Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.149-164.

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Скрыпник И.В., Журавская А.В.

Донецк, Киев, Украина

1. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, и предположим, что при $s = 1, 2, \ldots$ определены непересекающиеся замкнутые множества $F_i^{(s)}, i = 1, \ldots, I(s)$, содержащиеся в Ω. В цилиндрической области

$$Q_T^{(s)} = \Omega_s \times (0,T), \ \ \Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$$

рассматривается линейная параболическая задача

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{jk}(x,t)\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\Big) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(x,t)u_s) + a(x,t)u_s = f(x,t), \ (x,t) \in Q_T^{(s)}, \quad (1)$$

$$u_s(x,t) = g(x,t), \ \ (x,t) \in \Gamma_T^{(s)} = \partial\Omega_s \times (0,T), \quad (2)$$

$$u_s(x,0) = 0, \quad x \in \Omega_s. \quad (3)$$

Предположение о нулевом начальном значении $u_s(x,t)$ не ограничивает общности рассмотрения, так как к условию (3) можно свести вычитанием решения вспомогательной задачи в $Q_T = \Omega \times (0,T)$, если $u_s(x,0) \neq 0$.

Усреднение параболических задач в областях с мелкозернистыми границами изучалось в работах [5, 6]. В этих работах выяснены условия, при которых последовательность $u_s(x,t)$ решений задач (1)-(3) сходится при $s \to \infty$ к предельной функции и построена усредненная граничная задача. Эти построения связаны с изучением асимптотического разложения последовательности $u_s(x,t)$. При этом была доказана сильная сходимость остаточного члена асимптотического разложения в энергетической норме.

В данной работе проводится дальнейшее изучение поведения остаточного члена $w_s(x,t)$ асимптотического разложения и доказывается его равномерная сходимость к нулю при $s \to \infty$. Аналогичный результат для эллиптической задачи доказан в [2].

2. Будем предполагать, что функции $a_{jk}(x,t)$, $a_j(x,t)$, $a(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $j,k = 1, \ldots, n$ определены при $x \in \Omega, t \in (0,T)$, измеримы и удовлетворяют следующим условиям с положительными ν, μ_1, μ_2:

A_1) функции $a_{jk}(x,t)$ имеют обобщенные производные по x и удовлетворяют неравенствам с произвольным $\xi \in R^n$;

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x,t)\,\xi_j\xi_k \geqslant \nu|\xi|^2, \quad a_{jk}(x,t) = a_{kj}(x,t),$$
$$|a_{jk}(x,t)| \leqslant \mu_1, \quad \left|\frac{\partial a_{jk}(x,t)}{\partial x_i}\right| \leqslant \mu_1, \quad i = 1,,,,,n; \tag{4}$$

A_2) выполнена оценка

$$\|F\|_{q,p,Q_T} + \|g\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \mu_2, \ \frac{1}{p} + \frac{n}{2q} < 1, \tag{5}$$

где $F(x,t) = 1 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(x,t) + |a(x,t)| + |f(x,t)| + \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right|$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial t}$ – обобщенные производные функции $g(x,t)$ и $\|\cdot\|_{q,p,Q_T}$ – норма в $L_p(0,T;L_q(\Omega))$, $p,q > 1$.

Предполагаем условие регулярности границы $\partial\Omega$ области Ω в следующем слабом смысле

∂) существуют положительные числа R_0, κ такие, что для произвольной точки $x_0 \in \partial\Omega$ выполнено неравенство

$$mes\,\{B(x_0,R) \setminus \Omega\} \geqslant \kappa R^n \tag{6}$$

при $0 < R \leqslant R_0$, где $B(x_0,R)$ – шар радиуса R с центром в точке x_0 .

Сформулируем условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающие построение усредненной задачи. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ так, чтобы $F_i^{(s)} \subset B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до $\bigcup\limits_{j\neq i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$.

Предполагаем, что выполнено условие:

B_1) $\lim\limits_{s\to\infty} r^{(s)} = 0$, где $r^{(s)} = \max\{r_i^{(s)}, i = 1,...,I(s)\}$;

B_2) существует положительное число μ_3 такое, что $d_i^{(s)} \leqslant \mu_3[r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}}$ при $i = 1,...,I(s), s = 1,2...$

Будем понимать под решение задачи (1)-(3) функцию

$$u(x,t) \in C\big([0,T],\, L_2(\Omega_s)\big) \cap L_2\big(0,T;W_2^1(\Omega_s)\big)$$

такую, что $u(x,t) - g(x,t) \in L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s)\big)$, выполнено условие (3) и для произвольных функций $\psi(x,t) \in L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s)\big), h \in (0,T)$, выполнено интегральное тождество

$$\iint_{Q_T^{(s)}} \left\{\frac{\partial[u_s]_h}{\partial t}\psi + \sum_{j,k=1}^{n}\left[a_{jk}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right]_h \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n}[a_j u_s]_h\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + [au_s]_h\psi - [f]_h\psi\right\} dxdt = 0. \tag{7}$$

Здесь использовано обозначение

$$[\varphi(x,t)]_h = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \varphi(x,s)ds$$

для произвольной функции $\varphi(x,t)$.

