Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с.165-180.

О КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ УСТРАНИМОСТИ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

© Скрыпник И.И.

Донецк, Украина

1. Введение. В данной работе установлено точное условие, обеспечивающее устранимость особенности на гладком многообразии Γ решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i} a_i\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = a_0\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) \quad x \in \Omega \setminus \Gamma. \tag{1.1}$$

Доказывается в критическом случае $N - p - s = 0$ устранимость особенности решения $u(x) \in W^1_{p,loc}(\Omega \setminus \Gamma)$ уравнения (1.1) на многообразии Γ размерности s при условии

$$u(x) = o\left(|\ln d(x,\Gamma)|\right) \tag{1.2}$$

где $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки x до многообразия Γ, N – размерность области Ω, $p \geqslant 2$.

В некритическом случае $N-p-s > 0$ точное условие устранимости особенности решения уравнения (1.1) имеет вид

$$u(x) = o\left([d(x,\Gamma)]^{\frac{p+s-N}{p-1}}\right). \tag{1.3}$$

Доказательство этого результата содержится в [1].

Результат данной статьи усиливает результат Дж. Серрина [2], получившего условие устранимости в критическом случае $N - p - s = 0$ в виде

$$u(x) = o\left(|\ln d(x,\Gamma)|^{1-\delta}\right), \quad \delta > 0. \tag{1.4}$$

В случае изолированных особенностей $(s = 0)$ аналогичное усиление результатов Дж. Серрина содержится в [3]. Доказательство в данной статье принципиально отличается от доказательства в работе [2], и основано на новых поточечных оценках сингулярных решений. Отметим, что аналоги этих поточечных оценок для емкостных потенциалов были получены в [4, 5]. Неулучшаемость результатов данной работы следует из просто конструируемых решений с особенностями для уравнения p-Лапласа. Полученный результат нов даже для линейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами.

Изучению проблемы сингулярностей решений нелинейных эллиптических уравнений посвящена обширная литература, однако, в большинстве работ изучаются уравнения специальной формы с операторами Лапласа или p-Лапласа в главной части. Обзор этих результатов имеется в монографии Л. Верона [6]. В частности, решения с точечной особенностью изучались в [7, 8].

2. Формулировка основных результатов. Далее s – натуральное число, не превышающее $N-2$, Ω – ограниченное открытое множество в R^N. Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,\xi)$, $j=0,1,...,N$ удовлетворяют следующим условиям:

$a_1)$ $a_j(x,u,\xi)$ определены для $x\in\Omega,\ u\in R^1,\ \xi\in R^N$ и являются измеримыми функциями x для всех $(u,\xi)\in R^1\times R^N$ и непрерывными функциями u,ξ для почти всех $x\in\Omega$;

$a_2)$ существуют положительные числа ν_1,ν_2 такие, что для всех значений x,u,ξ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\xi)\,\xi_j \geqslant \nu_1|\xi|^p - g_1(x)\,|u|^p - f_1(x),\\ |a_j(x,u,\xi)| \leqslant \nu_2|\xi|^{p-1} + g_2(x)|u|^{p-1} + f_2(x),\ j=1,...,n\\ |a_0(x,u,\xi)| \leqslant \nu_3(x)|\xi|^{p-1} + g_3(x)|u|^{p-1} + f_3(x)\end{gathered} \tag{2.1}$$

при $p=N-s$; здесь $\nu_3(x), g_i(x), f_i(x)$, $i=1,2,3$ – неотрицательные функции, такие, что

$$\begin{gathered}\nu_3^p(x)\in L^{p_1}(\Omega),\ f_i(x),\ g_i(x)\in L^{p_i}(\Omega),\ i=1,2,3,\\ p_1=p_3=\frac{(p-1)}{p}p_2=\frac{N}{p-\delta},\ \delta\in\Big(0,\frac{1}{2}\Big).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что Γ – многообразие класса C^1 без границы размерности s, содержащееся в Ω. Будем говорить, что $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega\backslash\Gamma$, если для произвольной функции $\psi(x)\in C^1(\Omega\backslash\Gamma)$, равной нулю вблизи $\partial\Omega\cup\Gamma$ имеет место включение $u(x)\psi(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ и выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi\,\psi]\,dx + \int_\Omega a_0\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\varphi\,\psi\,dx = 0 \tag{2.3}$$

для любой функции $\varphi(x)\in W^1_p(\Omega)$.

Обозначим $r_0=\min\{d(\Gamma,\partial\Omega),1\}$, где $d(\Gamma,\partial\Omega)$ – расстояние между Γ и $\partial\Omega$. Определим для $0<r\leqslant r_0$

$$M(r)=\max\{|u(x)|: r\leqslant d(x,\Gamma)\leqslant r_0\}. \tag{2.4}$$

Хорошо известно, что в рассматриваемых условиях $u(x)$ локально гельдерово в $\Omega\setminus\Gamma$, поэтому определение $M(r)$ корректно.

Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (1.1) имеет устранимую особенность на многообразии Γ, если можно продолжить $u(x)$ на Γ таким образом, чтобы полученное продолжение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ удовлетворяло уравнению (1.1) в Ω и $\tilde{u}(x) \in W^1_{p,loc}(\Omega) \cap C(\Omega)$.

Будем говорить, что функция $\omega(r)$ является наилучшей для устранимости особенности $u(x)$ на многообразии Γ, если из условия

$$\lim_{r\to 0} \sup M(r)\,\omega(r) = 0 \tag{2.5}$$

следует устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения (1.1), и если не существует иной функции $\overline{\omega}(r)$ такой, что условие

$$\lim_{r\to 0} \sup M(r)\,\overline{\omega}(r) = 0$$

обеспечивает устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения вида (1.1) и $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\overline{\omega}(r)}{\omega(r)} = 0$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть при $p = N - s$, $1 \leqslant s \leqslant N-2$ выполнены условия a_1), a_2) и пусть $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим, что*

$$\lim_{r\to 0} \sup M(r) |\ln r|^{-1} = 0. \tag{2.6}$$

Тогда особенность на многообразии Γ устранима и функция $|\ln r|^{-1}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ.

