©2005. **Н.Е.Товмасян**

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В работе рассматривается задача Коши для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения и связанная с ней задача оптимального управления. Полученные результаты используются для оптимального управления полетом летательных аппаратов по заданной траектории

1. Постановка задачи и формулировка результатов.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$z'(x) = \max(k(x) + a(x)z(x), 0) + k_0(x), \quad 0 \le x \le x_0, \quad y(0) = m_0, \tag{1}$$

где $k(x)$, $k_0(x)$ и $a(x)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[0, x_0]$, а m_0– заданное положительное число. Предполагается, что $k(x) \ge 0$, $k_0(x) \ge 0$ при $0 \le x \le x_0$, а искомая функция $z(x)$ и ее производная непрерывны на отрезке $[0, x_0]$. Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что в малой окрестности точки 0 решение задачи (1) существует и единственно ([1]–[2]).

Пусть $a(x)$, $k(x)$ и m_0 удовлетворяют тем же условиям, что и в (1). На отрезке $[0, x_0]$ рассмотрим задачу

$$y'(x) = a(x)y(x) + W(x) + k(x), \quad 0 \le x \le x_0, \quad y(0) = m_0, \tag{2}$$

где $y(x) \in C^1[0, x_0]$ и $W(x) \in C[0, x_0]$– искомые функции, удовлетворяющие условиям

$$y'(x) \ge 0, \quad W(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{3}$$

Задачу (2)–(3) при $k(x) \equiv 0$, будем называть однородной. Оптимальное управление полетом летательных аппаратов по заданной траектории сводится к задаче (2)–(3).

Определение 1. *Решение $(y_0(x), W_0(x))$ задачи (2)–(3), удовлетворяющее условию*

$$y_0(x) \le y(x), W_0(x) \le W(x), \qquad 0 \le x \le x_0, \tag{4}$$

где $(y(x), W(x))$– произвольное решение задачи (2)–(3) на отрезке $[0, x_0]$, будем называть оптимальным решением этой задачи.

Имеют место следующие теоремы

Теорема 1. *Задача (1) имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Неоднородная задача (2)–(3) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений. Общее решение задачи (2)–(3) определяется формулой*

$$y(x) = z(x), \quad W(x) = \max(0, -a(x)z(x) - k(x)) + k_0(x), \tag{5}$$

где $k_0(x)$ произвольная непрерывная функция на отрезке $[0, x_0]$, а $z(x)$– решение уравнения (1).

Теорема 3. *Оптимальное решение задачи (2)-(3) единственно и оно определяется формулой*

$$y_0(x) = z_0(x), \quad W_0(x) = \max(0, -a(x)z_0(x) - k(x)), \tag{6}$$

где $z_0(x)$– решение задачи (1) при $k_0(x) \equiv 0$.

В следующем параграфе приведены доказательства сформулированных теорем и указаны эффективные методы решения рассмотренных задач. В третьем параграфе полученные результаты используются для расчета оптимального управления полетом летательного аппарата по заданной траектории.

2. Доказательство основных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы Уинтнера (теорема 5.1 из [2]). Мы покажем, что задачу (1) можно решить методом последовательных приближений на всем интервале $[0, x_0]$. Действительно, задача (1) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$y(x) = k_1(x) + \int_0^x \max(0, a(t)y(t) + k(t))dt,$$

где $k_1(x) = m_0 + \int_0^x k_0(t)dt$. Пусть M– оператор, действующий на функцию φ по формуле

$$M(\varphi)(x) = k_1(x) + \int_0^x \max(0, a(t)\varphi(t) + k(t))dt, \quad 0 \le x \le x_0.$$

Для произвольных непрерывных функций φ_1 и φ_2 выполняется неравенство

$$|M(\varphi_1)(x) - M(\varphi_2)(x)| \le \|a\| \int_0^x |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \tag{7}$$

(здесь и далее $\|f\| = \max |f(x)|$ при $0 \le x \le x_0$). Рассмотрим последовательные приближения $y_0 \equiv k_1(x),\ y_n = M(y_{n-1})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Имеют место следующие неравенства