Известно (см. [1]), что условия $A_1), A_2)$ обеспечивают разрешимость задачи (1)-(3), а также известны следующие оценки

$$\max\left\{|u_s(x,t)| : (x,t) \in Q_T^{(s)}\right\} \leqslant M_0, \ \left\|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right\|_{L_2(Q_T^{(s)})} \leqslant M_1 \tag{8}$$

с постоянными M_0, M_1, зависящими только от параметров n, ν, μ_1, μ_2. В дальнейшем эти параметры, а также T, R_0, κ, μ_3 понимаются как известные. Продолжим $u_s(x,t)$ на Q_T, полагая ее равной $g(x,t)$ вне Q_T. Используя вторую оценку в (8) и, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем предполагать слабую сходимость $u_s(x,t)$ к $u_0(x,t)$ в $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$. Доказывается [6], что $u_0(x,t) \in C([0,T], L_2(\Omega))$ и является решением задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{jk=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\Big) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(x,t)u_0) + a(x,t)u_0 - \\ &- c(x,t)[g-u_0] = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \end{aligned} \tag{9}$$

$$u_0(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T \tag{10}$$

$$u_0(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Здесь $c(x,t)$ – неотрицательная функция, определяемая емкостными характеристиками множеств $F_i^{(s)}$ (см. [6]) и имеющая оценку $c(x,t) \leqslant C_0$ с постоянной C_0, зависящей только от известных параметров.

Основную роль при изучении асимптотического поведения последовательности $\{u_s(x,t)\}$ играют функции $v_i^{(s)}(x,t)$, определяемые как решения вспомогательных задач. А именно, определяем $v_i^{(s)}(x,t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{jk=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[a_{jk}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big] = 0, \quad (x,t) \in \{\Omega \setminus F_i^{(s)}\} \times (0,T), \tag{12}$$

$$v(x,t) = \omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right), \quad (x,t) \in \partial\big(\Omega \setminus F_i^{(s)}\big) \times (0,T), \tag{13}$$

$$v(x,t) = 0, \quad x \in \Omega \setminus F_i^{(s)}, \tag{14}$$

где $\omega : R^1 \to R^1$ – фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, нулю на $[1,\infty)$ и такая, что $0 \leqslant \omega(z) \leqslant 1$ при $z \in R^1$.

Введем еще функции $\varphi_i^{(s)}(x)$ равенством

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right), \quad \rho_i^{(s)} = \max\left\{\left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{n}{n-1}},\, d_i^{(s)}\right\}.$$

В силу условий $B_1), B_2)$ при достаточно большом s имеем

$$4d_i^{(s)} \leqslant \rho_i^{(s)} \leqslant \frac{r_i^{(s)}}{4}, \quad i = 1, \ldots I(s). \tag{15}$$

Поэтому, не ограничивая общности, можем считать выполненными условия (15) при $s \geqslant 1$.

Определим асимптотическое разложение

$$u_s(x,t) = u_0(x,t) + [g(x,t) - u_0(x,t)]r_s(x,t) + w_s(x,t), \tag{16}$$

где

$$r_s(x,t) = \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x,t)\varphi_i^{(s)}(x). \tag{17}$$

Предполагаем функции $r_s(x,t)$ и $w_s(x,t)$ продолженными на Q_T, доопределяя их значениями один и нуль соответственно на множестве $\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}\right\} \times (0,T)$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1, A_2), B_1), B_2)$. *Тогда последовательность* $w_s(x,t)$ *стремится к нулю в* $L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$.

Доказательство проводится аналогично [5].

Отметим только, что разложение (16), а, следовательно, и остаточный член разложения $w_s(x,t)$ отличны от соответствующих выражений в [5], что обусловлено линейностью рассматриваемой задачи, а также иным выбором последовательности $\rho_i^{(s)}$.

Основной результат статьи дает следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* $A_1, A_2), B_1), B_2), \partial)$. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty}\left\{vrai\max[|w_s(x,t)| : (x,t) \in Q_T]\right\} = 0, \tag{18}$$

где $w_s(x,t)$ *– остаточный член разложения (16).*

Сходимость (18) доказывается методом Мозера в разделе 4. Ему предшествуют вспомогательные оценки, полученные в разделе 3.

3. Вначале отметим ключевые поточечные оценки функции $v_i^{(s)}(x,t)$ ее производных по x.

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условио* $A_1)$ *и* $B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)}) \subset \Omega$. *Тогда существует постоянная* M_2, *зависящая только от* ν, μ_1 *такая, что при* $x \in \Omega \setminus B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)})$ *выполнены оценки*

$$|v_i^{(s)}(x,t)| \leqslant \min\left\{ M_2 \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|} \right)^{n-2}, 1 \right\}, \tag{19}$$

$$\left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x,t)}{\partial x} \right| \leqslant M_2 \frac{1}{|x - x_i^{(s)}|} \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|} \right)^{n-2}. \tag{20}$$

Оценка (19) доказана в [3], и отметим только, что для ее доказательства предположение о дифференцируемости $a_{jk}(x,t)$ не нужно. Оценка (20) доказана в [4].