Замечание 2.1. *Условия на коэффициенты уравнения (1.1) можно писать с более сильным ростом относительно u, чем это предполагается в неравенстве (2.1). Достаточно для этого включить в $g_i(x)$ некоторые степени $u(x)$ аналогично тому, как это сделано в разделе 6 работы [2].*

Замечание 2.2. *Из доказательства теоремы 2.1 легко видеть, что можно заменить условие (2.6) следующими условиями*

$$\begin{gathered} \sup\left\{M(r)|\ln r|^{-1} : 0 < r \leqslant r_0\right\} < \infty, \\ \liminf_{r\to 0} M(r)|\ln r|^{-1} = 0, \end{gathered} \tag{2.7}$$

которые также обеспечивают устранимость особенности решения уравнения (1.1) на многообразии Γ.

Теорема 2.1 следует из теоремы Серрина и следующей поточечной оценки

$$M(\rho) \leqslant K\left[\ln\frac{1}{\rho}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\kappa \ln\ln\frac{1}{\rho} + M\left(r_0^{\frac{1}{\tau}}\right)\right\} \tag{2.8}$$

с некоторыми положительными постоянными K, κ, τ.

Доказательству оценки (2.8) посвящена основная часть статьи. Оценке (2.8) предшествуют интегральные оценки, полученные для градиента решения в разделе 3 и для решения уравнения (1.1) в разделе 4. Оценка (2.8) доказана в разделе 5, доказательство, на ее основе, теоремы 2.1 содержится в разделе 6.

3. Интегральные оценки градиента решения. Аналогично работе [1] будем получать локальные оценки решения. Переходом к локальным координатам можем распрямить многообразие Γ в окрестности рассматриваемой точки. Тем самым можем предполагать, что при некоторых $R_0, H_0 \in (0,1)$ выполнено включение

$$C(R_0, H_0) \cap \Gamma \subset \{x_1 = ... = x_{N-s} = 0\}, \tag{3.1}$$

где $C(R_0, H_0) = \{x \in R^n : |x'| < R_0, \ |x''| < H_0\}$ и $x' = (x_1, ..., x_{N-s})$, $x'' = (x_{N-s+1}, \ \ ..., x_N)$. Введем при $0 < r \leqslant R_0$ обозначения

$$m(r) = \max\{|u(x)| : x \in \overline{C(R_0, H_0)} \setminus C(r, H_0)\} \tag{3.2}$$

$$E(r) = \{x \in C(R_0, H_0) : u(x) > m(r)\} \tag{3.3}$$

и заметим, что (3.2) влечет включение $E(r) \subset C(r, H_0)$. Обозначим

$$u_r(x) = \max\{u(x) - m(r), 0\} \quad \text{для} \quad x \in C(R_0, H_0) \setminus \Gamma. \tag{3.4}$$

Определим при $0 < r \leqslant R_0, x \in R^N$ функцию $\psi_r(x)$ следующими равенствами

$$\begin{gathered} \psi_r(x) = 2 - 2\frac{\ln|x'|}{\ln r} \quad \text{при} \quad r \leqslant |x'| \leqslant \sqrt{r}, \\ \psi_r(x) = 0 \ \text{ при } \ |x'| \leqslant r, \ \ \psi_r(x) = 1 \ \text{ при } \ |x'| \geqslant \sqrt{r}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Зафиксируем некоторую функцию $\tau : R^1 \to R^1$ класса $C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям $\tau(t) = 1$ при $t \leqslant 1, \tau(\tau) = 0$ при $t \geqslant 2$,

$$-2 \leqslant \frac{d\tau(t)}{dt} \leqslant 0 \ \text{ при } \ t \in R^1.$$

Определим при $h > 0$ следующую функцию

$$\chi_h(x) = \tau\Big(\frac{|x'' - \xi''|}{h}\Big), \tag{3.6}$$

где $\xi'' = (\xi_{N-s+1}, ..., \xi_N)$ – некоторая фиксированная точка, такая, что $|\xi''| \leqslant \frac{H}{2}$. Определим также при $0 < t \leqslant R_0$ функцию $\kappa(t)$ равенством

$$\kappa(t) = \max[m(r) \cdot |\ln r|^{-1} : t \leqslant r \leqslant R_0] \tag{3.7}$$

Ограниченность функции $\kappa(t)$ следует из условия (2.6), которое в дальнейшем предполагается выполненным.

Будем понимать под известными параметрами постоянные $\nu_1, \nu_2, N, p, \ \delta, R_0, H_0$, норм функций $\nu_3(x), f_i(x), g_i(x), i = 1, 2, 3$ в соответствующих пространствах. На протяжении всей работы через $C_j, \ j = 1, 2, ...$ обозначаются постоянные, зависящие лишь от известных параметров.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные* K_1, R_1 *, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при*

$$0<\sqrt{r}<\rho\leqslant R_1,\quad 0<h\leqslant\frac{H_0}{2},\quad \rho\leqslant h, \tag{3.8}$$

выполнена оценка

$$\begin{gathered}\int\limits_{E(\rho)}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p\psi_r^p(x)\chi_h^p(x)\,dx\leqslant K_1\Big\{m^p(r)\big[\ln\frac{1}{r}\big]^{1-p}h^s+\\+m^p(\rho)\big[\rho^{N-s}h^s\big]^{\frac{N-p+\delta}{N}}+\Big[\frac{\rho}{h}\Big]^p\int\limits_{E(\rho)}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p\psi_r^p(x)\chi_{2h}^p(x)\,dx\Big\}\end{gathered}\tag{3.9}$$

