Нелинейные граничные задачи **15**, 192-203 (2005)

 И.П.Слепцова

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Для широкого класса неограниченных нецилиндрических областей рассмотрена краевая задача для линейного параболического уравнения. Доказано существование обобщенного решения данной задачи в классе функций растущих на бесконечности. Изучено характер роста решения в зависимости от геометрии области.

Краевые задачи для эволюционных уравнений в нецилиндрических областях представляют большой практический интерес. Разрешимость таких задач изучалась в ряде работ. В [1] Ж.-Л.Лионсом впервые был предложен метод штрафа для доказательства теорем существования решений параболических задач. Этот метод оказался весьма эффективным при исследовании широкого класса уравнений. Так, в [2] доказана разрешимость краевой задачи для уравнений Навье-Стокса, в [3] — для некоторых волновых уравнений. В [4] установлена единственность решений смешанных задач для некоторых вырождающихся эволюционных систем второго порядка по времени. В [5] в ограниченных по пространственным переменным нецилиндрических областях доказана однозначная разрешимость задачи Фурье для квазилинейного параболического уравнения. Отметим и другие методы, применяемые при исследовании такого класса задач. В [6] параболическая задача изучена с помощью метода регуляризации. В некоторых случаях можно заменой переменных преобразовать область в цилиндр и в нем рассматривать соответствующую задачу ([7],[8]).

В данной работе рассматривается краевая задача для линейного параболического уравнения произвольного порядка в неограниченной нецилиндрической области. В [9] в области $G \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > -y(|x|)\}$ ($y(s)$ — произвольная непрерывная монотонно неубывающая функция, $y(s) > -T$) для таких задач установлены классы единственности обобщенных решений, зависящие от геометрии области G. Эти классы при $y \equiv const$ переходят в классы единственности Тихонова и Тэклинда [10]. В данной работе доказано существование обобщенных решений в области G в классах растущих функций. При этом установлена зависимость характера роста решений и допустимого роста свободных членов уравнения от свойств функции $y(s)$.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов.

Пусть $G \subset \{(x,t) : -y(|x|) < t < T\}$ - неограниченная область из $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, граница которой $\partial G = \Omega_T \cup \Gamma$, Ω_T - область на гиперплоскости $t = T$, Γ - параболическая часть границы ∂G, являющаяся кусочно C^1-гладкой гиперповерхностью. Пусть Γ такова, что для вектора внешней нормали к Γ в точке (x,t) $\nu(x,t) = \{\nu_1, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1}\}$ $\nu_{n+1} \neq \pm 1$.

В области G рассматривается краевая задача

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in G\ , \qquad (1)$$

$$D^\alpha u\big|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \le m-1. \qquad (2)$$

Здесь $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$ - измеримые и ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

$$a_0|\xi^{(m)}|^2 \le \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha^{(m)}\xi_\beta^{(m)} \le a_1|\xi^{(m)}|^2, \quad a_0>0, \quad a_1<\infty, \tag{3}$$

для всех $\xi^{(m)} \in \mathbb{R}^{N(m)}$ ($N^{(m)}$ — число различных мультииндексов длины не большей, чем m),

$$|a_{\alpha\beta}(x,t)| \le a_2, \quad a_2>0, \quad |\alpha|+|\beta| \le 2m-1. \tag{4}$$

Обозначим $G(\tau) = G \cap \{(x,t) : |x| < \tau\}$; $G_\rho^\nu(\tau) = G(\tau) \cap \{(x,t) : \rho < t < \nu\}$, $G(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_2) \setminus G(\tau_1)$, $\Omega_{t_0} = G \cap \{t = t_0\}$, $S(\tau) = \partial G(\tau) \setminus \partial G$, $\sigma_t(\tau) = \Omega_t \cap S(\tau)$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ограниченная область. Через $W_2^m(\Omega_t, S_t)$, $S_t \subset \partial\Omega_t$, обозначено замыкание в норме $W_2^m(\Omega_t)$ множества C^m-гладких в Ω_t функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega_t \setminus S_t$, через $L_2(\rho,\nu; W_2^m(\Omega_t, S_t))$ — пространство функций $v(x,t)$ таких, что для почти всех $t \in (\rho,\nu)$ $v(x,t) \in W_2^m(\Omega_t, S_t)$ и $\int_\rho^\nu \|v(\cdot,t)\|_{W_2^m(\Omega_t)}\,dt < \infty$.