Определим бесконечно дифференцируемую функцию $\eta : [0,T] \to [0,1]$, равную единице при $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, нулю при $t = T$.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условио* $A_1)$. *Тогда существует постоянная* M_3, *зависящая лишь от известных параметров такая, что при произвольном* $r \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{r+1} \, vrai \max_{0<\tau<T} \int_\Omega |w_s(x,\tau)|^{r+2} \eta^{r+2} dx +$$

$$+ (r+1) \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt \leqslant M_3(r+1) \iint_{Q_\tau} F(x,t) |w_s|^r \eta^{r+1}(t) dx dt +$$

$$+ M_3(r+1) \iint_{Q_T} \left\{ \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + \sum_{i=1}^{I(s)} \left[|v_i^{(s)}|^2 \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x} \right| \right] |w_s|^r \eta^{r+2}(t) dx dt + \right.$$

$$\left. + \frac{M_3}{r+1} \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_T}^{(s)} \left| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right|^2 [\varphi_i^{(s)}]^2 |w_s|^{r+2} \eta^{r+2}(t) dx dt \right\}. \tag{21}$$

Доказательство. Непосредственно из обозначения

$$w_s^{(h)}(x,t) = [u_s(x,t)]_h - [u_0(x,t)]_h - [g(x,t) - u_0(x,t)]_h [r_s(x,t)]_h, \tag{22}$$

следует включение $w_s^{(h)}(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s))$, что дает возможность выбрать пробной функцией в (7)

$$\psi_1(x,t) = \left| w_s^{(h)}(x,t) \right|^r w_s^{(h)}(x,t) \, \eta^{r+2}(t) \chi_\tau(t), \;\; r \geqslant 0. \tag{23}$$

Здесь $r_s(x,t)$ – функция, определенная равенством (17), $\chi_\tau(t)$ – характеристическая функция интервала $(0,\tau), \tau \leqslant T$.

Получаем после указанной подставновки следующее равенство

$$R_1^{(s)}(h) + R_2^{(s)}(h) + R_3^{(s)}(h) = 0, \tag{24}$$

где

$$R_1^{(s)}(h) = \iint\limits_{Q_T} \left\{ \frac{\partial w_s^{(h)}}{\partial t}\psi_1 + \sum_{j,k=1}^{n} \left[a_{jk}\frac{\partial w_s}{\partial x_j}\right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} [a_j w_s]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + [a w_s]_h \psi_1 \right\} dxdt,$$

$$R_2^{(s)}(h) = \iint\limits_{Q_T} \left\{ \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t}\psi_1 + \sum_{j,k=1}^{n} \left[a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} [a_j u_0]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + [a u_0]_h \psi_1 - [f]_h \psi_1 \right\} dxdt,$$

$$R_3^{(s)}(h) = \iint\limits_{Q_T} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}([g-u_0]_h [r_s]_h)\psi_1 + \sum_{j,k=1}^{n} \left[a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}([g-u_0]r_s)\right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left[a_j (g-u_0) r_s\right]_h \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \left[a(g-u_0)r_s\right]_h \psi_1 \right\} dxdt.$$

Преобразуем выражения для $R_l^{(s)}(h)$, $l = 1,2,3$ и оценим их пределы при $h \to 0$. Заметим, что

$$\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial w_s^{(h)}}{\partial t}\psi_1 dxdt = \frac{1}{r+2}\int\limits_{\Omega_s} |w_s^{(h)}(x,\tau)|^{r+2}\eta^{r+2}(\tau)dx -$$

$$- \iint\limits_{Q_\tau} \left[w_s^{(h)}(x,t)\right]^{r+2} \eta^{r+1}(t)\frac{d\eta(t)}{dt}dxdt,$$

где $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$. Используя это равенство, переходя к пределу в $R_1^{(s)}(h)$ при $h \to 0$ и оценивая в силу условия $A_1)$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} R_1^{(s)}(h) \geqslant \frac{1}{r+2}\int\limits_{\Omega} |w_s(x,\tau)|^{r+2}\eta^{r+2}(\tau)dx + \\ + \nu(r+1)\iint\limits_{Q_\tau} \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 |w_s|^r \eta^{r+2} dxdt - C_1(r+1)\iint\limits_{Q_\tau} F(x,t)|w_s|^{r+2}\eta^{r+2}dxdt. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь и дальше обозначаем через C_j, $j = 1,2...$ постоянные, зависящие только от известных параметров.

Используя интегральное тождество для $u_0(x,t)$, как решения задачи (9)-(11), имеем равенство

$$R_2^{(s)}(h) = \iint\limits_{Q_T} \left[c(x,t)\big(g(x,t) - u_0(x,t)\big)\right]_h \psi_1(x,t)dxdt,$$

из которого следует оценка

$$\lim_{h\to 0} R_2^{(s)}(h) \geqslant -C_2 \iint\limits_{Q_\tau} |w_s(x,t)|^{r+1}\eta^{r+2}(t)dxdt. \tag{26}$$

Преобразуем далее слагаемое из $R_3^{(s)}(h)$, содержащее производную по t, используя интегральные тождества для u_0 и $v_i^{(s)}$,