с функциями $\psi_r(x)$, $\chi_h(x)$ *, определенными равенствами (3.5), (3.6).*

Доказательство. В силу теоремы Серрина [2] об устранимости особенности при выполнении условия (1.4) нужно доказывать теорему 2.1 только в случае $m(r)\to\infty$ при $r\to 0$. Поэтому можем подчинить R_1 условиям:

$$R_1\leqslant R_0,\qquad m(R_1)\geqslant 1 \tag{3.10}$$

Подставим в интегральное тождество (2.3) следующие функции

$$\varphi(x)=u_\rho(x)\,\psi_r^p(x)\,\chi_h^p(x),\quad \psi(x)=\psi_{r^2}(x)\,\chi_{2h}(x),$$

предполагая, что $0<\sqrt{r}<\rho\leqslant\frac{R_0}{2}$, $0<h\leqslant\frac{H_0}{2}$. Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получим оценку

$$\int\limits_{E(\rho)}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p\psi_r^p(x)\,\chi_h^p(x)\,dx\leqslant C_1\sum_{i=1}^{5}I_i, \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}I_1=\int\limits_{E(\rho)}h_1(x)u_\rho^p(x)\,\psi_r^p(x)\chi_h^p(x)\,dx,\\ I_2=\int\limits_{E(\rho)}u_\rho^p(x)\Big|\frac{\partial\psi_r}{\partial x}\Big|^p\chi_h^p(x)\,dx,\quad I_3=\int\limits_{E(\rho)}u_\rho^p(x)\,\psi_r^p(x)\Big|\frac{\partial\chi_h}{\partial x}\Big|^p dx,\\ I_4=\int\limits_{E(\rho)\cap K(r)}u^p(x)\big[f_2(x)+g_2(x)\big]^{\frac{p}{p-1}}\chi_h^p(x)\,dx,\\ I_5=m^p(\rho)\int\limits_{E(\rho)}h_2(x)\,\psi_r^p(x)\,\chi_h^p(x)\,dx,\end{gathered}\tag{3.12}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{gathered}h_1(x)=f_1(x)+g_1(x)+[f_2(x)+g_2(x)]^{\frac{p}{p-1}}+f_3(x)+g_3(x)+\nu_3^p(x),\\ h_2(x)=f_1(x)+g_1(x)+[f_2(x)+g_2(x)]^{\frac{p}{p-1}}+f_3(x)+g_3(x),\\ K(r)=\{x\in R^N: r\leqslant|x'|\leqslant\sqrt{r}\}.\end{gathered}\tag{3.13}$$

Далее будем оценивать слагаемые правой части (3.11). Используя условия (2.2) и неравенство Гельдера, получаем

$$I_1 \leqslant \big[\operatorname{mes} E(\rho)\big]^{\frac{\delta}{N}} \left\{ \int\limits_{E(\rho)} \big[h_1(x)\big]^{\frac{N}{p-\delta}} dx \right\}^{\frac{p-\delta}{N}} \cdot \left\{ \int\limits_{E(\rho)} \big[u_\rho(x)\psi_r(x)\chi_h(x)\big]^{\frac{Np}{N-p}} dx \right\}^{\frac{N-p}{Np}} \tag{3.14}$$

Применяя далее теорему вложения, имеем оценку

$$I_1 \leqslant C_2\big[\operatorname{mes} E(\rho)\big]^{\frac{\delta}{N}} \cdot \left\{ \int\limits_{E(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^p(x)\chi_h^p dx + m^p(r)\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} h^s + I_3 \right\} \tag{3.15}$$

Непосредственно из определения $m(r)$ и выбора функции $\psi_r(x)$ следует оценка

$$I_2 \leqslant C_3\, m^p(r) \left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p} h^s. \tag{3.16}$$

Интеграл I_3 оценим, используя неравенство Пуанкаре по переменной x' и получим

$$\begin{gathered} I_3 \leqslant \left(\frac{2}{h}\right)^p \int\limits_{E(\rho)} u_\rho^p(x)\psi_r^p(x)\chi_{2h}^p(x)dx \leqslant \\ \leqslant C_4\left\{ \left(\frac{\rho}{h}\right)^p \int\limits_{E(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^p(x)\chi_{2h}^p(x)dx + m^p(r)\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} h^s \right\}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Интеграл I_4 оценим, мажорируя $u_\rho(x)$ через $m(r)$ и применяя неравенство Гельдера. В результате имеем следующее неравенство

$$I_4 \leqslant C_5 m^p(r)\big[r^{\frac{N-s}{2}} h^s\big]^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \tag{3.18}$$

Наконец, в силу (2.2) и неравенства Гельдера, имеем

$$I_5 \leqslant C_6 m^p(\rho)\,[\rho^{N-s} h^s]^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \tag{3.19}$$

Подчиним, в дополнение к (3.10), R_1 условию

$$C_2\left[\operatorname{mes} C\big(R_1, H_0\big)\right]^{\frac{\delta}{N}} < \frac{1}{2} \tag{3.20}$$

Пользуясь тем, что при $\rho \leqslant R_1$ имеет место включение $E(\rho) \subset C\big(R_1, H_0\big)$, получаем из (3.11)-(3.19) оценку (3.9), что и заканчивает доказательство леммы 3.1.

Нам понадобится глобальный аналог оценок (3.9). Можно построить функцию $\tilde{d} : \overline{\Omega} \to R^1$ класса C^1 такую, что для $x \in \overline{\Omega}$ выполнено неравенство

$$k_1 d(x, \Gamma) \leqslant \tilde{d}(x) \leqslant k_2 d(x, \Gamma) \tag{3.21}$$

с неотрицательными постоянными k_1, k_2, которые тоже будем включать в множество известных параметров. При этом можем подчинить функцию $\tilde{d}$ условию $\tilde{d}(x) = |x'|$ при $x \in C(R_0, H_0)$.

