Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.78-84.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ С МАЛЫМ КОНУСОМ НА ГРАНИЦЕ.

© Рамзет Джафаров

Донецк, Украина

Резюме. Получена разрешимость общей нелинейной задачи Дирихле в области с конической точкой.

Введение и результат.

В области G, конической в начале координат и имеющей границу класса C^∞ всюду вне начала координат, рассматривается общая нелинейная задача

$$F(x, u, ..., D^{2m}u) = 0, \qquad x \in G \tag{1}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| \le m - 1, \qquad x \in \partial G. \tag{2}$$

Функция F удовлетворяет следующему общему условию эллиптичности

$$\sum_{|\alpha|} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha} \eta^\alpha \ge C|\eta|^2 m, \qquad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in R^{M(2m)}, \quad \forall \eta \in R^n.$$

(M(2m) - мощность множества мультииндексов длины не больше 2m).

Разрешимость исследуется в пространстве

$$X = \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\kappa-2l-2m}(G) \cap W^{l+2m}_{\kappa}(G), \quad \kappa > 2l - n,$$

где W^l_κ - весовое функциональное пространство, оснащенное нормой

$$\|u\|_{W^l_\kappa(G)} = (\int_G \sum_{|\alpha|\le l} r^{\kappa-2(l-|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

$\overset{\circ}{W}{}^{l}_{\kappa}(G)$ - весовое пространство функций, обращающихся в нуль на границе вместе с производными до l-го порядка.

В случае области с бесконечно гладкой границей разрешимость рассматриваемой задачи получена И. В. Скрыпником (см. [6, гл. 4]). Наличие угловой точки ухудшает дифференциальные свойства решений. Как показано Е. А. Волковым, регулярность решения уравнения Лапласа в секторе с нулевыми значениями на границах угла, зависит от некоторых интегральных характеристик граничных значений на дуге сектора.

Работа В.А. Кондратьева [4] послужила основой для многих исследований краевых задач в областях с коническими точками (работы В.Г. Мазьи, С.А. Назарова, А.И. Комеча, А.Е. Мерзона, Е. Миерсеманна, С. Кноблоч и других авторов) В последнее время появилось значительное количество работ, связанных с исследованием поведения решений вблизи конической точки (это работы В.Г. Мазьи, Е. Миерсеманна, М.В. Борсука, М. Добровольского). Особенность настоящей работы в том, что благодаря малости конуса при доказательстве разрешимости используются результаты для линейных задач без учета влияния точек спектра некоторого операторного пучка, вводимого авторами, исследования которых базируются на работе [4].

Теорема. *Пусть функция $F(t,x,\xi)$ определена и непрерывна при $t \in [0,1]$, $x \in \overline{G}$, $\xi \in R^{M(2m)}$ и при каждом $t \in [0,1]$ $F(t,x,\xi)$ принадлежит классу C^{l+1} по переменным x,ξ. Пусть, кроме того, F удовлетворяет ограничениям*

1) $\exists K$ — константа такая, что из $F(t,x,v,\dots,D^{2m}v) = 0$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\kappa-2m-2l}(G) \bigcap W^{2m+l}_{\kappa}(G)$ следует $\|v\|_{W^{2m+l}_{\kappa}(G)} \le K$ и

$$\sum_{|\alpha|=2m} F_\alpha(t,x,v,\dots,D^{2m}v)\eta^\alpha \ \ge\ K^{-1}|\eta|^{2m} \quad \forall x \in \overline{G},\ \xi \in R^{M(2m)},\ \eta \in R^n,$$

где $F_\alpha(t,x,\xi) = \frac{\partial F(t,x,\xi)}{\partial \xi_\alpha}$;

2) $F(0,x,-\xi) = -F(0,x,\xi)$ при $x \in \overline{G}$, $\xi \in R^{M(2m)}$.

3) Величина конуса, образующего границу в окресности точки $(0,0)$ — достаточно мала.

Тогда задача

$$F(1,x,v,\dots,D^{2m}v) = 0$$

имеет по крайней мере одно решение в X.