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}([g-u_0]_h[r_s]_h)\psi_1(x,t)dxdt = \\
&= \iint\limits_{Q_T} \left\{ \frac{\partial [g]_h}{\partial t}[r_s]_h\psi_1 + \sum_{j,k=1}^{n} \left[a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]_h \frac{\partial}{\partial x_k}([r_s]_h\psi_1) + \right. \\
&+ \sum_{j=1}^{n}[a_j u_0]_h \frac{\partial}{\partial x_j}([r_s]_h\psi_1) + [au_0]_h[r_s]_h\psi_1 - \big[c(g-u_0)\big]_h[r_s]_h\psi_1 - \\
&\left. - [f]_h[r_s]_h\psi_1 \right\} dxdt - \sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T}\left[a_{j,k}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\right]_h \frac{\partial}{\partial x_k}([g-u_0]_h\varphi_i^{(s)}\psi_1)dxdt.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Используя (27), можно перейти к пределу при $h \to 0$ в $R_3^{(s)}(h)$ и получить

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} R_3^{(s)}(h) = \iint\limits_{Q_T}\left\{ \frac{\partial g}{\partial t}r_s\psi_1 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\left[\frac{\partial (gr_s)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} - \right.\right. \\
&\left. - u_0\frac{\partial r_s}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial r_s}{\partial x_k}\psi_1\right] + \sum_{j=1}^{n} a_j\left[gr_s\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + u_0\frac{\partial r_s}{\partial x_j}\psi_1\right] + \\
&\left. + \big[ag - c(g-u_0) - f\big]r_s\psi_1 \right\} dxdt - \\
&- \sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} a_{jk}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}([g-u_0]\varphi_i^{(s)}\psi_1)dxdt.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Преобразуем последний интеграл, используя определение $r_s(x,t)$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} a_{jk}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}([g-u_0]\varphi_i^{(s)}\psi_1)dxdt = \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} a_{jk}\left[\frac{\partial (gr_s)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} - u_0\frac{\partial r_s}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k}\right]dxdt + \\
&+ \sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T} a_{jk}\left\{ \frac{\partial (g\varphi_i^{(s)})}{\partial x_k}\left[\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\psi_1 - v_i^{(s)}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right] - \right. \\
&\left. - \frac{\partial (u_0\varphi_i^{(s)})}{\partial x_k}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\psi_1 + u_0 v_i^{(s)}\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x_k}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right\} dxdt.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Отметим, что в силу (16) выполнена оценка

$$|r_s(x,t)| \leqslant 1, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{30}$$

Используя условие $A_1)$ неравенства (29), (30) и Юнга, получаем

$$\begin{gathered}
\lim_{h\to 0} R_3^{(s)}(h) \geqslant -\frac{\nu}{2}(r+1)\iint\limits_{Q_\tau} |w_s|^r \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 \eta^{r+2}(t)dxdt- \\
- C_3(r+1)\iint\limits_{Q_\tau}\left\{F(x,t)+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2+\sum_{i=1}^{I(s)}\left[|v_i^{(s)}|^2\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2+\right.\right. \\
\left.\left.+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right]\right\}|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt- \\
- C_3\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_\tau}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2[\varphi_i^{(s)}]^2|w_s|^{r+2}\eta^{r+2}(t)dxdt.
\end{gathered} \tag{31}$$

Теперь неравенство (21) следует из (24), (25), (26), (31) и доказательство леммы 2 закончено.

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия* $A_1)$, *д). Тогда существуют положительные постоянные* λ, M_4, *зависящие лишь от известных параметров, такие, что при произвольном* $r \geqslant 4$ *выполнено неравенство*

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant M_4 r^\lambda \iint\limits_{Q_T} F(x,t)|w_s|^{r-4}\eta^{r+1}(t)dxdt+ \\
+ M_4\frac{1}{r^3}\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2|w_s|^{r-4}\eta^{r+2}(t)dxdt+ \\
+ M_4\frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left\{|v_i^{(s)}|^2\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|w_s|^{r-4}+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|\varphi_i^{(s)}|^2|w_s|^{r+2}\right\}\eta^{r+2}(t)dxdt.
\end{gathered} \tag{32}$$

Доказательство. Пусть (x',t') – произвольная точка цилиндра Q_T и обозначим при $\delta > 0$

$$u_0' = u_0(x',t'), \quad \omega_\delta'(x,t) = \omega\Big(\frac{|x-x'|^2+|t-t'|}{\delta^2}\Big),$$

где ω – та же функция, что и при определении $\varphi_i^{(s)}(x,t)$. Подставим в интегральное тождество, соответствующее решению $u_0(x,t)$ задачи (9)-(11), пробную функцию

$$\psi_2(x,t) = \big[u_0(x,t)-u_0'\big]_h |w_s^{(h)}(x,t)|^r\omega_\delta'(x,t)\eta^{r+2}(t),$$

где $w_s^{(h)}(x,t)$ определено равенством (22).

Преобразуем слагаемое, возникающее после подстановки функции $\psi_2(x,t)$ и содержащее производную по t,

$$\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t}\psi_2(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[u_0(x,t)-u_0'\right]_h^2 |w_s^{(h)}(x,t)|^r\omega_\delta'(x,t)\eta^{r+2}(t)dx\Big|_{t=0}^{t=T} -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T}\left[u_0(x,t)-u_0'\right]_h^2\Bigg\{r\left[w_s^{(h)}(x,t)\right]^{r-1}\Bigg\{\frac{\partial[u_s]_h}{\partial t}-\frac{\partial[u_0]_h}{\partial t}-$$

$$-\sum_{i=1}^{I(s)}\left(\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial t}[g-u_0]_h+\left[v_i^{(s)}\right]_h\frac{\partial}{\partial t}[g-u_0]_h\right)\varphi_i^{(s)}\Bigg\}\omega_\delta'(x,t)\eta^{r+2}(t)+ \tag{33}$$

$$+\left[w_s^{(h)}(x,t)\right]^r\left((r+2)\eta^{r+1}(t)\omega_\delta'(x,t)\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\omega_\delta'(x,t)}{\partial t}\eta^{r+2}(t)\right)\Bigg\}dxdt.$$

