x)$ *удовлетворяют условию б) при* $2 \leqslant p \leqslant p_2$ *с тем же* $\overline{p}$, *что и в (12) и с постоянной* K_2, *зависящей от тех же параметров, что и* p_2, *и дополнительно еще от* R.

Локальные оценки (12), (13) немедленно приводят к оценке решения граничной задачи для уравнения (1) с условиями

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma' \tag{14}$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|\leqslant 1} a_{\alpha\beta}(x)\mathcal{D}^\beta u(x) \cos(\nu, x_\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma''. \tag{15}$$

Решение задачи (1), (14), (15) понимается аналогично выше определенному локальному решению задачи (1)-(3).

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия а), в), г), д). Тогда для произвольного решения* $u(x)$ *задачи (1), (14), (15) выполнена оценка*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{p,\Omega} \leqslant K_3 \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|f_\alpha\|_{p_\alpha,\Omega} + \|u\|_{\overline{p},\Omega} \right\}, \tag{16}$$

если функции $f_\alpha(x)$ *удовлетворяют условию б) при* $2 \leqslant p \leqslant \min(p_1, p_2)$ *с тем же* $\overline{p}$, *что и в (12) и постоянной* K_3, *зависящей лишь от* $n, \nu_1, \nu_2, r_1, \delta_1, \delta_2, d, \kappa, R_0$.

Отметим частный случай содержащегося в теореме 3 результата, соответствующего задаче Дирихле.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия а), б) и в) и $\Gamma' = \partial\Omega$. Тогда для произвольного решения $u(x)$ задачи (1), (14) выполнена оценка (16) с постоянной K_3, зависящей лишь от $n, \nu_1, \nu_2, r_1, R_0, \delta_1, \kappa$ и с теми же $p, p_\alpha, \overline{p}$, что и в оценке (16).*

Оценки вида (16) были получены раньше в [2, 5] при выполнении иных предположений относительно области Ω. Для решения задачи Дирихе ($\Gamma'' = \emptyset$) Н.Мэйерс доказал в [5] оценку вида (16) в предположении справедливости в Ω W_p^1 – оценки для уравнения Лапласа с некоторым $\overline{p} > 2$. Метод доказательства заключается в разрешимости задачи (1), (14) на основе принципа сжатых отображений и использования обратного оператора, соответствующего уравнению Лапласа. Аналогичные результаты в случае условий (14), (15) получены К. Грёгером в [2].

В данной работе для доказательства априорных оценок используется локальный вариант леммы Геринга (см. [1, 6]).

Отметим известные результаты по использованию леммы Геринга для доказательства повышения показателей суммируемости производных решений нелинейных уравнений (см., например, [4, 6]). Однако, из этих работ оценки вида (12), (13), (16) не следуют.

2. В этом пункте приведем формулировку леммы Геринга, используемую далее.

Лемма 1. *[1] Пусть $g(x), h(x)$ – неотрицательные функции, определенные в шаре $B(x_0, R_0)$, и такие, что $g(x), h(x) \in L_{q_0}(B(x_0, R_0))$, $q_0 > 1$.*

Предположим, что для каждой точки $y \in B(x_0, R_0)$ при $\rho < \frac{1}{20}\operatorname{dist}(y, \partial B(x_0, R_0))$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{B(y,\frac{\rho}{2})} [g(x)]^{q_0} dx \leqslant C \left\{ \left[\int\limits_{B(y,20\rho)} g(x) dx \right]^{q_0} + \int\limits_{B(y,20\rho)} [h(x)]^{q_0} dx \right\} \tag{17}$$

с некоторой независящей от y, ρ постоянной C. Тогда существуют $q_1 > q_0$, зависящее лишь от C, q_0, n, и K, зависящее от тех же параметров и R_0, такие, что при $q_0 \leqslant q \leqslant q_1$, $h(x) \in L_q(B(x_0, R))$ имеет место оценка

$$\int\limits_{B(x_0,\frac{R_0}{2})} [g(x)]^q dx \leqslant K \left\{ \left(\int\limits_{B(x_0,R_0)} [g(x)]^{q_0} dx \right)^{\frac{q}{q_0}} + \int\limits_{B(x_0,R_0)} [h(x)]^q dx \right\}. \tag{18}$$

3. В этом пункте дадим доказательство теоремы 1. Будем предполагать, что выполнено условие б) для функции $f_\alpha(x), |\alpha| \leqslant 1$, условие на p будет указано далее.