Под величиной конуса понимается площадь поверхности вырезаемой конусом на сфере единичного радиуса. Оказывается, условие на величину конуса можно наложить так. Пусть Ω — поверхность, вырезаемая конусом на сфере единичного радиуса. Тогда наименьшее положительное собственное число λ_1 задачи

$$\Delta_\omega u + \lambda(\lambda+n-2)u = 0, \qquad \omega \in \Omega \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где Δ_ω — оператор Лапласа – Бельтрами, должно быть достаточно велико. Притом величина λ_1 определяется известными параметрами задачи.

Доказательство теоремы.

Покажем как обобщить доказанное в [2] неравенство острого углана случай операторов с коэффициентами из весового пространства $W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)$.

Определим семейство операторов $\tilde{\aleph}^l_{2m}(A,B,G)$, которое состоит из линейных правильно эллиптических операторов $2m$ - го порядка с единой константой эллиптичности A и коэффициентами $a_\alpha(x)$, ограниченными по норме $\|\cdot\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)}$ константой B.

Лемма. *Пусть* $L \in \tilde{\aleph}^l_{2m}(A,B,G)$. *Существуют вещественные бесконечно дифференцируемые функции* $c_{\alpha\beta}(x)$:

$$k_1\|w\|^2_{W^l_\kappa(G)} \le [w,w]_{W^l_\kappa(G)} \le k_2\|w\|^2_{W^l_\kappa(G)}, \quad w \in W^l_\kappa(G), \tag{5}$$

положительные константы K_1', K_2', $\tilde{C}_2$, *зависящие от известных параметров* A, B, p, m, l *и области* G *и такой оператор*

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2(x) M_k(x,D), \quad M_k(x,D) \in \tilde{\aleph}^l_{2m}(1,\tilde{C}_2,G),$$

что для любой функции $u \in W^{2m+l}_\kappa(G) \bigcap \overset{\circ}{W}{}^m_{\kappa-2m-2l}$
справедливо неравенство

$$Re[Lu,Mu]_{W^l_\kappa(G)} \ge K_1'\|u\|^2_{W^{2m+l}_\kappa(G)} - K_2'\|u\|^2_{W^0_{\kappa-2l-4m}(G)}.$$

Чтобы показать как обобщить это неравенство на случай коэффициентов из $W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)$ рассмотрим возникающий при доказательстве (см. [2]) характерный интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega_k} r^{\frac{\kappa}{2}-l+|\alpha|-|\gamma|-|\nu|+|\delta|}|D^\delta u| \cdot |D^{\alpha-\gamma}a_\nu(x)| \cdot r^{\frac{\kappa}{2}-l-|\mu|+|\pi|}|D^\pi u|dx,$$

где Ω_k — область с бесконечно гладкой границей, максимальный линейный размер которой соизмерим с $\frac{1}{2^k}$;

$$\delta < \gamma+\nu, \quad |\nu| \le 2m, \quad |\mu| \le 2m, \quad \pi < 2m+l, \quad \gamma < \alpha.$$

Применяем неравенство Гельдера с показателями $\frac{1}{2} + \frac{|\gamma|}{2|\alpha|} + \frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|} = 1$,

$$I \le (\int\limits_{\Omega_k} (r^{\frac{\kappa}{2}-l-|\nu|+|\delta|+\frac{n}{2}}|D^\delta u|)^{\frac{2|\alpha|}{|\gamma|}}dx)^{\frac{|\gamma|}{2|\alpha|}} \cdot (\int\limits_{\Omega_k} (r^{|\alpha|-|\gamma|-\frac{n}{2}}|D^{\alpha-\gamma}a_\nu(x)|)^{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}dx)^{\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}} \cdot$$

$$(\int\limits_{\Omega_k} (r^{\frac{\kappa}{2}-l-|\mu|+|\pi|}|D^\pi u|)^2 dx)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Последний сомножитель оценивается через $\|u\|_{W^{l+2m}_\kappa}(\Omega_k)$. Оценим второй сомножитель. После замены $x = \frac{x'}{2^k}$ получим

$$(\int\limits_{\Omega_k} (r^{|\alpha|-|\gamma|-\frac{n}{2}}|D^{\alpha-\gamma}a_\nu(x)|)^{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}dx)^{\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}} \le C(\frac{1}{2^k})^{-\frac{n}{2}}(\frac{1}{2^k})^{n\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}} *$$

$$*(\int\limits_{\Omega_k'} (|D^{\alpha-\gamma}_{x'}\tilde{a}_\nu(x')|)^{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}dx')^{\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}}. \tag{7}$$