Определим

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(r) = \{x \in \overline{\Omega} : \tilde{d}(x) < r\}, \tilde{m}(r) = \max\{|u(x)| : x \in \overline{\Omega} \setminus \tilde{C}(r)\}, \\ &\tilde{u}_r(x) = \max\{u(x) - \tilde{m}(r), 0\}, \tilde{E}(r) = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) > \tilde{m}(r)\}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

и функцию $\tilde{\psi}_r(x)$, определяемую равенствами, получаемыми из (3.5) заменой $|x'|$ на $\tilde{d}(x)$.

Подставляя в (2.3) функции

$$\varphi(x) = \tilde{u}_\rho(x)\, \tilde{\psi}_r^{p-1}(x), \quad \psi(x) = \tilde{\psi}_r(x)$$

и оценивая возникающие интегралы подобно оценкам в доказательстве леммы 3.1, получаем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_2, R_2, зависящие лишь от известных параметров такие, что при $0 < \sqrt{r} < \rho \leqslant R_2$, выполнена оценка*

$$\int\limits_{\tilde{E}(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \tilde{\psi}_r^p(x) dx \leqslant K_2 \Big\{ \tilde{m}^p(r) \Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} + \tilde{m}^p(\rho) \rho^{\frac{(N-s)(N-p+\delta)}{N}} \Big\} \tag{3.23}$$

Заметим, что с некоторыми положительными постоянными k_3, k_4 выполнено неравенство

$$\tilde{m}(k_3 r) \leqslant m(r) \leqslant \tilde{m}(k_4 r) \tag{3.24}$$

при $0 < r \leqslant R_0$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_3, R_3, γ_1, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при*

$$0 < \sqrt{r} < \rho \leqslant R_3, \quad 0 < h \leqslant \frac{H_0}{2}, \quad \rho \leqslant \gamma_1 h \tag{3.25}$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int\limits_{E(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^p(x)\, \chi_h^p(x)\, dx \leqslant K_3 \Big\{ m^p(r) \Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} h^s + \\ + m^p(\rho) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{(N-p+\delta)}{N}} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Доказательство. Оценка (3.26) доказывается индукцией по j для $h = h_j = \frac{H_0}{2^j}$. При $j = 1$ эта оценка следует из неравенства (3.23). Проверка индуктивного предположения осуществляется с использованием оценки (3.9). Подробный вывод оценки вида (3.26) содержится в [1] для некритического случая $N - p - s > 0$.

Определим при $0 < \rho' < \rho \leqslant \frac{R_0}{2}$ множество

$$E(\rho', 2\rho) = \{x \in E(2\rho) : u(x) < m(\rho')\}. \tag{3.27}$$

и при $\rho > 0$ функцию

$$u^{(\rho)}(x) = \min\{u(x), m(\rho)\}, \quad x \in C(R_0, H_0). \tag{3.28}$$

Лемма 3.4. *Предположим, что выполнено условие теоремы 2.1 и пусть* $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *– некоторое число, зависящее лишь от известных параметров. Тогда существуют положительные постоянные* K_4, R_4 *, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при* $\rho \leqslant R_4$

$$0 < \sqrt{r} < \frac{\theta\rho}{2} < \rho' \leqslant \theta\rho, \quad \rho \leqslant \gamma_1 h \tag{3.29}$$

выполнена оценка

$$\int\limits_{E(\rho',\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^p(x)\, \chi_h^p(x)\, dx \leqslant K_4\big\{J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + R^{(1)}(r,\rho',h)\big\}, \tag{3.30}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} &J^{(1)} = [m(\rho') - m(\rho)]^{\frac{p}{p-1}} \cdot \\ &\cdot \int\limits_{E(\rho')} [u(x) - m(\rho)]^{-\frac{p}{p-1}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \psi_r^p(x)\, \chi_h^p(x)\, dx, \\ &J^{(2)} = \frac{1}{h^p} \int\limits_{E(\rho)} [u(x) - m(\rho)]^p \psi_r^p(x)\, \chi_{2h}^p(x)\, dx, \\ &J^{(3)} = \int\limits_{E(\rho')} [u(x)]^p h_1(x) \psi_r^p(x)\, \chi_h^p(x)\, dx, \\ &R^{(1)}(r,\rho,h) = m(\rho) m^{p-1}(r) \Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} h^s + \\ &\quad + m^p(\rho) \Big\{ \big[\rho^{N-s} h^s\big]^{\frac{N-p+\delta}{N}} + \Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}} h^s \Big\}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

и функция $h_1(x)$ *определяется равенством в (3.13).*

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (2.3) следующие функции $\psi(x) = \psi_{r^2}(x)\chi_{2h}(x)$,

$$\varphi(x) = \max\{[u^{\rho'}(x)] - m(\rho), 0\} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x)$$

в предположении, что выполнено условие (3.29) и $\rho \leqslant \min(R_1, R_2)$.

Дальнейшие выкладки аналогичны доказательству леммы 3.4 в [1] с изменениями, возникающими при оценке интегралов, содержащих $\left|\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|$. Поэтому их опускаем.

Будем предполагать далее, что выполнено условие

$$m(\rho') - m(\rho) > 0 \tag{3.32}$$

для рассматриваемых значений ρ', ρ .

Лемма 3.5. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4 и неравенство (3.32). Тогда существует положительная постоянная* K_5, *зависящая лишь от известных параметров, такая, что справедлива оценка*

$$J^{(1)} \leqslant K_5\Big\{m(\rho')\Big[m^{p-1}(r)\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p}h^s + m^{p-1}(\rho')\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}h^s\Big] + \\ + J^{(2)} + J^{(3)}\Big\}, \tag{3.33}$$

где $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}$ *определены равенствами (3.31).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.5 в [1].

