Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с.3-10.

ПРО ОЦІНКИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ВІДНОСНО ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ ОБЛАСТЯХ МАТРИЦІ ГРІНА ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $\overrightarrow{2b}$–ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

© Т.М. Балабушенко

Чернівці, Україна

При дослідженні властивостей розв'язків параболічних систем у необмежених відносно часової змінної t областях важливу роль відіграють оцінки в цих областях фундаментальних матриць розв'язків (ФМР) задачі Коші. С.Д. Ейдельманом в [1] при дослідженні параболічних за Петровським систем першого порядку за t були введені так звані Л-умови. Вони полягали в тому, що для ФМР задачі Коші справджувались оцінки в необмежених інтервалах зміни t, оцінні функції з яких прямували до нуля при прямуванні t до нескінченності. Дослідження в цьому напрямку продовжувались у працях [2—4], а в [5, 6] такого типу умови були введені для параболічних за Петровським систем довільного порядку за t.

У 1960 р. С.Д. Ейдельман [7] виділив і розпочав досліджувати новий клас систем — клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. У цих системах кожна просторова змінна може мати свою вагу стосовно змінної t. Теорії $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем присвячена фундаментальна праця [8], але в ній дослідження властивостей розв'язків у необмежених відносно t областях не проводилось.

У даній статті для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку за t вводяться $\Lambda_d^{m,r}$-умови, які є певним аналогом $\Lambda_m^{\pm}$-умов С.Д. Ейдельмана [4]. Ці умови виділяють значно ширші класи систем, ніж ті, що розглядались раніше. ФМР задачі Коші для таких систем можуть бути не нескінченно диференційовними, а оцінні функції з відповідних оцінок не завжди є нескінченно малими при прямуванні t до нескінченності. Наводяться приклади систем, які задовольняють $\Lambda_d^{m,r}$-умови, та деякі застосування оцінок з цих умов до доведення теорем про стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку задачі Коші і теорем типу Ліувілля.

1. Користуватимемось такими позначеннями: $n, s, b_1, ..., b_n, n_1, ..., n_s$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, ..., 2b_n)$; B – найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_n$; $m_j \equiv B/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, ..., n\}$; $\|k\| \equiv m_1k_1 + ... + m_nk_n$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n)$ – мультиіндекс; $H_1 \equiv (0, \infty)$, $H_2 \equiv (-\infty, T)$, T – задане число з $\mathbb{R}$; $\Pi_m \equiv \{(t,x) | t \in H_m, x \in \mathbb{R}^n\}$, $m \in \{1,2\}$; δ_{lj} – символ Кронекера; i – уявна одиниця.

Розглянемо рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему s рівнянь

$$\sum_{j=1}^{s} A_{lj}(t, x, \partial_t, \partial_x)u_j(t,x) = f_l(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \quad l \in \{1, ..., s\}, \tag{1}$$

де

$$A_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x) \equiv \delta_{lj}\partial_t^{n_j} - \sum_{2Bk_0+\|k\|\le 2Bn_j} a_{k_0k}^{lj}(t,x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k, \quad m\in\{1,2\}.$$

Як відомо [4,7], під фундаментальною матрицею розв'язків (ФМР) задачі Коші для системи (1) розуміється квадратна матриця $Z(t,x;\tau,\xi) \equiv (Z_{lj}(t,x;\tau,\xi))_{l,j=1}^s$, $\tau < t$, $\{t,\tau\} \subset H_m$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що функції

$$u_l(t,x) = \sum_{j=1}^s \int_{\mathbb{R}^n} Z_{lj}(t,x;\tau,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_m, \quad l\in\{1,...,s\},$$

є компонентами розв'язку однорідної системи (1) $(f_l = 0, l \in \{1,...,s\})$, який задовольняє умови

$$\partial_t^{\mu-1}u_l(t,x)\Big|_{t=\tau} = \delta_{\mu n_l}\varphi_l(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \mu\in\{1,...,n_l\}, \quad l\in\{1,...,s\}, \qquad (2)$$

для будь-якого $\tau \in H_m$ та довільних гладких і фінітних функцій $\varphi_l, l\in\{1,...,s\}$.