По неравенству Ниренберга – Гальярдо

$$\|D_{x'}^{\alpha-\gamma}\tilde{a}_\nu\|_{L_{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}} \le C\|D_{x'}^{\alpha}\tilde{a}_\nu\|_{L_2}^a\|\tilde{a}_\nu\|_{L_\infty}^{1-a} + C_1\|\tilde{a}\|_{L_\infty},$$

где $a = \frac{|\alpha-\gamma|}{|\alpha|}$. Условие размерностного баланса

$$\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|} = \frac{|\alpha-\gamma| - \frac{|\alpha-\gamma|}{|\alpha|}\cdot|\alpha|}{n} + \frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}$$

выполнено. Вложение $W_2^l \subset C$ позволяет продолжить оценку вправо.

$$\|D_{x'}^{\alpha-\gamma}\tilde{a}_\nu\|_{L_{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}} \le C\|D_{x'}^{\alpha}\tilde{a}_\nu\|_{L_2}^a\|\tilde{a}_\nu\|_{L_\infty}^{1-a}.$$

Подставляем в (7).

$$\Big(\int\limits_{\Omega_k}(r^{|\alpha|-|\gamma|-\frac{n}{2}}|D^{\alpha-\gamma}a_\nu(x)|)^{\frac{2|\alpha|}{|\alpha-\gamma|}}dx\Big)^{\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}} \le$$

$$\le C\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{-\frac{n}{2}}\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{n\frac{|\alpha-\gamma|}{2|\alpha|}}\|\tilde{a}_\nu\|_{W_2^l(\Omega_k')}^a\|\tilde{a}_\nu\|_{L_\infty(\Omega_k')}^{1-a} \le$$

$$\le \Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{-\frac{n}{2}(1-a)}\Big(\int \Omega_k \sum_{|\beta|\le l}|r^{|\beta|-\frac{n}{2}}D^\beta a_\nu|^2 dx\Big)^{\frac{a}{2}}\|a_\nu\|_{L_\infty}^{1-a} \le$$

$$\le C\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{-\frac{n|\gamma|}{2|\alpha|}}\|a_\nu\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(\Omega_k)}.$$

Первый сомножитель правой части (6) оценивается с помощью неравенства Ниренберга – Гальярдо и весового вложения через

$$\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{-\frac{n|\gamma|}{2|\alpha|}}\|u\|_{W^{l+2m-1}_{\kappa-2}(\Omega_k)}.$$

Так исходный интеграл оценивается через

$$C\|u\|_{W^{l+2m-1}_{\kappa-2}(\Omega_k)}\|a_\nu\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(\Omega_k)}\|u\|_{W^{l+2m}_{\kappa}(\Omega_k)}.$$

Очевидно весовой показатель $2(l-\frac{n}{2})$ улучшить нельзя. Доказательство леммы проводится по той же схеме что и в [2].

Рассмотрим семейство линейных дифференциальных операторов

$$\tilde{\aleph} = \bigcup_{t\in[0,1]}\{L_t(v) = \sum_{|\alpha|\le 2m}F_\alpha(t,x,v,\dots,D^{2m}v)D^\alpha,\ v\in N_t\},$$

