

©2004. М.А. Кулиев

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

При помощи метода Фурье исследуется обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестными коэффициентами зависящими от времени.

Под обратной краевой задачей для дифференциального уравнения понимается задача, в которой наряду с решением данного дифференциального уравнения ищутся его коэффициенты и правая часть по некоторым дополнительным данным. Исследованиям таких обратных задач посвящены работы [1]-[7].

В данной работе, дополнительные условия заданы в виде $u_i(x, t) = h_i(t)$ ($i = 1, 2$) и с помощью метода Фурье исследуется классическое решение обратной задачи.

Предполагается, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнения зависят только от аргумента t .

В работе рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Lu(x, t) = a(t)b(x, t)u(x, t) + f(t)F(x, t), x(t) \in \overline{Q_T} \equiv \overline{\Omega} \times [0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T \equiv S \times [0, T], \quad (3)$$

$$u(x, t) = h_i(t) \quad (i = 1, 2), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где $0 < T < +\infty$; Ω – произвольная ограниченная n -мерная область, S – граница области Ω , Γ_T – боковая поверхность цилиндра Q_T , x_i ($i = 1, 2$) – различные фиксированные точки в Ω , а оператор L имеет вид:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - c(x)u,$$

причем всюду на $\overline{\Omega}$ функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $C(x) \geq 0$ измеримы и ограничены и $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ($\mu = const > 0$), ξ_i ($i = \overline{1, n}$) – любые действительные числа.

Как известно, оператор L имеет счетную систему собственных чисел $0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \dots \geq -\lambda_k^2 \geq \dots$ ($0 < \lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$) и каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно независимых обобщенных собственных функций (см. [8], п.5, гл. 1, ст. 44).

Функции $\varphi(x)$, $b(x, t)$, $F(x, t)$ и $h_i(t)$ ($i = 1, 2$) – заданные, а $a(t)$, $f(t)$, $u(x, t)$ – искомые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройку $\{u(x, t)a(t), f(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$, $f(t)$ назовем классическим решением задачи (1)-(4), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $u(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные u_t, u_{x_i} , ($i = \overline{1, n}$), $u_{x_i x_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) в Q_T .

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

2. Функции $a(t)$ и $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$.
 3. Условия (1)-(4) удовлетворяются в классическом смысле.
- С целью исследования задачи (1)-(4) введем следующие пространства.

1. Обозначим через $B_{2,T}^\alpha$ совокупность всех функций вида $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)v_k(x)$, рассматриваемых в $\overline{Q_T}$, где функции $u_k(t) (k = 1, 2, \dots)$ непрерывны на $[0, T]$ и

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \max_{0 \leq t \leq T} |u_k(t)| \right)^2 \right\}^{1/2} \equiv J_T(u) < +\infty.$$

Здесь $\alpha \geq 0$, $-\lambda_k^2$ и $v_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ – собственные значения и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщенные собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора L в Ω . Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно, что все эти пространства банаховы (см. [9]).

2. Через E_T обозначим множество $B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3} \times (C[0, T])^2$ с нормой

$$\|(u, a, f)\|_{E_T} = \|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \|a\|_{C[0, T]} + \|f\|_{C[0, T]}.$$

Очевидно, что E_T – банахово пространство. Предположим, что $a_{ij}(x) (i, j = \overline{1, n})$, $c(x)$, $b(x, t)$, $\varphi(x)$, $F(x, t)$ и $h_i(t) (i = 1, 2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $a_{ij}(x) (i, j = \overline{1, n})$ $[\frac{n}{2}] + 2$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
2. $S \in C^{[\frac{n}{2}]+2}$.
3. Собственные функции $v_k(x)$ оператора L при граничном условии $v_k|_S = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) $[\frac{n}{2}] + 3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ (для этого достаточно, чтобы функции $a_{ij}(i, j = \overline{1, n})$ были $2[\frac{n}{2}] + 4$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$, функция $c(x)$ была $2[\frac{n}{2}] + 3$ раза непрерывно дифференцируема на $\overline{\Omega}$ и $S \in C^{2[\frac{n}{2}]+5}$, ибо при этих условиях собственные функции $v_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ оператора L принадлежат $W_2^{2[\frac{n}{2}]+4}(\Omega)$ (см. [8], гл. 1, п. 5, с. 47); следовательно, по теореме С.Л. Соболева, $v_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ $[\frac{n}{2}] + 3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$).
4. Функция $\varphi(x) \in W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)$, $\varphi(x)|_S = L\varphi(x)|_S = \dots = L^{[\frac{n}{4}]+1}\varphi(x)|_S = 0$.
5. $\frac{\partial^i b(x, t)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} (i = \overline{0, [\frac{n}{2}] + 2}) \in C(\overline{Q_T})$ и $\frac{\partial^j b(x, t)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} = 0 (t \in [0, T], x \in S; j = \overline{0, 2[\frac{n+2}{4}]})$.
6. Функция