Пусть $F_\alpha(x,t) \in L_{2,loc}(G)$, $|\alpha| \le m$.

Определение 1. *Обобщенное решение задачи (1), (2) — функция $u(x,t)$ такая, что для любого $\tau : 0 < \tau < \infty$ и любых $\rho, \nu : -y(\tau) \le \rho < \nu \le T$ $u(x,t) \in L_2(\rho,\nu; W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\rho,\nu; W_2^{-m}\Omega_t(\tau))$ и выполнено интегральное тождество*

$$\int_\rho^\nu \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle\,dt + \iint_{G_\rho^\nu(\tau)} \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta v\,dxdt = \iint_{G_\rho^\nu(\tau)} \sum_{|\alpha| \le m} F_\alpha(x,t) D^\alpha v\,dxdt. \tag{5}$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_2(\rho,\nu; W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma))$.

Здесь $\langle w, v\rangle$— значение линейного непрерывного функционала $w \in W_2^{-m}(\Omega_t(\tau))$ на элементе $v \in W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma)$.

Геометрию области G можно описывать с помощью численной характеристики $\lambda(t,\tau)$:

$$\lambda^2(t,\tau) = \inf\Big(\int_{\sigma_t(\tau)} |\nabla_\sigma v|^2\,d\sigma\Big)\Big(\int_{\sigma_t(\tau)} v^2\,d\sigma\Big)^{-1},$$

где inf берется по всем непрерывно дифференцируемым в окрестности σ функциям $v(x,t)$, таким, что $v = 0$ в окрестности Γ. Пусть $\Lambda(t,\tau)$ — произвольная неотрицательная измеримая функция, которая при почти всех (t,τ) удовлетворяет условию

$$\Lambda(t,\tau) \le \lambda(t,\tau).$$

Для произвольной непрерывной функции $\mu(s) > 0$

$$\Lambda^2_{\mu(s)}(t,\tau) = \Lambda^2(t,\tau) + \mu^{2/m}(s).$$

Выберем непрерывную функцию $\psi(\tau) > 1$ таким образом, чтобы с некоторым $\tau_0 > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ выполнялось неравенство

$$\inf_{\tau < s < \tau\psi(\tau)} \Lambda_{\mu(\tau\psi(\tau))}(t,s)\tau\varphi(\tau) = h_0(t) \ge h_0 > 0, \tag{6}$$

где $\varphi(\tau) = \psi(\tau) - 1$.

Основное условие, конкретизирующее выбор функции $\mu(\tau)$ — неравенство

$$\max(1, \mu^2(\tau)\mu^{-2}(\tau\psi(\tau))) \exp[2\mu^2(\tau\psi(\tau))(t + y(\tau\psi(\tau))) - 2\mu^2(\tau)(t + y(\tau))] \le H_0 < \infty, \quad (7)$$

выполненное для всех $\tau > \tau_0$, $-y(\tau\psi(\tau)) < t < T$, с постоянной $1 < H_0 < \infty$, зависящей от известных параметров задачи.

Предположим, что существует число $\nu > 0$ такое, что

$$(\varphi(\tau))^{-1} \inf_{\tau < s < \tau\psi(\tau)} \varphi(s) \ge \nu > 0, \quad \tau > \tau_0. \quad (8)$$

Также считаем выполненным условие

$$\Lambda^2(t, 0, \tau) + \mu^2(\tau) \ge d_1\tau^{-2}, \quad -y(\tau) < t < T, \quad d_1 > 0, \quad (9)$$

где $\Lambda(t, \tau_1, \tau_2) = \inf_{\tau_1 < s < \tau_2} \Lambda(t, s)$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (3),(4), непрерывные функции $\mu(\tau) > 0$ и $\psi(\tau) > 1$ — условиям (6)–(8), а также условию*

$$\Lambda^2(t, 0, \tau) + \mu^{2/m}(\tau) \ge h_1^2, \quad (10)$$

$h_1 > 0$ зависит от известных параметров. Пусть для функций $F_\alpha(x, t) \in L_{2,loc}(G)$, $|\alpha| \le m$, рост на бесконечности ограничен условием

$$H_{s+1,s} \equiv \iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \le m} F_\alpha^2(x, t)\Lambda_{\mu(\tau_s)}^{-2(m-|\alpha|)}(t, |x|)\, dxdt \le M \exp\Big(\gamma \int\limits_{\tau_0}^{\tau_s} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big), \quad (11)$$

$s \in \mathbb{N}$, $M = const < \infty$, γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma < \nu \ln \theta^{-1}, \quad (12)$$

$0 < \theta < 1$ зависит только от известных параметров задачи, а $\{\tau_s\}$ — произвольная числовая последовательность, для которой

$$\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \frac{dz}{z\varphi(z)} > \Delta, \quad \Delta = const > 0. \quad (13)$$

Тогда задача (1),(2) имеет обобщенное решение.