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \le \|a\|^{j-1}(j!)^{-1}(\|k\| + \|a\|\|k_1\|)x^j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Действительно, при $j = 1$ эта оценка очевидна. Если (8) выполняется при $j = k$, то из неравенства

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| = |M(y_k)(x) - M(y_{k-1})(x)| \le \|a\| \int_0^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)|dt$$

получим, что эта оценка верна также и при $j = k + 1$. Из (8) следует, что последовательность $y_n(x)$ сходится к пределу $y(x)$ равномерно на отрезке $[0, x_0]$ при $n \longrightarrow \infty$, причем

$$|y_n(x) - y(x)| \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|a\|^{j-1} {x_0}^j}{j!}(\|k\| + \|a\|\|k_1\|).$$

Последняя оценка показывает, что последовательность $y_n(x)$ сходится к $y(x)$ быстрее, чем убывающая геометрическая прогрессия. Переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получим

$y(x) = M(y)(x)$, то есть $y(x)$ является единственным решением задачи (1). Теорема 1 доказана. □

Теорема 4. *Если $a(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq x_0$, то решение задачи (1) определяется формулой*

$$y(x) = \left(m_0 + \int_0^x (k(t) + k_0(x))(B(t))^{-1} dt\right) B(x),$$

где

$$B(x) = \exp(\int_0^x a(t)dt).$$

Доказательство. Легко убедиться, что $y(x) \geq 0$, $y(0) = m_0$ и $y'(x) = a(x)y(x) + k(x) + k_0(x)$. Следовательно, $a(x)y(x) + k(x) \geq 0$, то есть $y(x)$– решение задачи (1). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $y(x)$– решение задачи (1). Функция $(y_0(x), W_0(x))$, определенная формулой (6), является решением задачи (2)–(3). Рассмотрим функции $y(x) = B(x)x^{n+1}(n+1)^{-1}$, $W(x) = B(x)x^n$. Легко проверить, что если n– натуральное число и $n \geq \|a\|x_0$, то функция $(y(x), W(x))$– решение однородной задачи (2)–(3).

Теперь докажем вторую часть теоремы 2. Легко проверить, что функции $y(x)$ и $W(x)$, определенные соотношением (5) являются решением задачи (2)–(3). Верно также и обратное: любое решение задачи (2)–(3) представляется в виде (5). Действительно, используя неотрицательность $W(x)$, из (2) имеем

$$y'(x) \geq a(x)y(x) + k(x), \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Учитывая, что $y'(x) \geq 0$, последнее неравенство можно написать в виде

$$y'(x) \geq \max(a(x)y(x) + k(x), 0) \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Из этого соотношения следует, что

$$y'(x) = \max(a(x)y(x) + k(x), 0) + k_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{9}$$

где $k_1(x)$– некоторая непрерывная, неотрицательная функция на отрезке $[0, x_0]$. Подставляя $y'(x)$ из (9) в (2), получим

$$W(x) = \max(-a(x)y(x) - k(x), 0) + k_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad y(0) = m_0.$$

Таким образом $(y(x), W(x))$ представляется в виде (5). Теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3. Теорема 3 доказана автором статьи и его учеником О.А. Бабаяном. Приведем это доказательство. Единственность оптимального решения задачи (2)–(3) очевидна. Рассмотрим функции, определенные соотношениями (5) и (6). Согласно теореме достаточно доказать неравенства

$$z(x) \geq z_0(x), \quad W(x) \geq W_0(x), \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{10}$$

Сначала докажем первое неравенство. Пусть для некоторой точки x_1 $(0 < x \leq x_0)$ имеет место обратное, то есть $z(x_1) < z_0(x_1)$. Обозначим $z_\varepsilon(x)$ решение уравнения (1) при $k_1(x) = -\varepsilon$. Так как $z_\varepsilon(x)$ непрерывно зависит от ε (см. [1]), то для достаточно малого положительного ε также выполняется неравенство $z(x_1) < z_\varepsilon(x_1)$. Поскольку $z(0) = z_\varepsilon(0) = m_0$, то из этого соотношения следует, что существует такая точка x_2 $(0 \le x_2 < x_1)$, что

$$z_\varepsilon(x_2) = z(x_2), \quad z_\varepsilon(x) > z(x), \quad x_2 < x < x_1. \tag{11}$$