$$F(x, t) \in W_{x, t, 2}^{[\frac{n}{2}]+2, 0}(Q_T), F(x, t)|_{\Gamma_T} = LF(x, t)|_{\Gamma_T} = \dots = L^{[\frac{n+2}{4}]}F(x, t)|_{\Gamma_T} = 0.$$

7. Функции $h_i(t) (i = 1, 2)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, $\forall t \in [0, T]$ $h_i(t) \neq 0 (i = 1, 2)$ и $h_i(0) = \varphi(x_i) (i = 1, 2)$.

8. $\Delta(t) \equiv b(x, t) h_1(t) F(x_2, t) - b(x_2, t) h_2(t) F(x_1, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

В работе существование классического решения обратной задачи доказывается методом Фурье, причем для существования классического решения задачи (1)-(3) на данные функции $a_{ij}(x) (i, j = \overline{1, n})$, $c(x)$, $b(x, t)$, $\varphi(x)$, $F(x, t)$ и на поверхность S накладываются условия 1-6 (см. [12]).

При выполнении условий 1-6, применяя метод Фурье и учитывая условия (4), решение задачи (1)-(4) сведено к решению следующей эквивалентной системы интегральных уравнений (см. [7]):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} [a(\tau) b(\xi, \tau) u(\xi, \tau) + f(\tau) F(\xi, \tau)] e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} v_k(\xi) d\xi d\tau v_k(x), \quad (5)$$

$$a(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \{F(x_2, t) \Phi_1(u, a, f; t) - F(x_1, t) \Phi_2(u, a, f; t)\}, \quad (6)$$

$$f(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \{b(x_1, t) h_1(t) \Phi_2(u, a, f; t) - b(x_2, t) h_2(t) \Phi_1(u, a, f; t)\}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_i(u, a, f; t) &= h'_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_i) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^1 \int_{\Omega} [a(\tau) b(\xi, \tau) u(\xi, \tau) + f(\tau) F(\xi, \tau)] e^{-\lambda_k^2 t} v_k(\xi) d\xi d\tau v_k(x_i) \quad (i = 1, 2), \\ \varphi_k &= \int_{\Omega} \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия 1-8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Запишем систему (5)-(7) в виде:

$$z = G(z),$$

где $z = \{u(x, t), a(t), f(t)\}$, $G(z) = \{G_1(z), G_2(z), G_3(z)\}$, причем компоненты $G_i(u, a, f)$ ($i = \overline{1, 3}$) оператора $G(u, a, f)$ определены правыми частями уравнений (5)-(7). Рассмотрим оператор $G(u, a, f)$ в шаре $K_R (\|z\|_{E_T} \leq R)$ пространства E_T , где

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \|\varphi(x)\|_{W_2^{[\frac{n}{4}]+3}(\Omega)} + \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)|} \left\{ (\|F(x_2, t)\|_{C[0, T]} + \right. \\ &+ \|b(x_2, t)\|_{C[0, T]} \|h_2(t)\|_{C[0, T]}) \|h'_1\|_{C[0, T]} + \\ &+ (\|F(x_1, t)\|_{C[0, T]} + \|b(x_1, t)\|_{C[0, T]} \|h_1(t)\|_{C[0, T]}) \|h'_2\|_{C[0, T]} + \\ &+ (\|F(x_2, t)\|_{C[0, T]} + \|b(x_2, t)\|_{C[0, T]} \|h_2(t)\|_{C[0, T]}) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} + \\ &+ (\|F(x_1, t)\|_{C[0, T]} + \|b(x_1, t)\|_{C[0, T]} \|h_1(t)\|_{C[0, T]}) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} \equiv M < R. \end{aligned}$$