Для дальнейшего преобразования слагаемых под знаком последнего интеграла воспользуемся интегральными тождествами для функции $u_s(x,t)$, $u_0(x,t)$, $v_i^{(s)}(x,t)$, как решений соответствующих начально-граничных задач. В результате проведения этих преобразований, последующих переходов к пределу при $h\to 0$ и оценивания получаем неравенство

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^r\omega_\delta'(x,t)\eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_4 r\iint\limits_{Q_T}\Bigg\{F(x,t)\omega_\delta'(x,t)+\Bigg\{\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2+|w_s|^4\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\left|v_i^{(s)}\right|^2\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2+|w_s|^6\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2\left|\varphi_i^{(s)}\right|^2\right]\eta^{r+2}(t)+\eta^{r+1}\Bigg]\omega_\delta'(x,t)+ \tag{34}$$

$$+\left[\left|\frac{\partial\omega_\delta'(x,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\omega_\delta'(x,t)}{\partial t}\right|\right]\eta^{r+2}(t)\Bigg\}\left|u(x,t)-u_0'\right|\Bigg\}|w_s|^{r-4}dxdt.$$

Хорошо известно (см. [1]), что из условий $A_1), A_2)$ и ограниченности функции $c(x,t)$ следует гельдеровость решения $u_0(x,t)$ задачи (9)-(11), так что с некоторыми α, H, зависящими лишь от известных параметров, выполнена оценка

$$\left|u(x,t)-u_0'\right|\leqslant H\delta^\alpha \quad \text{при} \quad |x-x'|^2+|t-t'|\leqslant\delta^2.$$

По заданному числу δ можем выбрать конечное число точек $\{(x_l,t_l)\}$, $l=1,...,L$ так, чтобы $(x_l,t_l)\in Q_T$ и для функций $\omega_\delta^{(l)}(x,t)=\omega\Big(\dfrac{|x-x_l|^2+|t-t_l|}{\delta^2}\Big)$ выполнялись условия

$$\sum_{l=1}^{L}\omega_\delta^{(l)}(x,t)\geqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t)\in Q_T, \quad \sum_{l=1}^{L} mes\, Q_\delta^{(l)}\leqslant C_5,$$

где $Q_\delta^{(l)}$ – носитель функции $\omega_\delta^{(l)}(x,t)$.

Применяя неравенство (34) при $\omega'_\delta(x,t)=\omega_\delta^{(l)}(x,t), l=1,...,L$ и суммируя полученные оценки, получаем

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt\leqslant C_6r\delta^\alpha\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt+$$
$$+C_6\frac{r}{\delta^2}\iint\limits_{Q_T}F(x,t)|w_s|^{r-4}\eta^{r+1}(t)dxdt+C_6r\delta^\alpha\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2|w_s|^{r-4}\eta^{r+2}(t)dxdt+$$
$$+C_6r\delta^\alpha\sum_{i=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left\{|v_i^{(s)}|^2\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|w_s|^{r-4}+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|\varphi_i^{(s)}|^2|w_s|^{r+2}\right\}\eta^{r+2}(t)dxdt.$$

Выбирая теперь δ из условия $C_6\delta^\alpha=\dfrac{1}{r^4}$, получаем неравенство (32) из последней оценки, что и заканчивает доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Предположим, что выполнено условие $A_1)$. Тогда существует положительная постоянная M_5, зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных $r=0, s=1,2,...,i=1,...,I(s)$ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|w_s|^{r+2}\left|\varphi_i^{(s)}\right|^2\eta^{r+2}(t)dxdt\leqslant\\&\leqslant M_4(r+1)^2\iint\limits_{Q_T}\left\{\left[\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2\right]\left|\varphi_i^{(s)}\right|^2+\right.\\&\left.+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|+|v_i^{(s)}|^2\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2\right\}|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt+\\&+M_4(r+1)^2\iint\limits_{Q_T}F(x,t)|w_s|^r\left|\varphi_i^{(s)}\right|^2\eta^{r+1}(t)dxdt.\end{aligned}\tag{35}$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество, определяющее $v_i^{(s)}(x,t)$ как решение задачи (12)-(14), пробную функцию

$$\psi_3(x,t)=\left[v_i^{(s)}(x,t)\right]_h\left|w_s^{(h)}(x,t)\right|^{r+2}\left[\varphi_i^{(s)}(x)\right]^2\eta^{r+2}(t),$$