Так как $z(x)$ и $z_\varepsilon(x)$ удовлетворяют уравнению (1) при $k_1(x) \ge 0$ и $k_1(x) = -\varepsilon$ соответственно и $z_\varepsilon(x_2) = z(x_2)$, то $z'_\varepsilon(x_2) < z'(x_2)$. Из этого неравенства и из первого соотношения (11) следует, что в некоторой правосторонней окрестности точки x_2 выполняется неравенство $z_\varepsilon(x) < z(x)$, которое противоречит второму соотношению (11). Полученное противоречие доказывает первое неравенство (10).

Для доказательства второго неравенства (10) отметим, что так как $k_0(x) \ge 0$, то из (5) имеем

$$W(x) \ge \max(-a(x)z(x) - k(x), 0). \tag{12}$$

Предположим сначала, что $a(x) > 0$. В этом случае, используя (6), а также неравенства $k(x) \ge 0$ и $z(x) \ge 0$, получим

$$W(x) \ge \max(-a(x)z(x) - k(x), 0) = 0, \; W_0(x) = 0,$$

то есть $W(x) \ge W_0(x)$. Если $a(x) \le 0$, то из первого неравенства (11) следует, что $-a(x)z(x) - k(x) \ge -a(x)z_0(x) - k(x)$ и, следовательно,

$$\max(-a(x)z(x) - k(x), 0) \ge \max(-a(x)z_0(x) - k(x), 0).$$

Таким образом, из (12) и в этом случае получим, что $W(x) \ge W_0(x)$, что доказывает (11). Теорема доказана.

3. Оптимальное управление полетом летательного аппарата (ЛА) по заданной траектории.

Будем предполагать, что полет ЛА осуществляется в координатной плоскости xOy $(x > 0)$, при этом начало координат совпадает с начальной точкой полета, положительное направление оси Oy направлено вертикально вверх по отношению к земной поверхности. Предполагается также, что дальность полета мала по сравнению с радиусом Земли и поэтому будем считать, что направление силы тяжести $\overrightarrow{F}_t(t)$, действующей на ЛА в момент времени t, совпадает с отрицательным направлением оси Oy. Модуль силы тяжести определяется формулой $F_t(t) = am(t)$, где $a_0 = gR_0^2(R_0 + H)^{-2}$, g– ускорение свободного падения, R_0– радиус Земли, H– расстояние от начала координат до поверхности Земли, $m(t)$– масса ЛА в момент времени t. Здесь и в дальнейшем для всех векторных величин $\overrightarrow{f}(t)$ обозначаем $f(t) = |\overrightarrow{f}(t)|$.

Обозначим: $\overrightarrow{V}(t)$– скорость полета ЛА, $\overrightarrow{F_c}(t)$– сопротивление воздуха, $\overrightarrow{F_r}(t)$– реактивная сила, действующая на ЛА, $\overrightarrow{G}(t)$– сила торможения (сила торможения возникает при искусственном изменении конфигурации ЛА или применении парашюта). Предполагается, что направление $\overrightarrow{F_r}$ совпадает, а направления $\overrightarrow{F_c}$ и $\overrightarrow{G}$ противоположны направлению скорости $\overrightarrow{V}$, а скорость полета мала по сравнению со скоростью звука. Тогда, если (x, y)– координаты ЛА в момент t, то ([5])

$$F_r(t) = -\mu\dot{m}(t), \quad F_c(t) = k_0(x, y)V(t), \quad G(t) = W_0(x, y)V(t). \tag{13}$$