Тогда для любого $(u, a, f) \in K_R$ применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая условия 1-8, имеем:

$$\|G_1(u, a, f)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{4}]+3}}^2 + \begin{cases} 2 \int_0^T \int_{\Omega} [L^{r+1} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau))]^2 d\xi d\tau & \text{при } n = 4r, 4r + 1, \\ 2 \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi) \frac{\partial L^{r+1} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau))}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial L^{r+1} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau))}{\partial \xi_j} + \right. \\ \left. + C(\xi) [L^{r+1} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau))]^2 \right\} d\xi d\tau & \text{при } n = 4r + 2, 4r + 3, \end{cases}$$

$$\|G_2(u, a, f)\|_{C[0,T]} \leq \|W_2(x, t)\|_{C[0,T]} + \|K_1(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left[\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+2} \int_{\Omega} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau)) v_k(\xi) d\xi \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}. \quad (9)$$

$$\|G_3(u, a, f)\|_{C[0,T]} \leq \|W_3(x, t)\|_{C[0,T]} + \|K_2(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left[\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+2} \int_{\Omega} \mathbf{F}(u(\xi, \tau), a(\tau), f(\tau)) v_k(\xi) d\xi \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

где

$$W_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x),$$

$$W_2(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left\{ F(x_2, t) \left(h_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_1) \right) - F(x_1, t) \left(h_2'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_2) \right) \right\},$$

$$W_3(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left\{ b(x_1, t) h_1(t) \left(h_2' + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_2) \right) - b(x_2, t) h_2(t) \left(h_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_1) \right) \right\},$$

$$K_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left[F(x_1, t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} - F(x_2, t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} \right],$$

$$K_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left[b(x_1, t) h_2(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} - b(x_2, t) h_1(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} \right],$$

$$\mathbf{F}(u(x, t), a(t), f(t)) = a(t)b(x, t)u(x, t) + f(t)F(x, t).$$

Из (8)-(10) получаем

$$\|G_1(u, a, f)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} \leq \|W_1(x, t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \sqrt{2}c_1 \|\mathbf{F}(u(x, t), a(t), f(t))\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)}, \quad (11)$$

$$\|G_2(u, a, f)\|_{C[0,T]} \leq \|W_2(x, t)\|_{C[0,T]} + c_2 \|K_1(t)\|_{C[0,T]} \|\mathbf{F}(u(x, t), a(t), f(t))\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{4}]+2,0}(Q_T)}, \quad (12)$$

$$\|G_3(u, a, f)\|_{C[0,T]} \leq \|W_3(x, t)\|_{C[0,T]} + c_3 \|K_2(t)\|_{C[0,T]} \|\mathbf{F}(u(x, t), a(t), f(t))\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{4}]+2,0}(Q_T)}, \quad (13)$$

где

$$\|W_1(x, t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{[\frac{n}{2}]+3} \varphi_k \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{D(L^{r+1}\varphi)} \right) & \text{при } n = 4r, 4r + 1, \\ C \|L^{r+1}\varphi\|_{L,2(\Omega)} & \text{при } n = 4r + 2, 4r + 3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|W_2(x, t)\|_{C[0,T]} &\leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)|} \left\{ \|F(x_2, t)\|_{C[0,T]} \cdot \|h_1'(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ \|F(x_1, t)\|_{C[0,T]} \|h_2'(t)\|_{C[0,T]} + \left[\|F(x_2, t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. \left. + \|F(x_1, t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \|\varphi\|_{W_2^{[\frac{n}{4}]+2}(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|W_3(x, t)\|_{C[0,T]} &\leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)|} \left\{ \|b(x_1, t)\|_{C[0,T]} \cdot \|h_1(t)\|_{C[0,T]} \|h_2'(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ \|b(x_2, t)\|_{C[0,T]} \|h_2(t)\|_{C[0,T]} \|h_1'(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \left[\|b(x_1, t)\|_{C[0,T]} \|h_1(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. \left. + \|b(x_2, t)\|_{C[0,T]} \|h_2(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \|\varphi\|_{W_2^{[\frac{n}{4}]+2}(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|K_1(t)\|_{C[0,T]} &\leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)|} \left\{ \|F(x_1, t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. + \|F(x_2, t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|K_2(t)\|_{C[0,T]} &\leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq T} |\Delta(t)|} \left\{ \|b(x_2, t)\|_{C[0,T]} \|h_2(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. + \|b(x_1, t)\|_{C[0,T]} \|h_1(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