где использованы те же обозначения, что и в (23). Преобразовывая слагаемое, содержащее производную $[v_i^{(s)}]_h$ по t, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[v_i^{(s)}(x,t)\right]_h^2|w_s^{(h)}(x,t)|^{r+2}\left[\varphi_i^{(s)}(x)\right]^2\eta^{r+2}(t)dx\Big|_{t=0}^{t=T}-$$
$$-\frac{r+2}{2}\iint\limits_{Q_T}\left[v_i^{(s)}\right]_h^2\left[\varphi_i^{(s)}\right]^2\left\{\left|w_i^{(h)}\right|^r w_s^{(h)}\left[\frac{\partial[u_s]_h}{\partial t}-\frac{\partial[u_0]_h}{\partial t}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial t}[g-u_0]_h\varphi_i^{(s)}-\left[v_i^{(s)}\right]_h\frac{\partial}{\partial t}[g-u_0]_h\varphi_i^{(s)}\right]\eta^{r+2}+\left|\bar{w}_s^{(h)}\right|^{r+2}\eta^{r+1}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\}dxdt+ \tag{36}$$
$$+\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T}\left[a_{jk}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\right]_h\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left[v_i^{(s)}\right]_h\left|w_s^{(h)}\right|^{r+2}\left|\varphi_i^{(h)}\right|^2\right\}\eta^{r+2}dxdt.$$

Используя интегральное тождество для функций $u_s, u_0, v_i^{(s)}$, как решений соответствующих начально-граничных задач, произведем дальнейшее преобразование слагаемых в (36), содержащих производные по t, и получим с

$$\psi_4(x,t)=\left[v_i^{(s)}(x,t)\right]_h^2\left|w_s^{(h)}(x,t)\right|^r w_s^{(h)}(x,t)\left|\varphi_i^{(s)}(x)\right|^2\eta^{r+2}(t)$$

следующее равенство

$$\iint\limits_{Q_T}\left\{\frac{\partial[u_s]_h}{\partial t}-\frac{\partial[u_0]_h}{\partial t}-\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial t}[g-u_0]_h\varphi_i^{(s)}+\left[v_i^{(s)}\right]_h\frac{\partial[u_0]_h}{\partial t}\varphi_i^{(s)}\right\}\psi_4(x,t)dxdt=$$
$$=-\sum_{j,k=1}^{n}\iint\limits_{Q_T}\left\{\left(\left[a_{jk}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right]_h-\left[a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]_h-\left[a_{jk}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\right]_h[g-u_0]_h\varphi_i^{(s)}+\right.\right.$$
$$\left.+\left[a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]_h\left[v_i^{(s)}\right]_h\varphi_i^{(s)}\right)\frac{\partial\psi_4}{\partial x_k}-\left(\left[a_{jk}\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j}\right]_h\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left[g-u_0\right]_h\varphi_i^{(s)}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\left[a_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]_h\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial x_k}\varphi_i^{(s)}\right)\psi_4\right\}dxdt-\iint\limits_{Q_T}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\left[a_ju_s\right]_h-\left[a_ju_0\right]_h\right)\frac{\partial\psi_4}{\partial x_j}+\right. \tag{37}$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left[a_ju_0\right]_h\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[v_i^{(s)}\right]_h\varphi_i^{(s)}\psi_4\right)+\left(\left[au_s\right]_h-\left[au_0\right]_h+\left[au_0\right]_h\left[v_i^{(s)}\right]_h\varphi_i^{(s)}-\right.$$
$$\left.\left.-[f]_h\left[v_i^{(s)}\right]_h\right)\psi_4+\left[c(g-u_0)\right]_h\left(1-\left[v_i^{(s)}\right]_h\varphi_i^{(s)}\right)\psi_4\right\}dxdt.$$

Подстановка (37) в (36) дает возможность совершить предельный переход при $h\to 0$. Приводя последующие оценки с использованием условия A_1) и неравенство

Юнга, получаем

$$\iint\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 |w_s|^{r+2} |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_7(r+1)^2 \iint\limits_{Q_T} \left\{ \left[\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2 \right] |\varphi_i^{(s)}|^2 + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| + \right.$$

$$\left. + |v_i^{(s)}|^2 \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t)dxdt + C_7(r+1)^2 \iint\limits_{Q_T} F(x,t)|w_s|^r |\varphi_i^{(s)}|^2 \eta^{r+1}(t)dxdt.$$

Этим закончено доказательство леммы 4.

Лемма 5. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B_1), B_2)$. *Тогда существует постоянная* M_6, *зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных* $r \geqslant 2$, $s = 1, 2, ...,$ $i = 1, ..., I(s)$ *выполнена оценка*

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \iint\limits_{Q_T} \left\{ |v_i^{(s)}|^2 \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| \right\} |w_s|^r \eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_6}{r^2} \iint\limits_{Q_T} \left\{ \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 |w_s|^r + r^6 |w_s|^{r-2} \right\} \eta^{r+2}(t)dxdt. \tag{38}$$

Доказательство. Используя определение функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ и неравенства (19), (20), получаем оценку

$$|v_i^{(s)}| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| \leqslant C_8 \big[d_i^{(s)}\big]^{n-2} \big[\rho_i^{(s)}\big]^{1-n}.$$

Далее, в силу выбора $\rho_i^{(s)}$ в (15) и условия $B_2)$, имеем

$$|v_i^{(s)}| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| \leqslant C_9. \tag{39}$$

При дальнейшей оценке левой части неравенства (38) будет использоваться неравенство

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx \leqslant C_{10} \left\{ \rho^p \int\limits_{B(x_0,r)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p dx + \frac{\rho^n}{r^n} \int\limits_{B(x_0,r)} |u(x)|^p dx \right\}, \tag{40}$$

справедливое при $1 \leqslant p < n$ для произвольной функции $u(x) \in W_p^1(B(x_0, r))$ с постоянной C_{10}, зависящей лишь от p, n. В (40) ρ, r – произвольные положительные числа, такие, что $0 < \rho < \frac{r}{2}$. Доказательство оценки (40) при $p > 1$

имеется в [7 , лемма 1.4, гл.8]. В случае $p = 1$ оценка (40) может быть получена близкими к приведенным там рассуждениям.