Здесь $k_0(x,y)$– заданная, а $W_0(x,y)$– искомая непрерывные положительные функции, μ– положительное число. Движение ЛА с переменной массой описывается уравнением Мещерского ([5]):

$$m(t)\overrightarrow{\ddot{r}}(t) = \overrightarrow{F}_t(t) + \overrightarrow{F}_r(t) + \overrightarrow{F}_c(t) + \overrightarrow{G}(t). \tag{14}$$

Если $V_j(t),\ j = 1,2$ координаты вектора скорости $\overrightarrow{V}(t)$, $V_1(t) = \dot{x}(t)$, $V_2(t) = \dot{y}(t)$, то уравнение (14) в координатах запишется в виде

$$m(t)\dot{V}_1(t) = -\mu\dot{m}(t)V_1(t)(V(t))^{-1} - k_0(x,y)V_1(t) - W_0(x,y)V_1(t),$$

$$m(t)\dot{V}_2(t) = -\mu\dot{m}(t)V_2(t)(V(t))^{-1} - k_0(x,y)V_2(t) - W_0(x,y)V_2(t) - a_0m(t).$$

Пусть полет осуществляется по траектории

$$y = f(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{15}$$

где $f(x)$– заданная трижды непрерывно дифференцируемая функция, $f(0) = 0$. Пусть t_0– время полета по траектории (14), m_0– заданная масса ЛА в конце полета, то есть

$$m(t_0) = m_0. \tag{16}$$

Из физических соображений будем предполагать, что

$$m(t) > 0, \quad \dot{m}(t) \le 0, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{17}$$

В задаче (13)– (16) искомыми являются функции $x(t), y(t)$, $V_1(t), V_2(t)$, $m(t), W(x,y)$ и время полета t_0 . Полет осуществляется при помощи соответствующего подбора реактивной силы, силы торможения, начальной скорости $V(0)$ и расхода топлива. Эти величины также подлежат определению. Имеет место следующая

Теорема 5. *Задача (13)– (17) имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$f''(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{18}$$

Доказательство. Так как $\dot{x}(t) > 0$, то мы можем из уравнения $x(t) = x$ определить t, как функцию от x. Переходя к независимой переменной x и используя (14), имеем

$$V_1(t) = \dot{x}(t) \equiv \omega(x), \quad V_2(t) = f'(x)\omega(x), \quad \dot{V}_1(t) = \omega(x)\omega'(x),$$

$$\dot{V}_2(t) = f''(x)\omega^2(x) + f'(x)\omega(x)\omega'(x), \quad \dot{m}(t) = m'(x)\omega(x). \tag{19}$$

В этих обозначениях уравнение (14) по координатам и соотношения (17) примут вид

$$m(x)\omega'(x) = -\frac{\mu m'(x)}{\sqrt{1+\omega^2(x)}} - k_1(x) - W_1(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{20}$$

$$m(x)(f''(x)\omega(x) + f'(x)\omega'(x)) = -\frac{\mu m'(x)f'(x)}{\sqrt{1+\omega^2(x)}} -$$

$$-k_1(x)f'(x) - \frac{a_0m(x)}{\omega(x)} - W_1(x)f'(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{21}$$

$$m(x) > 0,\ \omega(x) > 0,\ W_1(x) \equiv W_0(x, f(x)) \geq 0,\ m'(x) \leq 0 \tag{22}$$

при $0 \leq x \leq x_0$. Здесь $k_1(x) = k_0(x, f(x))$. Таким образом, рассмотренная задача приводится к задаче (19), (20), (21), (22) определения неизвестных функций $\omega(x)$, $m(x)$ и $W_1(x)$. В дальнейшем, в соответствии с определением, функцию $W_1(x)$ будем называть коэффициентом силы торможения на кривой $y = f(x)$.

Умножая обе части (20) на $f'(x)$ и вычитая правые и левые части (20) и (21) соответственно, получим

$$\omega^2(x) = -a_0(f''(x))^{-1}, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{23}$$

Из последнего равенства следует, что для разрешимости задачи (16), (20) – (22) необходимо выполнение условия (18). Докажем, что это условие является также достаточным для того, чтобы задача имела решение.