Следующее утверждение позволяет более явно характеризовать условия существования решений задачи (1),(2) в зависимости от геометрии области G.

Следствие 1. *Пусть для произвольной функции $\Lambda(t,\tau)$ $y(s)$ растет не быстрее линейной функции, т.е., начиная с некоторого $\tau_0 > 0$, функция $Y(\tau) = \frac{\tau-\tau_0}{T+y(\tau)}$ монотонно неубывает. Пусть рост правой части уравнения (1) ограничен условием*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)(Y(\tau_s))^{-\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}}\,dxdt \le M_1 \exp(b_1 \int\limits_{\tau_0}^{\tau_s} Y^{\frac{1}{2m-1}}(\tau)\,d\tau), \tag{14}$$

где $M_1 = const < \infty$, последовательность $\{\tau_s\}$ выбирается так, чтобы

$$\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} Y^{\frac{1}{2m-1}}(\tau)\,d\tau > \Delta_1, \quad \Delta_1 > 0, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

а $b_1 = \gamma h_0^{-1}[(2m-1)(4m(h_0+\varepsilon))^{-1}\ln H_0]^{1/m}$. Тогда существует обобщенное решение задачи (1),(2).

Пример 1. *Если $y = const$, т.е. G — цилиндрическая область, то разрешимость краевой задачи (1),(2) имеет место в классах, аналогичных классам Тихонова для задачи Коши, при следующих ограничениях на рост правой части уравнения (1):*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)\tau_s^{-\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}}\,dxdt \le M_1 \exp(b_1 \tau_s^{\frac{2m}{2m-1}}),$$

где последовательность $\{\tau_s\}$ должна удовлетворять условию $\tau_{s+1}^{\frac{2m}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{2m}{2m-1}} > \Delta_1, s \in \mathbb{N}$.

Пример 2. *Пусть функция $T + y(\tau)$ эквивалентна τ^ε, $0 < \varepsilon \le 1$, в том смысле, что $c_1\tau^\varepsilon \le T + y(\tau) \le c_2\tau^\varepsilon$ с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2. В этом случае условия (14),(15), определяющие классы разрешимости задачи (1),(2), имеют вид*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)\tau_s^{-(1-\varepsilon)\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}}\,dxdt \le M_1 \exp(b_1 \tau_s^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}}),$$

$$\tau_{s+1}^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}} > \Delta_1 > 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для областей, быстро сужающихся по τ, задача (1),(2) разрешима при более быстром росте правой части уравнения (1), чем определено следствием 1, причем этот рост может быть сколь угодно большим с ростом $\Lambda(t,\tau)$.

Следствие 2. *Пусть функция $y(s)$ удовлетворяет условию следствия 1, $\Lambda(t,\tau) \ge Y(\tau)$, $t \in (-y(\tau),T)$. Тогда для существования обобщенного решения задачи (1),(2) достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)\Lambda^{-2(m-|\alpha|)}(t,|x|)\,dxdt \le M_2 \exp(b_2 \int\limits_{\tau_0}^{\tau_s} \Lambda(t,\tau)\,d\tau) \tag{16}$$

для положительной постоянной M_2 и $b_2 = \gamma h_0^{-1}$ и для последовательности $\{\tau_s\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \Lambda(t,\tau)\,d\tau \geq \Delta_2, \quad \Delta_2 > 0, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Пример 3. *Пусть функция $y(\tau)$ такая же, как в примере 2, а $\Omega(\tau)$ сужается достаточно быстро, так, что $\Lambda(t,\tau) = c_3\tau^\delta$, $\delta > (1-\varepsilon)(2m-1)^{-1}$. Тогда решение задачи (1),(2) существует, если правая часть уравнения (1) растет быстрее, чем в примере 2:*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} F_\alpha^2(x,t)\tau_s^{-2(m-|\alpha|)\frac{1+\delta}{2m-1}}\,dxdt \leq M_2 \exp(b_2\tau_s^{\delta+1}),$$