где N_t — множество функций $v \in X$, удовлетворяющих уравнению

$$F(t,x,v,\dots,D^{2m}v) = 0.$$

Докажем, что $\|F_\alpha(t,x,v,\dots,D^{2m}v)\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)} \le B$, для $v \in N = \bigcup\limits_{t\in[0,1]} N_t$. Из условия на $F(t,x,\xi)$ будем иметь

$$\|F_\alpha(t,x,v,...,D^{2m}v)\|^2_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)} = \int\limits_G \sum_{|\beta|\le l} r^{2(|\beta|-\frac{n}{2})}|D^\beta_x F_\alpha(t,x,v,\dots D^{2m}v)|^2 dx =$$

$$= \int\limits_G \sum_{|\beta|\le l} r^{2(|\beta|-\frac{n}{2})}|\sum_{|\delta|\le 2m} F_{\alpha\delta}(t,x,v,\dots D^{2m}v)D^{\delta+\beta}v + \overline{R}_\beta(v)|^2 dx \le$$

$$\le C_{28}\{\int\limits_G \sum_{|\beta|\le l}\sum_{|\delta|\le 2m} (r^{\frac{\kappa}{2}-l+|\beta|}|D^{\delta+\beta}v|)^2 dx +$$

$$+ \int\limits_G \sum_{|\beta|\le l}\sum_{\sigma_\beta}(r^{\frac{\kappa}{2}-l+|\beta|}|D^{\beta^{(1)}}v|\cdot\ldots\cdot|D^{\beta^{(\hat{t})}}v|\cdot|D^{\beta^{(\hat{t}+1)}}v|\cdot\ldots\cdot|D^{\beta^{(\hat{k})}}v|)^2 dx, \qquad (8)$$

где σ_β — множество мультииндексов длины меньше $|\beta|$. Первое слагаемое оценивается через $\|v\|^2_{W^{l+2m}_\kappa(G)}$.

Используя весовое следствие из неравенства Ниренберга – Гальярдо

$$\|D^{\theta+2m}u\|_{L_{\frac{2l_1}{\theta}}} \le C_6\|D^{l_1+2m}u\|^{\frac{\theta}{l_1}}_{L_2}\|D^{2m}u\|^{1-\frac{\theta}{l_1}}_{L_\infty},\ l_1 > \frac{n}{2},\ \theta < l_1,$$

можно оценить второе слагаемое правой части (8) через

$$C\sum_{l_1=2}^{l}\sum_{j=1}^{l_1}\|v\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)} \le B.$$

Таким образом, можно указать константу B, зависящую от K, m, l такую, что

$$\|F_\alpha(t,x,v,\dots,D^{2m}v)\|_{W^l_{2(l-\frac{n}{2})}(G)} \le B.$$

Так $\tilde{\aleph} \subset \tilde{\aleph}^l_{2m}(K,B,G)$. Определим нелинейный оператор $A_t : X \to X^*$ равенством

$$< A_t u, \phi > = [F(t,x,u,\dots,D^{2m}u), M(x,D)\phi]_{W^l_\kappa(G)},\ \phi \in X.$$

Определим нелинейный оператор $A_t : X \to X^*$ равенством

$$< A_t u, \phi > = [F(t,x,u,\dots,D^{2m}u), M(x,D)\phi]_{W^l_\kappa(G)},\ \phi \in X.$$

Доказывается, что задача $A_t u = 0$ эквивалентна задаче $F(t,x,u,\dots,D^{2m}) = 0$ а также, что оператор A_t ограничен и непрерывен (см. [6]). При доказательстве условия α получаем следующее соотношение

$$< Au_n, u_n - u_0 > \ge C\|u_n-u_0\|^2_{W^{l+2m}_\kappa(G)} - C_1\|u_n-u_0\|^2_{W^0_{\kappa-2l-4m}(G)} + R_n, \qquad (9)$$

где $R_n \to 0, \quad n \to \infty$. Разобьем область G на G_0^d (часть области G, отсекаемая сферой радиуса d) и $G \setminus G_0^d$, где d — некоторое положительное число. Воспользовавшись неравенством Харди – Виртингера

$$\int\limits_{G_0^d} r^{\beta-2} v^2 dx \le \frac{1}{\lambda^2 + \lambda(n-2)} \int\limits_{G_0^d} r^{\beta} |\nabla v|^2 dx, \quad \forall \beta,$$