Розглянемо загальніші, ніж (2), початкові умови

$$\partial_t^{\mu-1}u_l(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi_l^\mu(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \mu\in\{1,...,n_l\}, \quad l\in\{1,...,s\}. \qquad (3)$$

Згідно з [9] матрицею Гріна задачі Коші для системи (1) називатимемо матрицю $G \equiv (G_0, G_1, ..., G_s)$, $G_0 \equiv (G_0^{lj})_{l,j=1}^s$, $G_j \equiv (G_j^{l\mu})_{l=1,\mu=1}^{s,n_j}$, $j\in\{1,...,s\}$, таку, що компоненти розв'язку $u = (u_1,...,u_s)'$ задачі (1), (3) в області $\Pi_{m,\tau} \equiv \Pi_m \cap \{t>\tau\}$ зображуються у вигляді

$$u_l(t,x) = \sum_{j=1}^s \left(\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{lj}(t,x;\beta,\xi)f_j(\beta,\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{n_j} \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{l\mu}(t,x;\tau,\xi)\varphi_j^\mu(\xi)d\xi \right), \quad (t,x)\in\Pi_{m,\tau}, \quad l\in\{1,...,s\}, \qquad (4)$$

для будь-якого $\tau\in H_m$ та довільних гладких і фінітних функцій f_j, φ_j^μ.

Нехай в кожному шарі $\Pi_{m,[\gamma,S]} \equiv \Pi_m \cap \{\gamma \le t \le S\}$, $\gamma < S$, $\{\gamma, S\} \subset \bar{H}_m$, система (1) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна, її коефіцієнти разом з похідними вигляду $\partial_t^{k_0}\partial_x^k a_{k_0k}^{lj}$, $2Bk_0 + \|k\| \le 2Bn_j$, неперервні за t, обмежені й задовольняють рівномірну умову Гельдера за x, причому неперервність за t коефіцієнтів $a_{k_0k}^{lj}$, $2Bk_0 + \|k\| = 2Bn_j$, рівномірна щодо $x\in\mathbb{R}^n$. Тоді із результатів праць [7—9] випливає, що для системи (1) існує ФМР Z і елементи матриці Гріна G задачі Коші визначаються формулами

$$G_0(t,x;\tau,\xi) = Z(t,x;\tau,\xi),$$

$$G_j^{l\mu}(t,x;\tau,\xi) \equiv \sum_{p=1}^{s}\Bigg(\delta_{pj}(-\partial_\beta)^{n_j-\mu}Z_{lp}(t,x;\beta,\xi) - \theta(n_j-\mu-1)\times$$

$$\times \sum_{\substack{2Bk_0+\|k\|\le 2B(n_j-\mu)\\ k_0<n_j-\mu}} (-\partial_\beta)^{k_0}(-\partial_\xi)^k(Z_{lp}(t,x;\beta,\xi)a^{pj}_{k_0+\mu,k}(\beta,\xi))\Bigg)\Bigg|_{\beta=\tau},$$

$$\{t,\tau\}\subset H_m,\quad \tau<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \mu\in\{1,...,n_j\},\quad \{l,j\}\subset\{1,...,s\},\qquad (5)$$

де θ — функція Хевісайда.

Одержані в названих працях оцінки ФМР дають можливість за допомогою формул (5) одержати оцінки елементів матриці Гріна G в кожному шарі $\Pi_{m,[\gamma,S]}$. Нас цікавлять оцінки в усій області Π_m.

