Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.11-17.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ЭЙЛЕРА

© А.В. Беляев

Донецк, Украина

Резюме. Найдена асимптотика особых точек решений и топология комплексного продолжения инвариантных торов в случае Эйлера задачи о движении тяжелого твердого тела.

Введение.

Исследование аналитических свойств решений уравнений Эйлера-Пуассона требует изучения асимптотического поведения решений в окрестностях особых точек. В статье [1] подведен итог ряда работ по этой теме. На следующем этапе исследования аналитических свойств решений задачи о движении тяжелого твердого тела необходимо от локальных свойств решений перейти к глобальным, к примеру, определить характер расположения особых точек решений на комплексной плоскости, найти зависимости между асимптотическими параметрами особых точек решений, получить результаты, описывающие топологию траекторий. В некоторой степени перечисленные выше глобальные свойства решений могут быть поняты на примерах возмущенных частных интегрируемых случаев рассматриваемой задачи. Но, разумеется, исследование возмущенных решений необходимо предварить изучением интересующих нас свойств интегрируемых частных случаев задачи. Итак, цель настоящей статьи заключается в том, чтобы исследовать асимптотику особых точек решений в совокупности для каждого решения и описать топологию комплексного продолжения инвариантных торов в случае Эйлера задачи о движении тяжелого твердого тела.

1. Асимптотика особых точек решений уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера при заданных значениях первых интегралов.

Классические уравнения Эйлера - Пуассона мы рассматриваем в следующих обозначениях:

$$\begin{cases} A\,\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases} \tag{1.1}$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{C}^3, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{C}^3, A = diag(A_1, A_2, A_3) > 0$, $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^3$.

Ниже мы также используем обозначение $B_{ij} = A_i - A_j$. Определим $\mathbf{C}$-скалярное произведение в $\mathbf{C}^3$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$. Кроме того, циклическую перестановку индексов $\sigma = (1,2,3)$ будем использовать для записи произведений или сумм (например, $\sum_\sigma A_1A_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, $\prod_\sigma A_1 = A_1A_2A_3$), а также соотношений, получающихся друг из друга перестановкой индексов ($\dot{\gamma} = \gamma \times p$, можно записать в виде $\dot{\gamma}_1 = p_3\gamma_2 - p_2\gamma_3, \sigma$).

Система дифференциальных уравнений (1.1) имеет следующие первые интегралы:

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle + \langle \gamma, r\rangle = 0, \quad \mathbb{M} = \langle Ap, \gamma\rangle = 0, \quad \mathbb{N} = \langle \gamma, \gamma\rangle = 0;$$

здесь $\langle *, * \rangle$ - комплексное продолжение скалярного произведения в $\mathbf{R}$.

В случае Эйлера ([2]), который определяется условием $r = 0$, кроме указанных интегралов имеется также четвертый интеграл:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2}\langle Ap, Ap\rangle .$$

Из теоремы 2.5 ([1]) и теоремы 1 ([3]) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В случае Эйлера задачи (1.1) о движении тяжелого твердого несимметричного тела (все $_i$ различны) все особые точки решений имеют асимптотику:*

$$\begin{cases} p(t) = \dfrac{\overset{\sim 0}{p}}{t} + (\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)t + o(t) \\ \gamma(t) = \alpha_1 \dfrac{v_1}{t} + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} + \alpha_5 v_{-1} t + o(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

здесь $\alpha_1, ...\alpha_5$ - свободные параметры, $\overset{\sim 0}{p}$ является решением уравнения

$$A\overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p} + \overset{\sim 0}{p} = 0, \tag{1.3}$$

в явном виде

$$\overset{\sim 0}{p_1} = \sqrt{\frac{A_2 A_3}{B_{12} B_{31}}}, \sigma;$$

при этом, если $(\overset{\sim 0}{p_1}, \overset{\sim 0}{p_2}, \overset{\sim 0}{p_3})$ - решение (1.3), то все остальные решения имеют вид

$$(-\overset{\sim 0}{p_1}, -\overset{\sim 0}{p_2}, \overset{\sim 0}{p_3}), (-\overset{\sim 0}{p_1}, \overset{\sim 0}{p_2}, -\overset{\sim 0}{p_3}), (\overset{\sim 0}{p_1}, -\overset{\sim 0}{p_2}, -\overset{\sim 0}{p_3}). \tag{1.4}$$

$$v_1 = A\overset{\sim 0}{p},$$

вектор v_{-1} удовлетворяет соотношениям

$$\overset{\sim 0}{p} \times v_{-1} = -v_{-1}, \quad \langle v_{-1}, v_1\rangle = 1,$$