Применяя оценку (20) и неравенство (40) при $p=1$, $\rho = \rho_i^{(s)}$, $r = \dfrac{r_i^{(s)}}{2}$, имеем

$$\iint\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| |w_s|^r \eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant C_{11}\frac{[d_i^{(s)}]^{n-2}}{[\rho_i^{(s)}]^n}\int\limits_0^T \int\limits_{B(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})} |w_s|^r \eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\frac{[d_i^{(s)}]^{n-2}}{[\rho_i^{(s)}]^n}\left\{ r\rho_i^{(s)}\int\limits_0^T \int\limits_{B(x_i^{(s)},\frac{r_i^{(s)}}{2})} |w_s|^{r-1}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\eta^{r+2}(t)dxdt + \right.$$

$$\left. + \frac{[\rho_i^{(s)}]^n}{[r_i^{(s)}]^n}\int\limits_0^T \int\limits_{B(x_i^{(s)},\frac{r_i^{(s)}}{2})} |w_s|^r \eta^{r+2}(t)dxdt \right\} \leqslant C_{13}\int\limits_0^T \int\limits_{B(x_i^{(s)},\frac{r_i^{(s)}}{2})} \left\{\frac{1}{r^2}|w_s|^r\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 + \right. \tag{41}$$

$$\left. + r^4|w_s|^{r-2}\right\}\eta^{r+2}(t)dxdt.$$

Замечая, что в силу (16), шары $B\left(x_i^{(s)}, \dfrac{r_i^{(s)}}{2}\right)$, $B\left(x_j^{(s)}, \dfrac{r_j^{(s)}}{2}\right)$ не пересекаются при $i \neq j$, получаем оценку (38) непосредственно из (39), (41).

4. Доказательство теоремы 2. Из неравенств (21), (32), (34), (38) следует оценка

$$\frac{1}{r+1}\max_{0<\tau<T}\int\limits_\Omega |w_s(x,\tau)|^{r+2}\eta^{r+2}(\tau)dx + (r+1)\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 |w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}(r+1)^{\lambda+1}\iint\limits_{Q_T} F(x,t)|w_s|^{r-4}\eta^{r+1}(t)dxdt + \tag{42}$$

$$+ C_{14}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 |w_s|^{r-4}\eta^{r+2}(t)dxdt$$

при $r \geqslant r^{(1)}$ с некоторым числом $r^{(1)}$, зависящим только от известных параметров.

Применяя неравенство Юнга, имеем из (42)

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0<\tau<T}\int\limits_\Omega |w_s(x,\tau)|^{r+2}\eta^{r+2}(\tau)dx + \iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 |w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}(r+1)^{\lambda+2}\iint\limits_{Q_T} F(x,t)|w_s|^{r-4}\eta^{r+1}(t)dxdt +$$

$$+ \left(\frac{C_{15}}{r+1}\right)^{\frac{r}{2}-1}\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\eta^{r+2}(t)dxdt. \tag{43}$$

Воспользовавшись условием $A_2)$ на функцию $F(x,t)$, получаем из (43) оценку

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0<\tau<T}\int\limits_{\Omega}|w_s(x,\tau)|^{r+2}\eta^{r+2}(\tau)dx+\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2|w_s|^r\eta^{r+2}(t)dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_{16}(r+2)^{\lambda+2}\left\{\int\limits_0^T\left\{\int\limits_{\Omega}|w_s|^{(r-4)q'}\eta^{(r+1)q'}(t)dx\right\}^{\frac{p'}{q'}}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}+\left(\frac{C_{16}}{r+1}\right)^{\frac{r}{2}-1}\gamma_s, \tag{44}$$

где

$$\gamma_s=\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2dxdt\to 0\quad\text{при}\quad s\to\infty,$$

$p'=\dfrac{p}{p-1}$, $q'=\dfrac{q}{q-1}$ и $r\geqslant r^{(1)}$.

Неравенство (44) позволяет организовать итерационный процесс для оценки максимума $|w_s(x,t)|$. При этом еще используется ограниченность оператора вложения

$$L_\rho(0,T;L_\sigma(\Omega))\subset L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\big) \tag{45}$$