Пусть $y \in B(x_0, R)$ и $\rho > 0$ таковы, что $B(y, \rho) \subset B(x_0, R)$ и обозначим

$$\overline{u}(y, \rho) = \frac{1}{mes\, B(y, \rho)} \int\limits_{B(y,\rho)} u(x) dx. \tag{19}$$

Зафиксируем некоторую функцию $\omega : R^1 \to R^1$ класса $C_0^\infty(R^1)$, равную единице на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, нулю вне отрезка [-1,1] и такую, что $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ при $t \in R^1$.

Подставим в интегральное тождество (10) пробную функцию

$$\varphi(x) = [u(x) - \overline{u}(y,\rho)]\,\psi_\rho^2(x,y), \tag{20}$$

где $\psi_\rho(x,y) = \omega\Big(\dfrac{|x-y|}{\rho}\Big)$. Укажем отдельно оценку одного из возникающих слагаемых. Используя теорему вложения и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{gathered}
\Bigg|\int\limits_{B(y,\rho)} f_0(x)\,[u(x)-\overline{u}(y,\rho)]\psi_\rho^2(x,y)dx\Bigg| \leqslant \\
\leqslant \Bigg\{\int\limits_{B(y,\rho)} \big|f_0(x)\big|^{\frac{2n}{n+p}}dx\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\int\limits_{B(y,\rho)} \big|f_0(x)\big|^{\frac{np}{n+p}}dx\Bigg\}^{\frac{1}{n}}\cdot \\
\cdot\Bigg\{\int\limits_{B(y,\rho)} \big[|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|\psi_\rho^2(x,y)\big]^{\frac{2n}{n-2}}dx\Bigg\}^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\int\limits_{B(y,\rho)}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\psi_\rho^2(x,y)dx + \frac{C_1}{\varepsilon}\big[F(x_0,R)\big]^{\frac{2p}{n+p}}\int\limits_{B(y,\rho)}\big|f_0(x)\big|^{\frac{2n}{n+p}}dx+ \\
+\frac{C_1\varepsilon}{\rho^2}\int\limits_{B(y,\rho)}|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|^2dx.
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь ε – произвольное положительное число,

$$F(x_0,R) = \Bigg\{\int\limits_{B(x_0,R)}\big|f_0(x)\big|^{\frac{np}{n+p}}dx\Bigg\}^{\frac{n+p}{np}} \tag{22}$$

В (21) и далее в этом пункте через C_j, $j=1,2,\ldots$ обозначаем постоянные, зависящие лишь от n,ν_1,ν_2,r_1,κ.

Используя (21) и стандартные вычисления, получаем из (10) с функцией $\varphi(x)$, заданной равенством (20), следующее неравенство

$$\begin{gathered}
\int\limits_{B(y,\rho)}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\psi_\rho^2(x,y)dx \leqslant C_2\Bigg\{\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{B(y,\rho)}|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|^2dx+ \\
+\Bigg[\int\limits_{B(y,\rho)}|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}}dx\Bigg]^{\frac{r_1-2}{r_1}} + |\overline{u}(y,\rho)|^2\rho^{\frac{r_1-2}{r_1}n}+ \\
+\int\limits_{B(y,\rho)}\Bigg\{\sum_{|\alpha|=1}f_\alpha^2(x) + \big[F(x_0,R)\big]^{\frac{2p}{n+p}}|f_0(x)|^{\frac{2n}{n+p}}\Bigg\}dx\Bigg\}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Оценим первые два интеграла правой части (23) по теореме вложения и получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{B(y,\rho)}|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|^2dx+\left[\int\limits_{B(y,\rho)}|u(x)-\overline{u}(y,\rho)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}}dx\right]^{\frac{r_1-2}{r_1}}\leqslant\\
&\leqslant C_3\left\{\frac{1}{\rho^2}\left[\int\limits_{B(y,\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\frac{2n}{n+2}}dx\right]^{\frac{n+2}{n}}+\left[\int\limits_{B(y,\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2}dx\right]^{\frac{2}{r_2}}\right\}\leqslant \qquad (24)\\
&\leqslant C_4\rho^{n(1-\frac{2}{r_2})}\left\{\int\limits_{B(y,\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2}dx\right\}^{\frac{2}{r_2}},
\end{aligned}
$$

где

$$
r_2=\frac{2r_1n}{(n+2)r_1-2n}.
$$

Используя последнее неравенство, получаем из (23)