ОЗНАЧЕННЯ 1. *Система (1) задовольняє* $\Lambda_d^{m,r}$ *-умову,* $d\in\mathbb{R}$, $m\in\{1,2\}$, $r\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$, *якщо для її матриці Гріна задачі Коші* $G\equiv(G_0,G_1,...,G_s)$ *існують похідні* $\partial_t^{k_0}\partial_x^k G$, $2Bk_0+\|k\|\le r$, *і правильні оцінки*

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi)| \le C\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu-2b_\nu k_0+p_{0\nu}^{lj}(t-\tau)}\times$$

$$\times\exp\left\{d(t-\tau)-c\sum_{\nu=1}^{n}(|x_\nu-\xi_\nu|/\alpha_\nu(t-\tau))^{q_\nu}\right\},$$

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_j^{l\mu}(t,x;\tau,\xi)| \le C\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu-2b_\nu k_0+p_{j\nu}^{l\mu}(t-\tau)}\times$$

$$\times\exp\left\{d(t-\tau)-c\sum_{\nu=1}^{n}(|x_\nu-\xi_\nu|/\alpha_\nu(t-\tau))^{q_\nu}\right\},$$

$$\{t,\tau\}\subset H_m,\quad \tau<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 2Bk_0+\|k\|\le r,$$

$$\mu\in\{1,...,n_j\},\quad \{l,j\}\subset\{1,...,s\},\qquad (6)$$

де $\alpha_\nu, \nu\in\{1,...,n\}$, *— невід'ємні неспадні функції такі, що* $\alpha_\nu(0)=0$ *і* $\alpha_\nu(t)\to\infty$ *при* $t\to\infty$, *а* $p_{0\nu}^{lj}$ *і* $p_{j\nu}^{l\mu}$ *— деякі кусково-сталі функції.*

Оцінки (6) називатимемо $\Lambda_d^{m,r}$ *-оцінками матриці Гріна задачі Коші.*

2. Наведемо декілька прикладів класів систем, які задовольняють $\Lambda_d^{m,r}$ -умови. Ці класи є узагальненням відповідних класів параболічних за Петровським систем, які розглянуті в [6].

ТВЕРДЖЕННЯ 1. *Нехай* $m\in\{1,2\}$ *і система зі сталими коефіцієнтами*

$$\sum_{j=1}^{s}A_{lj}^0(\partial_t,\partial_x)u_j(t,x)=f_l(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_m,\quad l\in\{1,...,s\},\qquad (7)$$

де
$$A^0_{lj}(\partial_t,\partial_x)\equiv\delta_{lj}\partial_t^{n_j}-\sum_{2Bk_0+\|k\|=2Bn_j}a^{lj}_{k_0k}\partial_t^{k_0}\partial_x^k,$$

$\overrightarrow{2b}$ *-параболічна. Тоді ця система задовольняє* $\Lambda_0^{m,\infty}$ *-умову з* $\alpha_\nu(t)=t^{1/(2b_\nu)}$, $p^{lj}_{0\nu}(t)=2b_\nu(n_l-1)$ *і* $p^{l\mu}_{j\nu}(t)=2b_\nu(n_l-n_j+\mu-1)$, $t>0$, $\nu\in\{1,...,n\}$, $\mu\in\{1,...,n_j\}$, $\{l,j\}\subset\{1,...,s\}$.

Твердження 2. *Розглянемо* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічну систему зі сталими коефіцієнтами*
$$\sum_{j=1}^{s}A_{lj}(\partial_t,\partial_x)u_j(t,x)=f_l(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{8}$$

де
$$A_{lj}(\partial_t,\partial_x)\equiv\delta_{lj}\partial_t^{n_j}-\sum_{2Bk_0+\|k\|\le 2Bn_j}a^{lj}_{k_0k}\partial_t^{k_0}\partial_x^k,$$

і $m\in\{1,2\}$. *Нехай система (8) задовольняє таку умову: дійсні частини* λ*-коренів рівняння*
$$\det((A_{lj}(\lambda,i\sigma))^s_{l,j=1})=0$$