при

$$\frac{2}{\sigma}+\frac{4}{\rho n}=1.$$

Из вложения (45) и оценки (44) получаем при $\sigma=2q'\delta$, $\rho=2p'\delta$, $\delta=\dfrac{2}{np'}+\frac{1}{q'}>1$

$$\int\limits_0^T\left\{\int\limits_{\Omega}|w_s(x,t)|^{rq'}\eta^{rq'}(t)dx\right\}^{\frac{p'}{q'}}dt=\int\limits_0^T\left\{\int\limits_{\Omega}\left[\big[|w_s(x,t)|\eta(t)\big]^{\frac{r}{2\delta}}\right]^{\sigma}dx\right\}^{\frac{\rho}{\sigma}}dt\leqslant$$
$$\leqslant C_{17}(r+1)^{\rho}\left\{\operatorname*{vrai\,max}_{0<t<T}\int\limits_{\Omega}|w_s(x,t)\eta(t)|^{\frac{r}{\delta}}dx+\iint\limits_{Q_T}|w_s(x,t)|^{\frac{r}{\delta}-2}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\eta^{\frac{r}{\delta}}(t)dxdt\right\}^{\frac{\rho}{2}}\leqslant \tag{46}$$
$$\leqslant C_{18}(r+1)^{\rho+(\lambda+2)\frac{\rho}{2}}\left\{\int\limits_0^T\left\{\int\limits_{\Omega}\big[|w_s(x,t)|\eta(t)\big]^{(\frac{r}{\delta}-6)q'}dx\right\}^{\frac{p'}{q'}}dt\right\}^{\delta}+\left(\frac{C_{18}}{r+1}\right)^{\frac{rp'}{2}-2\rho}\gamma_s^{\frac{\rho}{2}}.$$

Определим числовую последовательность $\{r_j\}$

$$r_j=\left[r_0+\frac{6\delta}{\delta-1}\right]\delta^j,\quad r_0=r^{(1)}=4\delta$$

и введем обозначение

$$J_s(j)=\int\limits_0^T\left\{\int\limits_{\Omega}|w_s(x,t)|^{r_jq'}\eta^{r_jq'}(t)dx\right\}^{\frac{p'}{q'}}dt. \tag{47}$$

Из оценки (46) с $r = r_j$ имеем при $j \geqslant 1$

$$\left[J_s(j)\right]^{\delta^{-j}} \leqslant C_{19}^{j\delta^{-j}} \left[J_s(j-1)\right]^{\delta^{-(j-1)}} + C_{19}\delta^{-j}\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}}, \tag{48}$$

где $\tilde{\gamma}_s$ – сходящаяся к нулю последовательность, $0 < \tilde{\gamma}_s \leqslant 1$.

Итерируя неравенство (48), получаем оценку

$$\begin{gathered}\left[J_s(j)\right]^{\delta^{-j}} \leqslant C_{19}^{j\delta^{-j}+(j-1)\delta^{-(j-1)}+\ldots+\delta^{-1}+1}\Big\{J_s(0)+ \\ + \delta^{-j}\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}} + \delta^{-(j-1)}\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-(j-1)}} + \ldots + \delta^{-1}\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-1}}\Big\}.\end{gathered} \tag{49}$$

Далее, в силу неравенства $\delta > 1$, имеем

$$C_{19}^{j\delta^{-j}+(j-1)\delta^{-(j-1)}+\ldots+\delta^{-1}+1} \leqslant C_{20}. \tag{50}$$

Для оценки фигурной скобки в (49) заметим, что

$$\int\limits_j^{j+1} \delta^{-(z-1)}\,\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}}\,dz \geqslant \delta^{-j}\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}}.$$

Отсюда и дальнейшей замены $\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}} = \zeta$ следует оценка

$$\begin{gathered}\delta^{-j}\,\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-j}} + \delta^{-(j-1)}\,\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-(j-1)}} + \ldots + \delta^{-1}\,\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-1}} \leqslant \\ \leqslant C_{21}\int\limits_1^{\infty} \delta^{-(z-1)}\,\tilde{\gamma}_s^{\delta^{-z}}\,dz \leqslant C_{22}\frac{1}{|\ln\tilde{\gamma}_s|}.\end{gathered} \tag{51}$$

Из неравенств (49)-(51) имеем

$$\left[J_s(j)\right]^{\delta^{-j}} \leqslant C_{23}\Big[J_s(0) + \ln\frac{1}{|\tilde{\gamma}_s|}\Big]. \tag{52}$$

Замечая, что, в силу теоремы 1, $J_s(0) \to 0$ при $s \to \infty$, получаем из (52)

$$\lim_{s\to\infty}\Big\{\operatorname{vrai}\max|w_s(x,t)| : x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}\Big\} = 0. \tag{53}$$

Наконец, в силу возможности продолжения решения задачи (1)-(3) на цилиндр Q_{2T}, получаем (18) из непосредственно (53), и доказательство теоремы 2 закончено.

Список литературы

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.:Наука, 1967.
2. Скрыпник И.В., *Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях*, Мат. сборник, **184** (1993), вып.10, с.67-90.
3. Скрыпник И.В., *Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи*, Нелинейные граничные задачи, (1991), No.3, с.72-86.
4. Журавская А.В., *Поточечная оценка решений нелинейной параболической задачи*, Праці Інституту математики НАНУ. Математика та ї застосування. **36** (2001), с.103-110..
5. Скрыпник И.В., *Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях*, Укр. мат. журн., (1993),-т.45, No.11, с.1542-1566.
6. Скрыпник И.В., *Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистой границей*, Диф. уравнения, (1995), т.31, No.2, с.350-363.
7. Скрыпник И.В., *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М.:Наука, 1990.

Скрыпник И.В.
ИПММ НАН Украины , ул.Р.Люксембург 74,
83114, Донецк, Украина

Журавская А.В.
Институт математики НАН УКраины, ул.Терещенкивска,3,
01601, Киев, Украина