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B(y,\frac{\rho}{2})}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx\leqslant C_5\left\{\rho^{n(1-\frac{2}{r_2})}\left[\int\limits_{B(y,\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2}dx\right]^{\frac{2}{r_2}}+\right.\\
&\left.+\int\limits_{B(y,\rho)}\left[\sum_{|\alpha|=1}|f_\alpha(x)|^2+F(x_0,R)\right]^{\frac{2p}{n+p}}|f_0(x)|^{\frac{2n}{n+p}}+u^2(x)dx\right\}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Сейчас находимся в условиях леммы 1, если определить функции $g(x),h(x)$ и число q_0 равенствами

$$
\begin{aligned}
&g(x)=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2},\\
&h(x)=\left\{\sum_{|\alpha|=1}|f_\alpha(x)|^2dx+[F(x_0,R)]^{\frac{2p}{n+p}}|f_0(x)|^{\frac{2n}{n+p}}+u^2(x)\right\}^{\frac{r_2}{2}} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$
q_0=\frac{(n+2)r_1-2n}{r_1n}. \qquad (28)
$$

Пусть q_1 – число, определяемое леммой 1 с q_0 вида (28) и с постоянной C_5 из неравенства (26). Число p_1, существование которого формулируется в теореме 1, определим равенством $p_1=r_2q_1$ и теперь число p в условии б) на функции $f_\alpha(x)$ – произвольное число из интервала $(2,p_1)$.

Применяя неравенство (18) с $q=\dfrac{r}{p_2}$ и используя (22), получаем оценку

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B(x_0,\frac{R}{2})}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p dx\leqslant C_6\left\{\left[\int\limits_{B(x_0,R)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx\right]^{\frac{p}{2}}+\right.\\
&\left.+\int\limits_{B(x_0,R)}\left[\sum_{|\alpha|=1}|f_\alpha(x)|^p+|u(x)|^p\right]dx+\left[\int\limits_{B(x_0,R)}|f_0(x)|^{\frac{np}{n+p}}dx\right]^{1+\frac{p}{n}}\right\}. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Наконец, первый интеграл правой части (29) можем оценить, используя неравенство (23)

$$\int\limits_{B(x_0,R)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \le C_7 \left\{ R^{\frac{2n}{r_1}-2} \Big[\int\limits_{B(x_0,2R)} |u(x)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}} dx \Big]^{\frac{r_1-2}{r_1}} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{B(x_0,R)} \sum_{|\alpha|=1} |f_\alpha(x)|^2 dx + \Big[\int\limits_{B(x_0,2R)} |f_0(x)|^{\frac{np}{n+p}} dx \Big]^{\frac{2}{n}+\frac{2}{p}} \right\}. \tag{30}$$

Теперь оценка (12) следует из неравенств (29), (30), и доказательство теоремы 1 закончено.

4. Доказательство теоремы 2 основано на тех же рассуждениях, что и в доказательстве теоремы 1, и дадим только необходимые пояснения, связанные с некоторыми изменениями. Начнем с доказательства аналога неравенства (26) и будем различать следующие случаи значений y и ρ:

1) $B(y,\rho) \cap \partial\Omega = \emptyset$; (31)
2) $B(y,\rho)\cap\partial\Omega \neq \emptyset$; $B(y,4\rho)\cap\Gamma' = \emptyset$; (32)
3) $B(y,\rho)\cap\partial\Omega \neq \emptyset$; $B(y,4\rho)\cap\Gamma'' = \emptyset$; (33)
4) $B(y,\rho)\cap\partial\Omega \neq \emptyset$; $B(y,4\rho)\cap\overline{\Gamma'}\cap\overline{\Gamma''} \neq \emptyset$. (34)

Первый случай рассматривается аналогично доказательству теоремы 1. Во втором случае выберем произвольно точку $z \in B(y,\rho)\cap\Gamma''$ и продолжим функцию $u(x)$ на $B(z,3\rho)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{r,B(z,\rho')} \leqslant d \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{r,\Omega(z,2\rho')} \tag{35}$$

при $1 < r < 2$, $0 < \rho' \leqslant 4\rho$. Мы сохраняем обозначение $u(x)$ за продолженной функцией и отметим также, что достаточно вести рассмотрения для достаточно малого R. Подставим в интегральное тождество (10) пробную функцию

$$\varphi(x) = [u(x) - \overline{u}(z,3\rho)]\, \psi^2_{3\rho}(x,z).$$

В этом случае снова приходим к неравенству (23) с заменой $B(y,\rho)$ на $\Omega(z,3\rho)$ и с заменой в определении $F(x_0,R)$ области интегрирования $B(x_0,R)$ на $\Omega(x_0,R)$. Для получения оценки вида (24) поступаем следующим образом