не дорівнюють нулеві для всіх $\sigma\in\mathbb{R}^n$. *Тоді система (8) задовольняє* $\Lambda_d^{m,\infty}$ *-умову з* $d<0$, $\alpha_\nu(t)=t^{1/(2b_\nu)}$, $p^{lj}_{0\nu}(t)=2b_\nu(n_l-1)$, $t>0$, *і*
$$p^{l\mu}_{j\nu}(t)=\begin{cases}2b_\nu(n_l-n_j+\mu-1), & t\le 1,\\ 2b_\nu(n_l-1), & t>1,\end{cases}$$
$$\nu\in\{1,...,n\},\quad \mu\in\{1,...,n_j\},\quad \{l,j\}\subset\{1,...,s\}.$$

Доведення тверджень 1 і 2 грунтується на одержанні оцінок ФМР Z та використанні формул (5).

Твердження 3. *Розглянемо* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічну систему зі сталими коефіцієнтами полікалоричного типу*
$$P^h(\partial_t,\partial_x)u(t,x)\equiv\left(I\partial_t-\sum_{2b_0\le\|k\|\le 2B}a_k\partial_x^k\right)^h u(t,x)=f(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi_m, \tag{9}$$

де h *і* b_0 *— задані натуральні числа, причому* $h\ge 2$ *і* $b_0\le B$, I *— одинична і* a_k *— квадратна матриці порядку* s, $m\in\{1,2\}$. *Нехай виконуються такі умови:*

а) дійсні частини λ*-коренів рівняння* $\det P(\lambda,i\sigma)=0$ *дорівнюють нулеві лише при* $\sigma=0$;

б) дійсні частини λ *-коренів рівняння* $\det\left(\sum\limits_{\|k\|=2b_0} a_k(i\sigma)^k - \lambda I\right) = 0$ *не дорівнюють нульові для будь-яких* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ *таких, що* $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j} = 1$.

Тоді система (9) задовольняє $\Lambda_0^{m,\infty}$ *-умову з* $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $t \le 1$; $\alpha_\nu(t) = t^{m_\nu/(2b_0)}$, $t > 1$; $p_{0\nu}^{lj}(t) = 2b_\nu(h-1)$, $t \le 1$; $p_{0\nu}^{lj}(t) = 2b_0(h-1)$, $t > 1$; $p_{j\nu}^{l\mu}(t) = 2b_\nu(\mu-1)$, $t \le 1$; $p_{j\nu}^{l\mu}(t) = 2b_0(\mu-1)$, $t > 1$; $\nu \in \{1,...,n\}$, $\mu \in \{1,...,h\}$, $\{l,j\} \subset \{1,...,s\}$.

Оскільки ФМР задачі Коші для системи (9) і системи $P(\partial_t,\partial_x)u = f$ Z і Z_0 пов'язані рівністю

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \frac{(t-\tau)^{h-1}}{(h-1)!} Z_0(t,x;\tau,\xi), \quad \tau < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

то, використовуючи відомі з [10] оцінки для Z_0 , одержуються відповідні оцінки для Z і G .

Аналогічно доводиться і наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічна система*

$$P^h(\partial_t,\partial_x)u(t,x) \equiv \left(I\partial_t - \sum_{\|k\|\le 2B} a_k \partial_x^k\right)^h u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi_m, \tag{10}$$

задовольняє умову: дійсні частини λ *-коренів рівняння* $\det P(\lambda, i\sigma) = 0$ *не дорівнюють нульові для всіх* $\sigma \in \mathbb{R}^n$. *Тоді система (10) задовольняє* $\Lambda_d^{m,\infty}$ *-умову з* $d < 0$; $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $p_{0\nu}^{lj}(t) = 2b_\nu(h-1)$, $t > 0$; $p_{j\nu}^{l\mu}(t) = 2b_\nu(\mu-1)$, $t \le 1$; $p_{j\nu}^{l\mu}(t) = 2b_\nu(h-1)$, $t > 1$; $\nu \in \{1,...,n\}$, $\mu \in \{1,...,h\}$, $\{l,j\} \subset \{1,...,s\}$.