которое справедливо для любой $v \in W_2^1(G_0^d)$, обращающейся в ноль на боковой поверхности, получим

$$\|u_n - u_0\|^2_{W^0_{\kappa-2l-4m}(G_0^d)} = \int\limits_{G_0^d} r^{\kappa-2l-4m} |u_n - u_0|^2 dx \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda^2 + \lambda(n-2)} \int\limits_{G_0^d} r^{\kappa-2l-4m+2} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx. \tag{10}$$

Из леммы В.А Кондратьева [4, лемма 3.5] получаем, что вложение $W_\kappa^{l+2m}(G) \subset W^0_{\kappa-2l-4m+\epsilon}(G)$, где $\epsilon > 0$, компактно. Очевидно, $W^0_{\kappa-2l-4m+\epsilon}(G) \subset L_2(G \setminus G_0^d) \subset W^0_{\kappa-2l-4m}(G \setminus G_0^d)$. Так имеем компактное вложение

$$W_\kappa^{l+2m}(G) \subset W^0_{\kappa-2l-4m}(G \setminus G_0^d) \tag{11}$$

Подставим (10) в (9)

$$< Au_n, u_n - u_0 > \ge C\|u_n - u_0\|^2_{W_\kappa^{l+2m}(G)} - C_1 \frac{1}{\lambda^2 + \lambda(n-2)} \|u_n - u_0\|^2_{W_\kappa^{l+2m}(G)} -$$

$$-C_2 \|u_n - u_0\|^2_{W^0_{\kappa-2l-4m}(G \setminus G_0^d)} + R_n. \tag{12}$$

Если λ будет достаточно велико, то мы перейдя к пределу в (12) и имея компактность вложения (11) завершим доказательство условия α. Далее применяется теорема 7.1 из [6], которая дает разрешимость уравнения $A_1 u = 0$ в пространстве X. Покажем, что λ будет достаточно велико, если величина конуса будет достаточно малой. Для этого будем рассматривать задачу (3), (4) на сфере

$$x = sin\theta cos\phi,$$

$$y = sin\theta sin\phi,$$

$$z = cos\theta$$

Уравнение (3) примет вид

$$u_{\theta\theta} + ctg\theta u_\theta + u_{\phi\phi} + \lambda(\lambda+1)u = 0$$

Область Ω в координатах (ϕ, θ) будет представлена так $[0, 2\pi] \times [0, Q]$. Разделив переменные получим две задачи на собственные значения:

$$-\Theta_{\theta\theta} - ctg\theta \cdot \Theta_\theta = \mu\Theta \tag{13}$$

$$\Theta(Q) = 0, \tag{14}$$

$$-\Phi_{\phi\phi} = \nu\Phi \tag{15}$$

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi), \tag{16}$$

где $\mu = \lambda(\lambda+1) - \nu$.

Собственные значения задачи (15), (16) известны

$$\nu_k = k^2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому остается выяснить связь величины конуса, которая определяется только значением Q, со значением λ_1.

Как следствие из теоремы сравнения собственных чисел [5,теорема 6.9.1] получаем,

$$\nu_j + \lambda_k(\lambda_k + 1) \geq \frac{\pi^2 k^2}{Q^2}, \quad j, k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, уменьшение конуса приводит к увеличению λ_1. Поэтому перейдя к пределу в (12) мы завершим доказательство условия α.

Список литературы

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы*, М: ИЛ, 1962.
2. Dzhafarov R.M., *A sharp angle inequalities for pair of elliptic operators in the case of domain with a conical point*, Nonlinear Value problems **9** (1999), 40-45.
3. Джафаров Р.М., *О разрешимости общей нелинейной задачи Дирихле в области с малым углом*, Моделирование непрерывных и дискретных систем **2** (1998), 42-54.
4. Кондратьев В.А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Труды Московского математического общества **16** (1967), 219-292.
5. Михлин С.Г., *Курс математической физики*, М: Наука, 1968.
6. Skrypnik I.V., *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Leipzig: B.G. Teubner Verlagsges, 1986.

Институт прикладной математики и механики,
ул. Р.Люксембург 74,
83114, Донецк, Украина