где $\tau_{s+1}^{\delta+1} - \tau_s^{\delta+1} \geq \Delta_2 > 0$, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь область G такова, что условие (10) не выполнено. В этом случае рассмотрим уравнение вида "главной части":

$$L_0 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in G. \tag{1*}$$

Для удобства формулировки результатов и дальнейших доказательств видоизменим обозначения и соответствующие им условия. Пусть $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$, $\varphi(\tau) = 1 - \psi(\tau)$,

$$\inf_{\tau\psi(\tau)<s<\tau} \Lambda_{\mu(\tau)}(t,s)\tau\varphi(\tau) \geq h_0 > 0, \quad 0 < c_0 \leq \psi(\tau) < 1, \tag{6*}$$

$$\max(1, \mu^2(\tau\psi(\tau))\mu^{-2}(\tau))\exp[2\mu^2(\tau)(t+y(\tau)) - 2\mu^2(\tau\psi(\tau))(t+y(\tau\psi(\tau)))] \leq H_0 < \infty, \tag{7*}$$

$$(\varphi(\tau))^{-1} \inf_{\tau<s<\tau\varphi^{-1}(\tau)} \varphi(s) \geq \nu > 0. \tag{8*}$$

Теорема 2. *Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$ выполнены условия (6*)–(8*), (9). Пусть функции $F_\alpha(x,t)$, $|\alpha| \leq m$, удовлетворяют соотношениям (11) с постоянной γ из неравенства*

$$\gamma < c_0\nu \ln\theta^{-1} \tag{12*}$$

и (13). Тогда существует обобщенное решение задачи (1),(2).*

Теорема 2 позволяет получить условия разрешимости задачи (1*),(2) в областях с образующей $y(s)$, имеющей надлинейный рост.

Следствие 3. *Утверждение теоремы 2 имеет место, если функция $y(s)$ дважды непрерывно дифференцируема, $y''(s) > 0$,*

$$(y'(s)^{\frac{1}{2m-1}})' \leq \frac{\varepsilon_0(\beta - \varepsilon_0)}{m}, \quad o < \varepsilon_0 < \beta \equiv \frac{\ln H_0}{2h_0}, \quad \tau > \tau_0, \tag{18}$$

а рост правой части уравнения (1^*) *определен условием*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)(y')^{-2\frac{(m-|\alpha|)}{2m-1}}\,dxdt \le M_3 \exp\big(b_3 \int\limits_{\tau_0}^{\tau_s} (y'(\tau))^{-\frac{1}{2m-1}}\,d\tau\big), \tag{19}$$

где $M_3 = const > 0, \quad b_3 = \gamma(\beta-\varepsilon_0)^{\frac{1}{2m-1}} h_0^{-1}$, *а* $\{\tau_s\}$ *такова, что*

$$\int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (y'(\tau))^{-\frac{1}{2m-1}}\,d\tau \ge \Delta_2 > 0. \tag{20}$$

Пример 4. *Пусть функция* $y(s)$ *эквивалентна* $s^{2m-\delta}, \delta > 0$. *Условие (18) выполнено, т.к.* $(y'(s)^{\frac{1}{2m-1}})' \to 0$ *при* $s \to \infty$. *Решение задачи* (1^*),*(2) существует, если функции* $F_\alpha(x,t)$ *имеют рост*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)\tau_s^{-2(m-|\alpha|)(1-\frac{\delta}{2m-1})}\,dxdt \le M_3 \exp\big(b_3 \tau_s^{\frac{\delta}{2m-1}}\big)$$

для $\tau_s : \tau_{s+1}^{\frac{\delta}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{\delta}{2m-1}} \ge \Delta_2 > 0, \quad s \in \mathbb{N}$.