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и предположим, что* r, ρ, ρ', h *удовлетворяют условиям леммы 3.4. Тогда существует положительная постоянная* K_6, *зависящая только от известных параметров, такая, что выполнена оценка*

$$\int\limits_{E(\rho',\rho)} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p \psi_r^p(x)\chi_h^p(x)\,dx \leqslant K_6\Big\{R^{(1)}(r,\rho',h) + \\ + \int\limits_{E(\rho)} [u(x)-m(\rho)]^p\psi_r^p(x)\Big[h_1(x)\chi_h^p(x) + \frac{1}{h^p}\chi_{2h}^p(x)\Big]\,dx\Big\}, \tag{3.34}$$

где $h_1(x), R^{(1)}(r,\rho,h)$ *определены равенствами (3.13), (3.31).*

Доказательство. Будем считать, что выполнено условие (3.32), так как в противном случае неравенство (3.34) очевидно. Оценка слагаемого $J^{(1)}$ в правой части неравенства (3.30) дана в лемме 3.5. Оценку $J^{(3)}$ получаем, используя неравенство

$$u^p(x) \leqslant C_7\{[u(x)-m(\rho)]^p + [m(\rho)]^p\} \quad \text{для} \quad x \in E(\rho)$$

и неравенство Юнга. Используя получаемую таким образом оценку $J^{(3)}$, устанавливаем неравенство (3.34) из (3.30), (3.33) и, тем самым, теорема 3.1 доказана.

4. Интегральная оценка решения. Введем обозначения

$$I(\rho,h) = \Big\{\int\limits_{E(\rho)} \big[(u(x)-m(\rho))\,\psi_r(x)\chi_h(x)\big]^{\frac{Np}{N-p+\delta}}dx\Big\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \cdot [\rho^{N-s}h^s]^{\frac{p-\delta}{N}} \tag{4.1}$$

$$\alpha_1 = \frac{(N-s)(p-\frac{\delta}{2})}{N}, \quad \beta_1 = s + \frac{sp}{N}, \\ \alpha_2 = p + \frac{\delta(N-s)}{2N}, \quad \beta_2 = s + \delta\frac{s}{N}, \\ \alpha_3 = \Big(p-\frac{\delta}{2}\Big)\frac{N-s}{N}, \quad \beta_3 = s + \frac{sp}{N}. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4. Существуют постоянные K_7, R_5, зависящие лишь от известных параметров, такие, что $R_5 \leqslant R_4$ и при $\rho \leqslant R_5$ справедлива оценка*

$$I(\rho,h) \leqslant 2^{p-1}\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}} I(\theta\rho,h) + K_7\Big(\frac{\rho}{h}\Big)^{(N-s)\frac{p}{N}} I(\rho,2h) + R^{(2)}(r,\rho,h), \tag{4.3}$$

где

$$R^{(2)}(r,\rho,h) = K_7\Big\{\rho^{\alpha_1}h^{\beta_1}\kappa(r)m^{p-1}(r)\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} +$$
$$+\Big[\rho^{\alpha_2}h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3}h^{\beta_3}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}\Big]\cdot[\kappa(r)]^p\Big\}$$

и функция $\kappa(r)$ определена равенством (3.7).

Доказательство. Обозначим через $\chi(E(\theta\rho,\rho))$, $\chi(E(\theta\rho))$ характеристические функции множеств $E(\theta\rho,\rho)$, $E(\theta\rho)$ соответственно. Займемся оценкой $I(\rho,h)$ и будем использвать для этого следующее неравенство

$$\begin{aligned}
&\{u(x)-m(\rho)\}^p \leqslant \{u(x)-m(\rho)\}^p\chi(E(\theta\rho,\rho)) + \\
&+2^{p-1}\big\{[u(x)-m(\theta\rho)]^p + [m(\theta\rho)-m(\rho)]^p\big\}\,\chi(E(\theta\rho)) \leqslant \\
&\leqslant 2^{p-1}[u(x)-m(\theta\rho)]^p\chi(E(\theta\rho)) + \\
&+2^{p-1}\big\{u^{(\theta\rho)}(x)-m(\rho)\big\}^p \quad \text{для} \quad x\in E(\rho).
\end{aligned}$$

Получаем, таким образом, следующую оценку

$$I(\rho,h) \leqslant 2^{p-1}\theta^{-\frac{N-s}{N}(p-\delta)} I(\theta\rho,h) + 2^{p-1}[\rho^{N-s}h^s]^{\frac{p}{N}} I_6, \tag{4.4}$$

где

$$I_6 = \Big\{\int\limits_{E(\rho)} \Big\{\big[u^{(\theta\rho)}(x)-m(\rho)\big]\,\psi_r(x)\chi_h(x)\Big\}^{\frac{Np}{N-p}}dx\Big\}^{\frac{N-p}{N}}.$$

Оценивая последний интеграл по теореме вложения, имеем

$$I_6 \leqslant C_8(I_7+I_8+I_9), \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int\limits_{E(\theta\rho,\rho)} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p \psi_r^p(x)\chi_h^p(x)dx, \\
I_8 &= m^p(\theta\rho)\int\limits_{E(\rho)\cap K(r)} \Big|\frac{\partial\psi_r}{\partial x}\Big|^p\chi_h^p(x)dx, \\
I_9 &= \int\limits_{E(\rho)} \big[u^{(\theta\rho)}(x)-m(\rho)\big]^p\psi_r^p(x)\Big|\frac{\partial\chi_h}{\partial x}\Big|^p dx.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Продолжим оценку полученных в (4.6) интегралов. Интеграл I_7 оценим по теореме 3.1 с последующим применением неравенства Гельдера и получаем

$$I_7 \leqslant C_9\big\{R^{(1)}(r,\theta\rho,h) + I(\rho,h)\,[\rho^{N-s}h^s]^{\frac{\delta-p}{N}} + \frac{1}{h^p}I(\rho,2h)\big\}. \tag{4.7}$$