$$\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\Omega(z,3\rho)} |u(x)-\overline{u}(z,3\rho)|^2 dx + \Big[\int\limits_{\Omega(z,3\rho)} |u(x)-\overline{u}(z,3\rho)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}} dx\Big]^{\frac{r_1-2}{r_1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{B(z,3\rho)} |u(x)-\overline{u}(z,3\rho)|^2 dx + \Big[\int\limits_{B(z,3\rho)} |u(x)-\overline{u}(z,3\rho)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}} dx\Big]^{\frac{r_1-2}{r_1}} \leqslant \tag{36}$$
$$\leqslant C_8 \rho^{n(1-\frac{2}{r_2})} \Big\{ \int\limits_{B(z,3\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2} dx \Big\}^{\frac{2}{r_2}} \leqslant C_9 \rho^{n(1-\frac{2}{r_2})} \Big\{ \int\limits_{\Omega(z,6\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{r_2} dx \Big\}^{\frac{2}{r_2}}.$$

Используя это неравенство, приходим к оценке вида (26) с заменой областей интегрирования $B\left(y, \frac{\rho}{2}\right), B(y, \rho)$ в левой и правой частях этого неравенства на $\Omega\left(y, \frac{\rho}{2}\right)$, $B(y, 7\rho)$ соответственно.

В случае третьего варианта при выполнении условия (33) подставляем в интегральное тождество (10) пробную функцию

$$\varphi(x) = u(x)\, \psi_{3\rho}^2(x, z), \tag{37}$$

где z – произвольная точка множества $B(y, \rho) \cap \Gamma'$. Как и прежде, получаем неравенство вида (23). Для получения оценки вида (24) продолжим $u(x)$ на $B(z, 3\rho) \setminus \Omega$ нулем, и полученное таким образом продолжение принадлежит пространству $W_2^1(B(z, 3\rho))$. Используя условие в) и лемму 3.4 главы 2 в [3], получим следующий аналог неравенства (24)

$$\begin{gathered} \frac{1}{\rho^2} \int\limits_{B(z,3\rho)} |u(x)|^2 dx + \left\{ \int\limits_{B(z,3\rho)} |u(x)|^{\frac{2r_1}{r_1-2}} dx \right\}^{\frac{r_1-2}{r_1}} \leqslant \\ \leqslant C_{10} \rho^{n(1-\frac{2}{r_2})} \left\{ \int\limits_{B(z,3\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{r_2} dx \right\}. \end{gathered} \tag{38}$$

Повторяя остальные рассуждения доказательства теоремы 1 и используя оценку (38), приходим снова к аналогу неравенства (26).

Наконец, при выполнении условия (34) снова делается подстановка

$$\varphi(x) = u(x)\, \psi_{3\rho}^2(x, z),$$

где z – произвольная точка множества $B(y, 4\rho) \cap \overline{\Gamma'} \cap \overline{\Gamma''}$. Отличием от предыдущего случая будет продолжение $u(x)$ на $B(z, 9\rho) \setminus \Omega$ не нулем, а с помощью функции, обеспечиваемой условием д). Снова, как и прежде, придем к аналогу неравенства (26).

Тем самым, неравенство вида (26) установлено при любых вариантах значений y, ρ, и это дает возможность применить лемму 1 к функциям $g(x), h(x)$, определенным равенствами (27) с соответствующим изменением области интегрирования в $F(x_0, R)$ на $\Omega(x_0, R)$ и продолженным нулем на $B(x_0, R) \setminus \Omega$. Окончание доказательства теоремы 2 проводится также, как в теореме 1.

5. Замечание 2. *Отметим, что не возникает никаких трудностей при перенесении результатов теорем 1 - 4 на случай линейных эллиптических уравнений высокого порядка с измеримыми коэффициентами.*

Список литературы

1. Giaquinta M., Modica G., *Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems*, Journ. für die reine und angewandte Math., 1979, v.311/312, p.p.145-169.
2. Gröger K., *A $W^{1,p}$ – estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations*, Math. Ann., 1989, v.283, p.p.679-687.

3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: Наука, 1964, 540 стр.
4. Meyers N., Elcrat A., *Some results on regularity for solutions of nonlinear elliptic systems and quasi-regular functions*, Duke Math. Journ., 1975, v.42, No.1, p.p.121-136.
5. Meyers N., *An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, v.17, 1963, 189-206.
6. Скрыпник И.В., *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М.: Наука, 1990, 448 с.

Донецкий Национальный Университет,
Математический факультет,
ул.Университетская 24,
83055, Донецк, Украина