Пусть это условие выполнено. Тогда из (23) имеем

$$\omega(x) = \sqrt{-a_0(f''(x))^{-1}}, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{24}$$

Делая в (20), (16) и в последних двух неравенствах (21) замену искомых функций $m(x)$ и $W_1(x)$ на $\varphi(x)$ и $W(x)$ по формулам

$$\varphi(x) = m(x_0 - x), \quad W(x) = \mu^{-1} W_1(x_0 - x)\sqrt{1 + \omega^2(x_0 - x)}, \tag{25}$$

получим

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + k(x) + W(x), \quad 0 \leq x \leq x_0 \tag{26}$$

$$\varphi(0) = m_0, \quad \varphi'(x) \geq 0, \quad W(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{27}$$

где

$$k(x) = \frac{k_1(x_0 - x)\sqrt{1 + \omega^2(x_0 - x)}}{\mu}, \quad a(x) = \frac{\omega'(x_0 - x)\sqrt{1 + \omega^2(x_0 - x)}}{\mu}.$$

Таким образом, рассмотренная задача приводится к задаче (26), (27), решение которой определяется формулой (5). Согласно теореме эта задача имеет бесконечное множество решений. Теорема доказана. □

Из полученных формул следует, что время полета t_0, начальная скорость V_0, расход топлива m_1, модуль реактивной силы $F_r(x)$ и коэффициент торможения $W_1(x)$ определяются следующим образом:

$$t_0 = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\omega(x)}, \quad V_0 = \omega(0)\sqrt{1 + (f'(0))^2}, \quad m_1 = \varphi(x_0) - m_0,$$

$$F_r(x) = \mu\varphi'(x_0 - x), \quad W_1(x) = \frac{\mu W(x_0 - x)}{\sqrt{1 + \omega^2(x)}},$$

где $\omega(x)$ – функция (24), а $(\varphi(x), W(x))$ – решение задачи (26), (27).

Замечание 1. *Если $f''(x) < 0$, $\quad f'''(x) \geq 0$, при $0 \leq x \leq x_0$, то полет ЛА по траектории $y = f(x)$ возможен без торможения, при этом все параметры полета определяются единственным образом.*

Доказательство. При выполнении заданных условий в (26) $a(x) \geq 0$ и задача (26), (27) при $W(x) \equiv 0$ имеет единственное решение. □

Как было доказано выше, задача (26), (27) имеет бесконечное множество решений. Выберем решение так, чтобы обеспечить оптимальность некоторых параметров при полете по заданной траектории. Одним из критериев оптимальности полета является минимальность расхода топлива и силы торможения. Это означает, что необходимо найти такое решение $(\varphi_0(x), W_0(x))$ задачи (26), (27), которое удовлетворяет условию $\varphi_0(x) \le \varphi(x), W_0(x) \le W(x)$ при $0 \le x \le x_0$. Здесь $(\varphi(x), W(x))$ – произвольное решение задачи (26), (27). Если выполнено условие (16), то согласно теореме 3, это решение определятся соотношениями $\varphi_0(x) = y(x)$, $W_0(x) = \max(-a(x)y(x) - k(x), 0)$, где $y(x)$ – решение задачи (1).

Пусть теперь начальная скорость V_0 ЛА задана. Тогда аналогично теореме 5 доказывается

Теорема 6. *Полет ЛА по траектории (15) с начальной скоростью V_0 возможен тогда и только тогда, когда $f(x)$ удовлетворяет условиям*

$$-\frac{1+(f'(0))^2}{f''(0)} = \frac{V_0^2}{a_0}, \quad f''(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0.$$

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений // М.Наука. 1970.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // М.Мир. 1970.
3. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения // М. Наука. 1988.
4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М.* Численные методы // М. Наука. 1987.
5. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики// М. Наука. 1986.
6. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы// М. Гостехиздат. 1949.

Государственный Инженерный Университет Армении,
ул.Теряна, 105
375009, Ереван, Армения

Получено 10.06.2004