Оценка I_8 следует из определения функции $\psi_r(x)$

$$I_8 \leqslant C_{10}m^p(\theta\rho)\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p}h^s. \tag{4.8}$$

Интеграл I_9 оцениваем по неравенству Гельдера и получаем

$$I_9 \leqslant \frac{C_{11}}{h^p}\int\limits_{E(\rho)}[u(x)-m(\rho)]^p\psi_r^p(x)\chi_{2h}^p(x)dx \leqslant \frac{C_{12}}{h^p}I(\rho,2h). \tag{4.9}$$

Наконец, используя (3.7), можем оценить

$$m(t) \leqslant \kappa(r)\ln\frac{1}{t} \tag{4.10}$$

при $r \leqslant t \leqslant R_0$ и получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} R^{(1)}(r,\theta\rho,h)[\rho^{N-s}h^s]^{\frac{p}{N}} \leqslant C_{13}\Big\{\rho^{\alpha_1}h^{\beta_1}\kappa(r)\,[m(r)]^{p-1}\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p} + \\ + \left[\rho^{\alpha_2}h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3}h^{\beta_3}\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{\frac{1-p}{p}}\right][\kappa(r)]^p\Big\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где α_i, β_i определены равенствами (4.2).

Теперь оценка (4.3) следует из неравенств (4.4)-(4.11) при достаточно малом ρ, что и заканчивает доказательство леммы 4.1.

Определим далее числа θ, γ равенствами

$$\ln\frac{1}{\theta} = \frac{4pN}{\delta(N-s)}\ln 2, \quad \gamma = \min(\gamma_1,\gamma_2), \tag{4.12}$$

где γ_2 определяется условием $K_7\gamma_2^{(N-s)\frac{p}{N}} = 2^{-2(N+1)}$ и K_7 – постоянная из неравенства (4.3).

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4 и пусть θ, γ определяются условиями (4.12). Существует постоянная K_8, зависящая лишь от известных параметров, такая, что при $\rho \leqslant R_5$, $\rho \leqslant \gamma h$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} I(\rho,h) \leqslant K_8\Big\{\rho^{N-s}h^s[m(r)]^p\left(\frac{\sqrt{r}}{\rho}\right)^{\frac{sp}{N}} + \\ + h^N\rho^p[\kappa(r)]^p + R^{(2)}(r,\rho,h)\Big\}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где $I(\rho,h)$, $R^{(2)}(r,\rho,h)$ *и число* R_5 *определены равенствами в (4.1), (4.3) и леммой 4.1.*

Доказательство. Зафиксируем числа r,ρ,h, удовлетворяющие условиям теоремы, и определим

$$A = 2^{p-1}\cdot\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}},\quad B = K_7\gamma^{(N-s)\frac{p}{N}} \tag{4.14}$$

и целые числа M_1, M_2 условиями

$$\sqrt{r} < \rho\theta^{M_1} \leqslant \frac{\sqrt{r}}{\theta},\quad \frac{H_0}{2} \leqslant 2^{M_2}h < H_0. \tag{4.15}$$

С учетом этих обозначений неравенство (4.3) перепишется в виде

$$I(\rho,h) \leqslant A\,I(\theta\rho,h) + B\,I(\rho,2h) + R^{(2)}(r,\rho,h). \tag{4.16}$$

Итерируя последнее неравенство и применяя индукцию по числу итераций, получим оценку

$$\begin{aligned} I(\rho,h) \leqslant \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m}A^{M_1}B^m I\Big(\frac{\sqrt{r}}{\theta},2^m h\Big)+&\\ +\sum_{n=0}^{M_1-1} 2^{M_2+n}A^n B^{M_2} I(\theta^n\rho,H_0)+&\\ +\sum_{n=0}^{M_1-1}\sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{n+m}A^nB^mR^{(2)}(r,\theta^n\rho,2^m h).& \end{aligned} \tag{4.17}$$

Оценим далее значения $I\Big(\frac{\sqrt{r}}{\theta},2^m h\Big)$, $I(\theta^n\rho,H_0)$ и первые две суммы в (4.17). Используя определение функции $\psi_r(x)$ и равенство (3.3), имеем оценку

$$I\Big(\frac{\sqrt{r}}{\theta},2^m h\Big) \leqslant C_{14}2^{ms}[m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}}h^s. \tag{4.18}$$

Из этой оценки, определения A,B и условий (4.12) получаем следующую оценку для первого слагаемого правой части (4.17)

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m}A^{M_1}B^m I\Big(\frac{\sqrt{r}}{\theta},2^m h\Big) \leqslant\\ &\leqslant C_{15}[m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}}h^s[\theta^{-M_1}]^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}-p\frac{\ln 2}{\ln\theta}}\sum_{m=0}^{M_2-1}[2^{s+1}B]^m \leqslant\\ &\leqslant C_{16}[m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}}h^s\Big(\frac{\rho}{\sqrt{r}}\Big)^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}-p\frac{\ln 2}{\ln\theta}}\sum_{m=0}^{M_2-1}[2^{s+1}K_6\gamma^{\frac{(N-s)p}{N}}]^m \leqslant\\ &\leqslant C_{17}\rho^{N-s}h^s[m(r)]^p\Big(\frac{\sqrt{r}}{\rho}\Big)^{\frac{sp}{N}}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Используя оценку (4.10), имеем следующее неравенство

$$I(\theta^n\rho, H_0) \leqslant C_{18}[\kappa(r)]^p[\theta^n\rho]^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}}\cdot \cdot\left\{\int\limits_r^{\theta^n\rho}\left[\ln\frac{1}{t}\right]^{\frac{pN}{N-p+\delta}}t^{N-s-1}\,dt\right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \leqslant C_{19}[\theta^n\rho]^p\left[\ln\frac{1}{\theta^n\rho}\right]^p[\kappa(r)]^p. \tag{4.20}$$