$\{v_2, v_3\}$— собственные векторы оператора

$$\xi \overset{\mathbf{D}}{\to} A^{-1}\left(A\overset{\sim 0}{p} \times \xi + A\xi \times \overset{\sim 0}{p}\right). \tag{1.5}$$

Представление (1.2) можно включить в ряд, сходящийся в окрестности особой точки $t = 0$.

В предложении 1 параметры $\alpha_1, ...\alpha_5$ свободны, но ясно, что для конкретного решения это не так и существуют зависимости между ними.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Параметры α_i представления (1.2) решения уравнений Эйлера - Пуассона со значениями первых интегралов $\mathbb{H} = h, \mathbb{M} = m, \mathbb{N} = n, \mathbb{K} = k$ связаны между собой соотношениями*

$$\begin{cases} n = 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_4^2 \\ m = \alpha_5 + \alpha_1\alpha_2 m_1 + \alpha_1\alpha_3 m_2 \\ h = \alpha_2 h_1 + \alpha_3 h_2 \\ k = \alpha_2 m_1 + \alpha_3 m_2 \end{cases}$$

здесь $m_1 = \langle Av_1, v_2\rangle$, $m_2 = \langle Av_1, v_3\rangle$, $h_1 = \langle v_1, v_2\rangle$, $h_2 = \langle v_1, v_3\rangle$. Поверхность, задаваемая этими соотношениями имеет размерность 1 и представление

$$\begin{cases} \alpha_5 = m - \alpha_1 k \\ \alpha_4 = \sqrt{2\alpha_1(m-\alpha_1 k) - n} \\ \alpha_3 = \dfrac{hm_1 - kh_1}{h_1 m_2 - m_1 h_2} \\ \alpha_2 = \dfrac{hm_2 - kh_2}{h_1 m_2 - m_1 h_2} \end{cases} \tag{1.6}$$

Доказательство. Подставим асимптотику (1.2) в первые интегралы.

$$n = \alpha_4^2 \left\langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \right\rangle + 2\alpha_1\alpha_5 \langle v_1, v_{-1}\rangle = -\alpha_4^2 + 2\alpha_1\alpha_5,$$

так как

$$\xi = \overset{\sim 0}{p} \times \xi \Longrightarrow \xi = \overset{\sim 0}{p} \times \left(\overset{\sim 0}{p} \times \xi\right) = -\left\langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \right\rangle \xi + \left\langle \overset{\sim 0}{p}, \xi \right\rangle \overset{\sim 0}{p} = -\left\langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \right\rangle \xi,$$

то есть $\left\langle \overset{\sim 0}{p}, \overset{\sim 0}{p} \right\rangle = -1$,

$$m = \langle v_1, v_{-1}\rangle \alpha_5 + \alpha_1\alpha_2 \langle Av_1, v_2\rangle + \alpha_1\alpha_3 \langle Av_1, v_3\rangle,$$
$$h = \alpha_2 \langle v_1, v_2\rangle + \alpha_3 \langle v_1, v_3\rangle$$
$$k = \alpha_2 \langle Av_1, v_2\rangle + \alpha_3 \langle Av_1, v_3\rangle$$

Остается доказать, что α_2 и α_3 в (1.6) корректно определены. Обозначим $w = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ и $w_0 = \left(\overset{\sim 0}{p}_2\overset{\sim 0}{p}_3, \overset{\sim 0}{p}_3\overset{\sim 0}{p}_1, \overset{\sim 0}{p}_1\overset{\sim 0}{p}_2\right)$ и покажем, что эти векторы ортогональны.