Пример 5. *Пусть* $y(s) = \alpha s^{2m}, \alpha > 0$. *Условие (18) выполнено лишь при* α *удовлетворяющих ограничению* $\alpha \le \frac{1}{2} m^{-2m}(\varepsilon_0(\beta-\varepsilon_0))^{2m-1}$. *Задача* (1^*),*(2) имеет обобщенное решение, если для* τ_s *таких, что* $\tau_{s+1} \ge \tau_s \Delta_3, \quad \Delta_3 > 1, \quad \tau_s > \tau_0$, *правая часть уравнения* (1^*) *имеет степенной рост:*

$$\iint\limits_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t)\tau_s^{-2(m-|\alpha|)}\,dxdt \le M_4 \tau_s^{b_4}, \quad b_4 = b_3(2m\alpha)^{-\frac{1}{2m-1}}.$$

2. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть τ_s — монотонно возрастающая числовая последовательность. Определим ограниченную область $\widetilde{G}_s = G^T_{-y(\tau_{s-1})}(\tau_s)$. Граница $\widetilde{G}_s$ $\partial\widetilde{G}_s = \Omega_T \cup \Omega_{-y(\tau_{s-1})} \cup \Gamma_s$. Очевидно, $G = \bigcup_1^\infty \widetilde{G}_s$.

Рассмотрим в $\{\widetilde{G}_s\}$ семейство задач:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{G}_s, \tag{21}$$

$$u\big|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \tag{22}$$

$$D^\alpha u\big|_{\Gamma_s} = 0, \quad |\alpha| \le m-1. \tag{23}$$

В уравнениях (21) имеются в виду сужения функций $a_{\alpha\beta}(x,t)(|\alpha|,|\beta| \le m)$ и $F_\alpha(x,t)$ $(|\alpha| \le m)$ на область $\widetilde{G}_s$ (обозначения оставлены прежние).

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (21)–(23) назовем функцию* $u(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\, \mathring{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$, *для которой* $\frac{\partial u}{\partial t} \in (L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\, W_2^{-m}(\Omega(\tau_s)))$, *выполнены условия (22) и интегральное тождество*

$$\int\limits_{-y(\tau_{s-1})}^{T} \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle\, dt + \iint\limits_{\widetilde{G}_s} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta v\, dxdt = \iint\limits_{\widetilde{G}_s} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha(x,t) D^\alpha v\, dxdt$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\, \mathring{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$.

Лемма 1. *Задача (21)–(23) имеет единственное обобщенное решение для произвольных функций* $F_\alpha(x,t) \in L_2(\widetilde{G}_s)$, $\quad |\alpha| \le m$.

Доказательство леммы проведем методом штрафа. Пусть $Q = D \times (-y(\tau_{s-1}), T)$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\quad Q \supset \widetilde{G}_s$, $\quad$ параболическая часть границы области Q $\partial Q = \Sigma \cup D_{-y(\tau_{s-1})}$. Пусть $\tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t)$ и $\widetilde{F}_\alpha(x,t)$ — продолжения функций $a_{\alpha\beta}(x,t)$ и $F_\alpha(x,t)$ в область Q, причем

$$\widetilde{F}_\alpha(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q \backslash \widetilde{G}_s,$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha^{(m)}\xi_\beta^{(m)} = a_0|\xi^{(m)}|^2 \quad \text{в} \quad Q\backslash \widetilde{G}_s.$$

В области Q рассмотрим задачу со штрафом

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{F}_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{24}$$

$$u^\varepsilon\big|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \tag{25}$$

$$D^\alpha u^\varepsilon\big|_\Sigma = 0, \quad |\alpha| \le m-1. \tag{26}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\quad M \in L_\infty(Q)$, $\quad M = 0$ при $(x,t) \in \widetilde{G}_s$, $M = 1$ при $(x,t) \in Q\backslash\widetilde{G}_s$.

Под обобщенным решением задачи (24)–(26) будем понимать функцию

$$u^\varepsilon(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T; \mathring{W}_2^m(D)) \cap C(-y(\tau_{s-1}),T; L_2(D)),$$

для которой $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T; W_2^{-m}\,(D))$, выполнены условие (25) и интегральное тождество

$$\int\limits_{-y(\tau_{s-1})}^{T} \langle \tfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, v\rangle\, dt + \iint\limits_{Q} \Big[\textstyle\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon v\Big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} \textstyle\sum_{|\alpha|\le m} \widetilde{F}_\alpha(x,t) D^\alpha v\, dxdt$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T; \mathring{W}_2^m(D))$.