Применяя оценку, по лученную в (4.20), и учитывая значения θ,γ, получаем следующую оценку второй суммы в (4.17)

$$\sum_{n=0}^{M_1-1}2^{M_2+n}A^nB^{M_2}I(\theta^n\rho, H_0) \leqslant C_{20}\left[2K_7\gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}\right]^{M_2}\rho^p[\kappa(r)]^p\cdot \cdot\sum_{n=0}^{M_1-1}\left[2^p\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}+p}\right]^n\left[\ln\frac{1}{\theta^n\rho}\right]^p \leqslant C_{21}\rho^ph^N[\kappa(r)]^p\left[\ln\frac{1}{\rho}\right]^p. \tag{4.21}$$

Далее оцениваем третью сумму в (4.17)

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{M_1-1}\sum_{m=0}^{M_2-1}2^{n+m}A^nB^mR^{(2)}(r,\theta^n\rho,2^mh) \leqslant\\ \leqslant C_{22}\kappa(r)m^{p-1}(r)\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p}\rho^{\alpha_1}h^{\beta_1}\cdot\\ \cdot\sum_{n=0}^{M_1-1}\left[2^p\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}+\alpha_1}\right]^n\cdot\sum_{m=0}^{M_2-1}\left[2^{\beta_1+1}K_7\gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}\right]^m+\\ +C_{22}[\kappa(r)]^p\rho^{\alpha_2}h^{\beta_2}\sum_{n=0}^{M_1-1}\left[2^p\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}+\alpha_2}\right]^n\cdot\\ \cdot\sum_{m=0}^{M_2-1}\left[2^{\beta_2+1}K_7\gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}\right]^m+C_{22}[\kappa(r)]^p\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{\frac{1-p}{p}}\rho^{\alpha_3}h^{\beta_3}\cdot\\ \cdot\sum_{n=0}^{M_1-1}\left[2^p\theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}+\alpha_3}\right]^n\sum_{m=0}^{M_2-1}\left[2^{\beta_3+1}K_7\gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}\right]^m \leqslant\\ \leqslant C_{23}R^{(2)}(r,\rho,h).\end{gathered} \tag{4.22}$$

Теперь оценка (4.13) непосредственно следует из неравенств (4.17), (4.19), (4.21), (4.22) и доказательство теоремы 4.1 закончено.

5. Поточечная оценка решения. В этом разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существует положительная постоянная K_9, зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных ρ, удовлетворяющих условию $2\rho \leqslant \min\left\{d(\Gamma,\partial\Omega),\ \frac{1}{e}\right\}$, выполнена оценка*

$$M(\rho) \leqslant K_9 \Big[\ln\frac{1}{\rho}\Big]^{\frac{1}{2}} \Big\{\kappa \ln\ln\frac{1}{\rho} + M\big(r_0^{\frac{1}{\tau}}\big)\Big\}, \tag{5.1}$$

где $\kappa = \sup\left\{M(t)\big|\ln\frac{1}{t}\big|^{-1} : 0 < t \leqslant r_0\right\}$.

Доказательство. В силу эквивалентности поведения при малых ρ функций $M(\rho)$ и $m(\rho)$, последняя из которых определена равенством (3.1), доказательство оценки (5.1) сводится к доказательству оценки в локальной системе координат.

Используя метод Мозера, получим аналогично доказательству теоремы 5.1 в [1] оценку

$$[m(\rho)]^p \leqslant C_{24}\rho^{-N} \int\limits_{E(2\rho)} [u(x)]^p \eta^p(x)dx. \tag{5.2}$$

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что выполнено неравенство

$$m(2\rho) - m\big((2\rho)^\tau\big) \geqslant \mu m(2\rho) \tag{5.3}$$

с постоянной μ, определенной следующим образом

$$\mu = 1 - \sqrt{\tau}. \tag{5.4}$$

В этом случае имеем оценку

$$u(x) \geqslant \frac{1}{1-\mu} m\left((2\rho)^\tau\right) \ \text{ при } \ x \in E(2\rho)$$

и поэтому получаем неравенство

$$\int\limits_{E(2\rho)} [u(x)]^p \eta^p(x)dx \leqslant C_{25} \int\limits_{E((2\rho)^\tau)} \left[u(x) - m\left((2\rho)^\tau\right)\right]^p \psi_r^p(x)\chi_h^p(x)dx \tag{5.5}$$

с функциями $\psi_r(x), \chi_h(x)$, определенными равенствами (3.5), (3.6) при $\sqrt{r} < \min\left\{\theta(2\rho)^\tau, \frac{\rho}{2}\right\}$, $h = \frac{(2\rho)^\tau}{\gamma}$.

Применяя неравенства Гельдера и (4.13), получаем из (5.2), (5.5) следующую оценку

$$\begin{gathered}[m(\rho)]^p \leqslant C_{26}\bigg\{[m(r)]^p\Big(\frac{\sqrt{r}}{\rho^\tau}\Big)^{\frac{sp}{N}} + \kappa(r)\,[m(r)]^{p-1}\rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{1-p} + \\ + \kappa^p(r)\Big(\rho^{\frac{\tau\delta}{2}(1+\frac{s}{N})} + \rho^{-\frac{\tau\delta}{2}\frac{N-s}{N}}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}\Big)\bigg\}\rho^{(\tau-1)N},\end{gathered} \tag{5.6}$$

которая доказана в предположении, что выполнено неравенство (5.3).