Будем использовать соотношения (1.3) и (1.5) в координатном виде:

$$B_{23} \overset{\sim 0}{p}_2\overset{\sim 0}{p}_3 + A \overset{\sim 0}{p}_1 = 0, \sigma, \quad B_{23} \left(\overset{\sim 0}{p}_2 \xi_3 + \overset{\sim 0}{p}_3 \xi_2\right) - A_1\xi_1, \sigma.$$

Подставляя $B_{23} \overset{\sim 0}{p}_i$ из первого соотношения во второе, получаем требуемый результат.

Но при этом $\left\langle \overset{\sim 0}{p}, Aw \right\rangle = h$, $\left\langle A \overset{\sim 0}{p}, Aw \right\rangle = k$, $\langle A^{-1}w_0, Aw\rangle = 0$, и векторы $A \overset{\sim 0}{p}$, $\overset{\sim 0}{p}$, $A^{-1}w_0$ линейно независимы, так как $\left\langle A \overset{\sim 0}{p} \times \overset{\sim 0}{p}, A^{-1}w_0 \right\rangle = -3\prod_\sigma \overset{\sim 0}{p}_1 \neq 0$. Следовательно, вектор w корректно определен.

Замечание 1. *Является естественным то обстоятельство, что асимптотика $p(t)$ полностью определяется значениями h и k.*

2. Асимптотика особых точек для отдельного решения уравнений Эйлера - Пуассона в случае Эйлера.

Предложение 2 позволяет получить асимптотику при любых значениях первых интегралов, иначе говоря для траекторий, лежащих на любом инвариантном торе, но на каждом таком торе имеется однопараметрическое семейство решений. Чтобы выделить из него какое-нибудь одно, надо использовать явный вид решения.

Пусть $\langle Ap, p\rangle = D\nu^2$, $\langle Ap, Ap\rangle = D^2\nu^2$, тогда согласно [2] решение системы дифференциальных уравнений (1.1) в случае Эйлера имеет вид:

$$p_1 = \nu\sqrt{\frac{D(D-A_3)}{A_1(A_1-A_3)}}cn(\tau), p_2 = \nu\sqrt{\frac{D(D-A_3)}{A_2(A_2-A_3)}}sn(\tau), p_3 = \nu\sqrt{\frac{D(A_3-D)}{A_3(A_1-A_3)}}dn(\tau),$$

где $\tau=\nu\sqrt{\dfrac{D(A_1-D)(A_2-A_3)}{A_1A_2A_3}}(t-t_0)$.

Полагая
$$\lambda^2=-\nu^2\frac{D(A_1-A_2)(A_3-D)}{A_1A_2A_3},\kappa^2=\frac{(A_1-A_2)(D-A_3)}{(A_2-A_3)(A_1-D)},\lambda_0=\frac{\lambda}{\kappa},$$
получим
$$\begin{cases} p_1(t)=\overset{\sim 0}{p}_1\, i\lambda_0\kappa\; cn(\lambda_0(t-t_0)), \\ p_2(t)=\overset{\sim 0}{p}_2\, \lambda_0\kappa\; sn(\lambda_0(t-t_0)), \\ p_3(t)=\overset{\sim 0}{p}_3\, i\lambda_0\; dn(\lambda_0(t-t_0)), \end{cases} \tag{2.1}$$

Углы Эйлера изменяются следующим образом
$$\theta=arccos\frac{A_3p_3}{\nu D},\phi=arctg\frac{A_1p_1}{A_2p_2},\psi=\nu D\int\frac{A_1p_1^2+A_2p_2^2}{A_1^2p_2^2+A_2^2p_2^2}dt \tag{2.2}$$

Вектор γ есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\beta_i\in\mathbf{R}$ трех линейно независимых решений
$$\gamma=\beta_1\begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\psi)-\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi)\\ -\sin(\phi)\cos(\psi)-\cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\psi)\\ \sin(\theta)\sin(\psi)\end{pmatrix}+ \tag{2.3}$$
$$\beta_2\begin{pmatrix}\cos(\phi)\sin(\psi)+\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi)\\ -\sin(\phi)\sin(\psi)+\cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi)\\ -\sin(\theta)\cos(\psi)\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}\sin(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Согласно полученному представлению (2.1) асимптотика $p(t)$ в особых точках имеет как и положено вид $p(t)=\overset{\sim 0}{p}\ t^{-1}+o\left(t^{-1}\right)$, но для нахождения α_1 нам необходимо найти асимптотику для $\gamma(t)$.