3. Наведемо приклади застосувань оцінок з $\Lambda_d^{m,r}$ -умов до доведення теорем про стійкість та теорем типу Ліувілля.

Введемо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \equiv \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p \exp\left\{-p\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu |x_\nu|\right\} dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left(|u(t,x)| \exp\left\{-\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu |x_\nu|\right\}\right), & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай E — деякий клас єдиності розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$ -параболічної системи зі сталими коефіцієнтами

$$\partial_t^h u(t,x) - \sum_{2Bk_0+\|k\|=2Bh} a_{k_0 k} \partial_t^{k_0} \partial_x^k u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_1. \tag{11}$$

ОЗНАЧЕННЯ 2. *Нульовий розв'язок системи називається $E_{p,\eta}$-стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку u з класу E, який задовольняє умову $\|\partial_t^{\mu-1}u(0,\cdot)\|_{p,\eta} \le \delta$, $\mu \in \{1,...,h\}$, правильна оцінка $\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \le \varepsilon$ для всіх $t > 0$.*

Нульовий розв'язок системи називається асимптотично $E_{p,\eta}$-стійким, якщо він $E_{p,\eta}$-стійкий і $\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \to 0$ при $t \to \infty$.

Позначимо через E^1 підклас класу E, який складається з тих функцій $u \in E$, які мають наступну властивість. Для кожного $\mu \in \{1,...,h\}$ рівняння

$$\sum_{\nu=1}^{n} \partial_{x_\nu}^{2b_\nu(\mu-1)}\psi^\mu(x) = \varphi^\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

має розв'язок ψ^μ, для якого скінченна норма $\|\psi^\mu\|_{p,\eta}$ і правильна оцінка $\|\psi^\mu\|_{p,\eta} \le C\|\varphi^\mu\|_{p,\eta}$, де $\varphi^\mu(x) = \partial_t^{\mu-1}u(t,x)\Big|_{t=0}$.

Згідно з твердженням 1, для системи (11) виконується $\Lambda_0^{1,\infty}$-умова. Використовуючи властивості розв'язків з класу E^1, можна довести наступну теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Нульовий розв'язок системи (11) є $E^1_{p,0}$-стійким.*

Нехай E — клас єдиності розв'язків задачі Коші для системи

$$\partial_t^{n_l}u_l(t,x) - \sum_{j=1}^{s} \sum_{2Bk_0+\|k\|\le 2Bn_j} a_{k_0k}^{lj}\partial_t^{k_0}\partial_x^k u_j(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_1, \quad l \in \{1,...,s\}. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 2. *Нехай система (12) належить до класу, визначеного у твердженні 2. Тоді її нульовий розв'язок є асимптотично $E_{p,\eta}$-стійким з $p \in [1,\infty]$ і η_ν, $\nu \in \{1,...,n\}$, такими, що $0 \le \eta_\nu < (2b_\nu)^{1/(2b_\nu)}((c-c_0)q_\nu/2)^{q_\nu}$, де $c_0 \in (0,c)$, стала c — з $\Lambda_d^{1,\infty}$-оцінки.*

Доведення теореми грунтується на використанні $\Lambda_d^{1,\infty}$-умови з $d < 0$ із твердження 2 та відомої нерівності Гельдера.

Для систем, які задовольняють $\Lambda_d^{2,\infty}$-умови, можна довести такі теореми типу Ліувілля.

ТЕОРЕМА 3. *Якщо класичний в Π_2 розв'язок u однорідної системи (7) з твердження 1 задовольняє умови*

$$|\partial_t^{\mu-1}u_l(t,x)| \le C\prod_{\nu=1}^{n}(1+|x_\nu|)^{\beta_\nu},$$

$$(t,x) \in \Pi_2, \quad \mu \in \{1,...,n_l\}, \quad l \in \{1,...,s\}, \tag{13}$$

де $\beta_\nu \ge 0$, $\nu \in \{1,...,n\}$, то кожна компонента u_l розв'язку u як функція x_ν є многочленом по x_ν степеня, не вищого $[\beta_\nu]$.