$C > 0$, $c_i > 0$ ($i = \overline{1, 3}$) – некоторые постоянные, а

$$D(z) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} + cz^2 \right\} dx.$$

Из работы [10] следует, что при условиях данной теоремы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\lambda_k^{\frac{[n]}{2}+1}}$ при $x \in \overline{\Omega}$ равномерно сходится.

Тогда, из (11)-(13) получаем, что $\forall u, a, f \in E_T$:

$$\begin{aligned} \|G(u, a, f)\|_{E_T} &\leq \|W_1(x, t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \|W_2(x, t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \|W_3(x, t)\|_{C[0,T]} + C_4 \|\mathbf{F}(u(x, \tau), a(t), f(t))\|_{W_{x,\tau,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $C_4 > 0$ – некоторая постоянная.

Пользуясь теоремами вложения С.Л. Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$ для любых $u \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\left\| \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C_5 \|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} \quad \left(i = \overline{0, [\frac{n}{2}]+3} \right), \quad (15)$$

где $C_5 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от u и t .

Пользуясь оценкой (15), из (14) получаем что, $\forall u, a, f \in K_R$:

$$\|G(u, a, f)\|_{E_T} \leq \|W_1(x, t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \|W_2(x, t)\|_{C[0,T]} + \|W_3(x, t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{T} C_R, \quad (16)$$

где $C_R > 0$ – некоторая число, зависящее от R .

Далее, аналогично (16), $\forall (u, a, f), (\tilde{u}, \tilde{a}, \tilde{f}) \in K_R$ имеем:

$$\|G(u, a, f) - G(\tilde{u}, \tilde{a}, \tilde{f})\|_{E_T} \leq C\sqrt{T} \|\mathbf{F}(u, a, f) - \mathbf{F}(\tilde{u}, \tilde{a}, \tilde{f})\|_{W_{x,\tau,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)}. \quad (17)$$

Теперь, пользуясь оценкой (15) (в которой вместо u нужно иметь в виду $u - \tilde{u}$), из (16) получаем, что $\forall (u, a, f), (\tilde{u}, \tilde{a}, \tilde{f}) \in K_R$:

$$\|G(u, a, f) - G(\tilde{u}, \tilde{a}, \tilde{f})\|_{E_T} \leq \tilde{C}_R \sqrt{T} \left[\|u - \tilde{u}\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \|a - \tilde{a}\|_{C[0,T]} + \|f - \tilde{f}\|_{C[0,T]} \right], \quad (18)$$

где $\tilde{C}_R > 0$ – некоторое число, зависящее от R .

Из неравенств (16) и (18) видно, что при достаточно малых значениях T оператор G является в шаре K_R оператором сжатия, и, следовательно, имеет в шаре K_R единственную неподвижную точку $(u(x, t), a(t), f(t))$, следовательно

$$u(x, t) = W_1(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} [a(\tau)b(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\tau)F(\xi, \tau)] e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} v_k(\xi) d\xi d\tau \cdot v_k(x),$$

$$a(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \{F(x_2, t)\Phi_1(u, a, f; t) - F(x_1, t)\Phi_2(u, a, f; t)\},$$

$$f(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \{b(x_1, t)h_1(t)\Phi_2(u, a, f; t) - b(x_2, t)h_2(t)\Phi_1(u, a, f; t)\}.$$

Таким образом, функции $u(x, t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$, $a(t)$, $f(t)$ удовлетворяют на $[0, T]$ системе (5)-(7).

Теперь покажем, что $(u(x, t), a(t), f(t))$ являются классическим решением задачи (1)-(4). Так как $\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t)v_s(x) = u(x, t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$, то очевидно, что функция $u_{pq}(x) = \sum_{s=p}^q u_s(t)v_s(x)$ ($1 \leq p \leq q$) удовлетворяет условиям леммы 1 (см. [8], с.84,88).