Воспользуемся формулами (2.2), (2.3) и асимптотикой $p(t)$. Мы получаем, что
$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{tg^2\phi+1}}=\frac{A_2p_2}{\sqrt{A_1^2p_1^2+A_2^2p_2^2}}\to\frac{\pm A_2 i\ \overset{\sim 0}{p}_2}{A_3\ \overset{\sim 0}{p}_3},t\to t_*,$$

аналогично, $\sin\phi\to\dfrac{\pm iA_1\ \overset{\sim 0}{p}_1}{A_3\ \overset{\sim 0}{p}_3},t\to t_*$.

Из (2.2) мы видим, что существуют пределы ψ и ϕ при $t\to t_*$. Положим $\phi_*=\phi(t_*),\psi_*=\psi(t_*)$. Тогда при $t\to t_*$
$$\begin{cases}\gamma_1(t)\sim-\beta_1\dfrac{A_3p_3}{\nu D}\sin\phi_*\sin\psi_*+\beta_2\dfrac{A_3p_3}{\nu D}\sin\phi_*\cos\psi_*+\beta_3\sqrt{1-\dfrac{A_3^2p_3^2}{\nu^2D^2}}\sin\phi_*,\\ \gamma_2(t)\sim-\beta_1\dfrac{A_3p_3}{\nu D}\cos\phi_*\sin\psi_*+\beta_2\dfrac{A_3p_3}{\nu D}\cos\phi_*\cos\psi_*+\beta_3\sqrt{1-\dfrac{A_3^2p_3^2}{\nu^2D^2}}\cos\phi_*,\\ \gamma_3(t)\sim\beta_1\sqrt{1-\dfrac{A_3^2p_3^2}{\nu^2D^2}}\sin\psi_*-\beta_2\sqrt{1-\dfrac{A_3^2p_3^2}{\nu^2D^2}}\cos\psi_*+\beta_3\dfrac{A_3p_3}{\nu D}.\end{cases}$$

Учитывая, что
$$\cos\phi_*=\frac{\pm iA_2\ \overset{\sim 0}{p}_2}{A_3\ \overset{\sim 0}{p}_3},\quad \sin\phi_*=\frac{\pm iA_1\ \overset{\sim 0}{p}_1}{A_3\ \overset{\sim 0}{p}_3},$$

получим

$$\gamma(t) \sim (\pm\beta_1 i \sin\psi_* \pm \beta_2 i \cos\psi_* + \beta_3)\frac{\pm A \overset{\sim 0}{p}}{\nu D(t-t_*)}.$$

Поскольку общее решение однозначно на всей комплексной плоскости, а также однозначны функции $\sin\psi_*, \cos\psi_*$, мы можем избавиться от неоднозначности полученной формулы:

$$\gamma(t) \sim (\beta_1 i \sin\psi_* + \beta_2 i \cos\psi_* + \beta_3)\frac{A \overset{\sim 0}{p}}{\nu D(t-t_*)}.$$

Базисные решения $\gamma(t)$ взаимно ортогональны, поэтому

$$n = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

$$m = \frac{\beta_3}{\nu D}\langle Ap, Ap\rangle = \frac{2k\beta_3}{\nu D} = \beta_3 \nu D \Longrightarrow \beta_3 = \frac{m}{\nu D}.$$

Полагая $\zeta = arctg(\frac{\beta_2}{\beta_1})$, мы получаем

$$\alpha_1 = \frac{1}{\nu D}(\beta_1 i \sin\psi_* + \beta_2 i\cos\psi_* + \beta_3) = \frac{1}{\nu D}(i\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\sin(\psi_*+\zeta)+\beta_3) =$$

$$= \frac{1}{\nu D}\left(\sqrt{\beta_3^2 - \mathbb{T}}\sin(\psi_*+\zeta)+\beta_3\right) = \frac{m}{2k} + \frac{\sqrt{m^2-2kn}}{2k}\sin(\psi_*+\zeta),$$

Окончательно,

$$\alpha_1 = \frac{m + \sqrt{m^2-2kn}\ \sin(\psi_*+\zeta)}{2k}; \tag{2.4}$$

ζ параметризует множество решений на инвариантном торе и принадлежит окружности ($\zeta \in S^1$).