Если же (5.3) не выполняется, то

$$m(2\rho) \leqslant \frac{1}{1-\mu} m\left((2\rho)^\tau\right), \tag{5.7}$$

и из (5.6), (5.7) получаем следующую оценку, которая справедлива независимо от того выполнено или нет неравенство (5.3)

$$m(2\rho) \leqslant C_{27}\Big\{m(r)\Big(\frac{\sqrt{r}}{\rho^{\tau}}\Big)^{\frac{s}{N}} + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}}\Big[m(r)\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)^{-1}\Big]^{\frac{p-1}{p}}\rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2Np}} + \\ + \kappa(r)\Big(\rho^{\frac{\tau\delta(N+s)}{2N}} + \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\}\rho^{\frac{(\tau-1)N}{p}} + \frac{1}{1-\mu}\cdot m((2\rho)^{\tau}). \tag{5.8}$$

Определим целое число $I(\rho)$ условием $(2\rho)^{\tau^{I(\rho)}} = R_*$, где $R_0^{\frac{1}{\tau}} \leqslant R_* < R_0$. Итерируя неравенство (5.8), получаем оценку

$$m(2\rho) \leqslant C_{28}\sum_{i=1}^{I(\rho)}\Big\{m(r)\Big[\frac{\sqrt{r}}{(2\rho)^{\tau^i}}\Big]^{\frac{s}{N}} + \\ + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}}\Big[m(r)\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)^{-1}\Big]^{\frac{p-1}{p}}(2\rho)^{-\frac{\tau^i\delta(N-s)}{2Np}} + \\ + \kappa(r)\Big[(2\rho)^{\frac{\tau^i\delta(N+s)}{2N}} + (2\rho)^{-\frac{\tau^i\delta(N-s)}{2N}}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}\Big]^{\frac{1}{p}}\Big\}\cdot \\ \cdot(2\rho)^{\frac{\tau^{i-1}N(\tau-1)}{p}}\frac{1}{(1-\mu)^{i-1}} + \frac{C_{28}}{(1-\mu)^{I(\rho)}}m((2\rho)^{\tau^{I(\rho)}}). \tag{5.9}$$

В силу выбора $\tau, \mu, I(\rho)$ имеем

$$\frac{\tau^i\delta(N+s)}{2N} + \frac{\tau^{i-1}N(\tau-1)}{p} = \frac{\tau^{i-1}\delta(N+s)}{4N}, \\ \Big(\frac{1}{1-\mu}\Big)^{I(\rho)} = \tau^{-\frac{I(\rho)}{2}} = \left[\frac{\ln\frac{1}{2\rho}}{\ln\frac{1}{R_*}}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ I(\rho) = \frac{1}{\ln\frac{1}{\tau}}\Big\{\ln\ln\frac{1}{2\rho} - \ln\ln\frac{1}{R_*}\Big\}. \tag{5.10}$$

Используя равенство (5.10), получаем из (5.9) следующую оценку

$$m(2\rho) \leqslant C_{29}\Big[\ln\frac{1}{2\rho}\Big]^{\frac{1}{2}}\ln\ln\frac{1}{2\rho}\Big\{\Big[m(r)\Big(\frac{\sqrt{r}}{\rho^{\tau}}\Big)^{\frac{s}{N}} + \\ + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}}\Big[m(r)\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)^{-1}\Big]^{\frac{p-1}{p}}\rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}}\Big]\rho^{\frac{N(\tau-1)}{p}} + \\ + \kappa(r)\Big[1 + \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}+\frac{N(\tau-1)}{p}}\Big[\ln\frac{1}{r}\Big]^{\frac{1-p}{p}}\Big]^{\frac{1}{p}}\Big\} + C_{29}m(R_0^{\frac{1}{\tau}})\Big[\ln\frac{1}{2\rho}\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.11}$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $r \to 0$, заканчиваем доказательство теоремы 5.1 в силу произвольности ρ.

Замечание 5.1. *Оценка (5.1) характеризует поточечное поведение решения в терминах $d(x,\Gamma)$, так как из (2.4) непосредственно следует неравенство*

$$|u(x)| \leqslant M(d(x,\Gamma)) \quad \textit{при} \quad 0 < d(x,\Gamma) \leqslant r_0. \tag{5.12}$$

6. Доказательство теоремы 2.1.

Доказанная в теореме 5.1 поточечная оценка позволяет немедленно установить утверждение теоремы 2.1. Оценка (5.1) доказывает, что для решения $u(x)$ выполнено условие (1.4) теоремы Серрина [1], что обеспечивает устранимость особенности на многообразии Γ. Неулучшаемость функции $\left[\ln \frac{1}{r}\right]^{-1}$ в условии (2.6) следует из возможности построения решения уравнения p-Лапласа, имеющего неустранимую особенность на Γ порядка $\left[\ln \frac{1}{d(x,\Gamma)}\right]^{-1}$. Тем самым доказательство теоремы 2.1 закончено.

Список литературы

1. Скрыпник И.И., *Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях*, Мат. Сборник, no. (в печати).
2. Serrin J., *Local behaviour of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. **111** (1964), 247-302.
3. Nicolosi F., Skrypnik I.V., Skrypnik I.I., *Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities*, Communications in PDE, no. (in print).
4. Скрыпник И.В., *О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов*, Общая теория граничных задач. Киев: Наукова думка (1983), 198-206.
5. Скрыпник И.В., *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М: Наука (1991).
6. Veron L., *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman research notes in math series **353** (1995).
7. Gilbarg D., Serrin J., *On isolated singularities of second order elliptic differential equations*, J. Anal. Mat. **4** (1955-1956), 309-340.
8. Serrin J., *Isolated singularities of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. **113** (1965), 219-240.

ИПММ, ул.Р.Люксембург 74,
83114, Донецк, Украина