Тогда из (5), в силу леммы 1 (при $m = [\frac{n}{2}] + 3$, $v = u_{pq}(x, t)$), получаем, что $t \in [0, T]$

$$\|u_{pq}(x, t)\|_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)}^2 \leq C \sum_{s=p}^q \left[\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3} u_s(t) \right]^2 \leq C \sum_{s=p}^q \max_{0 \leq t \leq T} \left(\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3} |u_s(t)| \right)^2, \quad (19)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Из (19), в силу сходимости числового ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \left(\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3} \max_{0 \leq t \leq T} |u_s(t)| \right)^2$, следует, что $\|u_{pq}(x, t)\|_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $p, q \rightarrow \infty$.

Итак, мы получаем, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t)v_s(x)$$

и ряды, полученные из них дифференцированием по x_1, \dots, x_n до $[\frac{n}{2}] + 3$ раза включительно, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Тогда очевидно, что

$$u(x, t) \in C\left([0, T]; W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)\right). \quad (20)$$

Из (20), в силу теорем вложения С.Л. Соболева, получаем, что каждая из функций

$$u(x, t), u_{x_i}(x, t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad u_{x_i x_j}(x, t) \quad (i, j = \overline{1, n})$$

непрерывна в замкнутой области $\overline{Q_T}$. Далее, можно показать, что для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ при всех $x \in \overline{\Omega}$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Lu(x, t) = a(t)b(x, t)u(x, t) + f(t)F(x, t). \quad (21)$$

Из (21) следует, что $u_t \in C(\overline{Q_T})$ и уравнение (1) удовлетворяется в $\overline{Q_T}$ в обычном смысле. Легко проверить, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (2) в обычном смысле. Более того,

$$\|u(x, t) - \varphi(x)\|_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Для эквивалентности обратной задачи и системы (5)-(7) нам надо доказать выполнение условий (4). Тогда из (5), в силу данной теоремы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_i) + a(t)b(x_i, t)u(x_i, t) + f(t)F(x_i, t) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_{\Omega} [a(\tau)b(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\tau)F(\xi, \tau)] e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} v_k(\xi) d\xi d\tau \cdot v_k(x_i) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (6), (7) имеем

$$h'_i(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_i) + a(t)b(x_i, t)h_i(t) + f(t)F(x_i, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_{\Omega} [a(\tau)b(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\tau)F(\xi, \tau)] e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} v_k(\xi) d\xi d\tau \cdot v_k(x_i) \quad (i = 1, 2). \quad (23)$$

Отсюда, имеем

$$\frac{d}{dt}(u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)b(x_i, t)(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (i = 1, 2). \quad (24)$$

В силу условия 7 данной теоремы:

$$u(x_i, 0) - h_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (25)$$

Тогда для функции $u(x_i, t) - h_i(t)$ ($i = 1, 2$) получим задачу Коши (24)-(25). Отсюда имеем

$$u(x_i, t) - h_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, 2) \quad \forall t \in [0, T].$$

□

1. Лаврентьев М.М., Васильев В.Г., Романов В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1969. – 67 с.
2. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.
3. Намазов Г.К. Обратные задачи теории уравнений математической физики. – Баку, 1984. – 125 с.
4. Прилепко А.И., Орловский Д.Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики. Ч.1 // Дифференц. уравнения. – 1985. – т.21, No. 1 – С. 119–129.
5. Безнощенко Н.Я. Об определении коэффициентов при младшем члене общего параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1976. – Вып. 12. – No. 1. – С. 175–176.
6. Искендеров А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // ДАН СССР. – 1975. – 255, 5. – С. 1005–1008.
7. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для уравнения параболического типа в ограниченной области // Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук. – No. 1. – 1997. – С. 106–113.
8. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехиздат, 1953, 279 с.
9. Худавердиев К.И. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Уч. записки АГУ, сер. физ.-мат. наук, No. 1 – Баку. – 1972. – С. 3–28.
10. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР, серия мат. – 24. – 1960. – С. 883–896.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука. – 1976. – 391 с.
12. Калантаров В.К. О смешанной задаче для полулинейных параболично-гиперболических систем уравнений // ДАН Азерб.ССР. No. 3. – 1974. – С. 20–26.