Соотношения (1.6), (2.4) полностью определяют параметры $\alpha_1, ..., \alpha_5$. При этом поверхность, задаваемая (1.6), является двулистным накрытием ([4]) $\overline{\mathbf{C}}$ над $\overline{\mathbf{C}}$.

Найдем точки ветвления

$$2k\alpha_1^2 - 2m\alpha_1 + n = 0$$

$$\alpha_{1,*} = \frac{m + \sqrt{m^2-2kn}}{2k} \tag{2.5}$$

и мы имеем полную информацию об асимптотике особых точек решений уравнений Эйлера - Пуассона в случае Эйлера (2.1), (2.3) и весьма характерную согласованность соотношений (2.4) и (2.5).

Мы получили формулу (2.5), для каждого из четырех значений $\overset{\sim 0}{p}$. Однако, учитывая свойства эллиптических функций, мы видим, что эта формула верна для всех в совокупности особых точек, поскольку сдвиги на полпериода изменяют знаки эллиптических функций как и требуется в соответствии с (1.4).

Таким образом, имеет место теорема

Теорема 1. *Асимптотика особых точек решений уравнений Эйлера - Пуассона в случае Эйлера имеет вид*

$$\begin{cases} p(t) = \dfrac{\overset{\sim 0}{p}}{t} + (\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)t + o(t), \\ \gamma(t) = \alpha_1 \dfrac{v_1}{t} + \alpha_4 \overset{\sim 0}{p} + \alpha_5 v_{-1} t + o(t), \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 2kn}\sin(\psi_* + \zeta)}{2k},$$

$$\alpha_2 = \frac{hm_2 - kh_2}{h_1 m_2 - m_1 h_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{hm_1 - kh_1}{h_1 m_2 - m_1 h_2},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{2\alpha_1(m - \alpha_1 k) - n},$$

$$\alpha_5 = m - \alpha_1 k,$$

$$\psi_* = \nu D \int_0^{t_*} \frac{A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2}{A_1^2 p_2^2 + A_2^2 p_2^2} dt,$$

t_* *- координата особой точки на комплексной плоскости,* h, m, n, k *- значения первых интегралов, задающие инвариантный тор,* ζ *- параметр, задающий семейство траекторий на самом торе.*

Замечание 2. *Геометрическая картина расположения окружностей, соответствующих инвариантным торам, в пространстве параметров* $\{\alpha_1, ..., \alpha_5\}$ *становится более наглядной, если записать* $\sin(\psi_* + \zeta)$ *в виде:*

$$\sin(\psi_* + \zeta) = \frac{e^{x_*} + e^{-x_*}}{2} e^{it},$$

где $x_* = Im\psi_*, t = Re(\psi_* + \zeta)$.

3. Топология траекторий решений и аналитического продолжения инвариантных торов

В этом разделе, говоря о размерности топологических пространств, будем подразумевать вещественную размерность и использовать стандартные топологические обозначения (см., например, [5]).

Определим сначала топологическое пространство, диффеоморфное комплексному продолжению отдельного решения рассматриваемой задачи.

Пусть $S^1 \times S^1 = T^2$ - вещественный тор с периодическими координатами $\phi_1, \phi_2 \in (0, 2\pi)$. Вещественная часть траектории вложена в него как квазипериодическая обмотка $\Phi(\omega) = \{\phi_1 = \omega + \omega_1 t, \phi_2 = \omega_2 t\}$; здесь ω параметризует все вещественные решения на торе. Тогда комплексное продолжение этого решения лежит в пространстве $\Phi_{\mathbf{C}}(\omega) = \Phi \times \mathbf{R} \subset T^2 \times \mathbf{R}$, но не совпадает с ним, так как из него надо исключить особые точки. Множество особых точек имеет вид: $S_* = (S_1^1 \bigcup S_2^1) \times \mathbf{Z} \subset T^2 \times \mathbf{R}$, где $S_1^1 = \{\phi = 0\}, S_2^1 = \{\phi = \pi\}$. Выбирая любое множество из пары (S_1^1, S_2^1) и из пары ({четные числа }, {нечетные числа}) мы получаем четыре типа особых точек.