Теорема 4. *Нехай однорідна* $(f = 0)$ *система (9) належить до класу, визначеного у твердженні 3. Тоді якщо для класичного розв'язку* u *в* Π_2 *системи правильні оцінки (13), то він є многочленом по* x_ν *степеня, не вищого* $[\beta_\nu]$.

Теорема 5. *Нехай система (8) належить до класу, визначеного у твердженні 2, а розв'язок* u *цієї системи задовольняє для деяких* $h_\nu \in [1, q_\nu)$, $\nu \in \{1, ..., n\}$ *оцінки*

$$|\partial_t^{\mu-1} u_l(t,x)| \le \psi(t) \exp\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu |x_\nu|^{h_\nu} \right\},$$

$$(t,x) \in \Pi_2, \quad \mu \in \{1, ..., n_l\}, \quad l \in \{1, ..., s\}, \tag{14}$$

де $\gamma_\nu > 0$, $\nu \in \{1, ..., n\}$, *а функція* ψ *така, що для всіх* $l \in \{1, ..., s\}$, $\nu \in \{1, ..., n\}$

$$\psi(t_0)(t-t_0)^{n_l - 1} \exp\left\{ d(t-t_0) + \left(\frac{\delta \gamma_\nu h_\nu}{c_0 q_\nu} \right)^{\frac{h_\nu}{q_\nu - h_\nu}} \delta \gamma_\nu \frac{q_\nu - h_\nu}{q_\nu} \times \right.$$

$$\left. \times (t-t_0)^{\frac{h_\nu q_\nu}{2b_\nu (q_\nu - h_\nu)}} \right\} \to 0, \quad t_0 \to -\infty.$$

Тут $\delta = 1$ *при* $h_\nu = 1$, $\delta = 2^{h_\nu}$ *при* $h_\nu > 1$, $\nu \in \{1, ..., n\}$, $c_0 \in (0, c)$, c *і* d — *сталі з* $\Lambda_d^{2,\infty}$ *-умови,* $d < 0$.

Тоді такий розв'язок є нульовим.

Теореми 3—5 доводяться з використанням $\Lambda_d^{2,\infty}$ -умов та додаткових умов, зазначених у теоремах.

Список літератури

1. Эйдельман С.Д., *Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения*, Мат. сб. **33** (1953), no. 2, 359—382.
2. Эйдельман С.Д., *О фундаментальных решениях параболических систем*, Мат. сб. **38** (1956), no. 1, 51—92.
3. Эйдельман С.Д., *Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем*, Мат. сб. **44** (1958), no. 4, 481—508.
4. Эйдельман С.Д., *Параболические системы*, М.: Наука, 1964, pp. 443.
5. Івасишин Л.М., *Оцінка матриць Гріна задачі Коші для загальних параболічних за Петровським систем у півпросторі* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *та їх застосування*, Всеукр. наук. конф. "Нові підходи до застосування диференціальних рівнянь" (15—19 вересня 1997 р., м.Дрогобич): Тези доп., Київ (1997), 50.
6. Івасишин Л.М., *Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі* $\mathbb{R}_+^{n+1}$, Доп. НАН України (1998), no. 1, 17—23.
7. Эйдельман С.Д., *Об одном классе параболических систем*, Докл. АН СССР **133** (1960), no. 1, 40—43.
8. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д., $\overrightarrow{2b}$ *-параболические системы*, Труды семинара по функ. анализу (1968), no. 1, Киев: Ин-т математики АН УССР, 3—175.
9. Івасишен С.Д., Кондур О.С., *Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем довільного порядку*, Мат. студії **14** (2000), no. 1, 73—84.

10. Балабушенко Т.М., *Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування*, Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка", no.411. Прикладна математика (2000), Львів, 6—11.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2,
м.Чернівці, 58012, Україна
E-mail address: mathmod@chnu.cv.ua