Предложение 3. *Комплексное продолжение траектории общего вида, лежащей на инвариантном торе, диффеоморфно* $\Xi(\omega) = \Phi_{\mathbf{C}}(\omega) \setminus S_*$.

Рассмотрим теперь как устроено вложение комплексного продолжения решения, имеющего размерность 2 и размерность замыкания - 3, в комплексное продолжение инвариантного тора, размерности 4.

Введем обозначение для объединения комплексных продолжений вещественных решений на торе: $\Xi_{\mathbf{C}} = \bigcup_{\omega} \Xi_{\mathbf{C}}(\omega)$. В пространстве параметров $\{\alpha_1, ..., \alpha_5\}$, инвариантному тору соответствует согласно (1.6) двумерная поверхность, диффеоморфная цилиндру $C = S^1 \times \mathbf{R}$, а отдельной вещественной траектории такого тора - совокупность окружностей $S^1 \times \mathbf{Z}$. При этом совокупность окружностей $S^1 \times \mathbf{Z} + \mu, 0 \le \mu \le 1$. соответствует комплексным торам комплексного продолжения вещественного тора. Декартово произведение $\Xi_{\mathbf{C}} \times I, I = [0,1]$, таким образом будет содержать все комплексные продолжения отдельных траекторий, лежащих на торе. Поскольку множества $\Xi_{\mathbf{C}}(\omega) \times \{0\}$ и $\Xi_{\mathbf{C}}(\omega) \times \{1\}$ соответствуют одному и тому же вещественному решению, то эти множества надо отождествить, но со сдвигом на единицу, чтобы топология склеенного пространства $T_{\mathbf{C}}$ допускала естественное отображение на пространство параметров. Итак, склейка задается по формуле: $i : T^2 \times \mathbf{R} \longrightarrow T^2 \times \mathbf{R}, i = id \times \{x \to x+1\}$, а $T_{\mathbf{C}} = (\Xi_{\mathbf{C}} \times I)/i, I = [0,1]$.

Теорема 2. *Аналитическое продолжение вещественного инвариантного тора диффеоморфно $T_{\mathbf{C}}$ и является расслоеным пространством с базой S^1, слоем $\Xi_{\mathbf{C}}$, и группой $\mathbf{Z}$, действующей на слое. Пространство $T_{\mathbf{C}}$ диффеоморфно вкладывается в $\bar{T}_{\mathbf{C}} = T^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$, причем множество $\bar{T}_{\mathbf{C}} \setminus T_{\mathbf{C}}$ диффеоморфно цилиндру C в пространстве, соответствующем рассматриваемому инвариантному тору.*

Замечание 3. *Дифференциальное многообразие $T_{\mathbf{C}}$ допускает введение структуры голоморфного многообразия и 4 линейно независимых коммутирующих векторных полей, соответствующих векторным полям $sgrad\mathbb{H}, isgrad\mathbb{H}, sgrad\mathbb{K}, isgrad\mathbb{K}$.*

Список литературы

[1] Belyaev *The factorization of the flow defined by the Euler–Poisson's equations* - Methods of Functional Analysis and Topology, **7**, (2001), No4, p.18-30.

[2] Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела.* Наука, Москва (1966), 314 с.

[3] Беляев А.В. *Асимптотика решений уравнений Эйлера - Пуассона в особых точках решений* Матем. физика. Анализ. Геометрия, **8**, (2001) No 2 , 1-15.

[4] Форстер Р. *Римановы поверхности* Мир, Москва, (1980), 248 с.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* Наука, Москва, (1979), 760 с.

Донецкий институт рынка и
социальной политики
Факультет социальной политики
б.Шевченко, 4
83050, Донецк, Украина