Существование и единственность решения $u^\varepsilon(x,t)$ задачи (24)–(26) доказывается, например, методом Галеркина. Для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u^\varepsilon(x,T))^2\, dx + \iint\limits_Q (a_0|D^m u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} M u^{\varepsilon^2})\, dxdt \le c \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\le m} \widetilde{F}_\alpha^2\, dxdt,$$

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (21)–(23) назовем функцию* $u(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\mathring{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$, *для которой* $\frac{\partial u}{\partial t} \in (L_2(-y(\tau_{s-1}),T;W_2^{-m}(\Omega(\tau_s)))$, *выполнены условия (22) и интегральное тождество*

$$\int\limits_{-y(\tau_{s-1})}^{T} \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle\, dt + \iint\limits_{\widetilde{G}_s} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta v\, dxdt = \iint\limits_{\widetilde{G}_s} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha(x,t) D^\alpha v\, dxdt$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\mathring{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$.

Лемма 1. *Задача (21)–(23) имеет единственное обобщенное решение для произвольных функций* $F_\alpha(x,t) \in L_2(\widetilde{G}_s)$, $\quad |\alpha| \le m$.

Доказательство леммы проведем методом штрафа. Пусть $Q = D \times (-y(\tau_{s-1}),T)$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\quad Q \supset \widetilde{G}_s$, $\quad$ параболическая часть границы области Q $\partial Q = \Sigma \cup D_{-y(\tau_{s-1})}$. Пусть $\tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t)$ и $\widetilde{F}_\alpha(x,t)$ — продолжения функций $a_{\alpha\beta}(x,t)$ и $F_\alpha(x,t)$ в область Q, причем

$$\widetilde{F}_\alpha(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q\backslash\widetilde{G}_s,$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha^{(m)}\xi_\beta^{(m)} = a_0|\xi^{(m)}|^2 \quad \text{в} \quad Q\backslash\widetilde{G}_s.$$

В области Q рассмотрим задачу со штрафом

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{F}_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{24}$$

$$u^\varepsilon\big|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \tag{25}$$

$$D^\alpha u^\varepsilon\big|_\Sigma = 0, \quad |\alpha| \le m-1. \tag{26}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\quad M \in L_\infty(Q)$, $\quad M = 0$ при $(x,t) \in \widetilde{G}_s$, $M = 1$ при $(x,t) \in Q\backslash\widetilde{G}_s$.

Под обобщенным решением задачи (24)–(26) будем понимать функцию

$$u^\varepsilon(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\mathring{\mathrm{W}}_2^m(D)) \cap C(-y(\tau_{s-1}),T;L_2(D)),$$

для которой $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;W_2^{-m}(D))$, выполнены условие (25) и интегральное тождество

$$\int\limits_{-y(\tau_{s-1})}^{T} \langle \tfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, v\rangle\, dt + \iint\limits_Q \Big[\textstyle\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon v\Big]\, dxdt =$$
$$= \iint\limits_Q \textstyle\sum_{|\alpha|\le m} \widetilde{F}_\alpha(x,t) D^\alpha v\, dxdt$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}),T;\mathring{\mathrm{W}}_2^m(D))$.

Существование и единственность решения $u^\varepsilon(x,t)$ задачи (24)–(26) доказывается, например, методом Галеркина. Для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u^\varepsilon(x,T))^2\, dx + \iint\limits_Q (a_0|D^m u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} M {u^\varepsilon}^2)\, dxdt \le c \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\le m} \widetilde{F}_\alpha^2\, dxdt,$$

в которой постоянная c не зависит от Q и ε. Из этой оценки следует утверждение леммы (см., например, [5]).

Пусть $u_s(x,t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \mathring{W}_2^m(\tau_s))$ — обобщенное решение задачи (21)–(23) (согласно лемме такое решение существует). Возьмем в интегральном тождестве (5) $G(\tau) = G^T_{-y(\tau_{s-1})}(\tau_{s-1}) = G_{s-1}$, $v(x,t) = u_s(x,t) g_{s-i}(t)$, $i < s$. Используя условия (3),(4), получим:

$$g_{s-i}(T) \int\limits_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x,T)\,dx + \iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu^2_{s-i} u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt \le$$
$$\le a_2 \iint\limits_{G_{s-1}} \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u_s| \sum_{j=0}^{m-1} |D^j u_s| g_{s-i}(t)\,dxdt + \iint\limits_{G_{s-1}} \sum_{|\alpha|\le m} |F_\alpha| \sum_{i=0}^{|\alpha|} |D^{|\alpha|-i} u_s| g_{s-i}(t)\,dxdt. \tag{27}$$

Из интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо ([11])

$$\int\limits_{B_R} |D^j u|^2\,dx \le d_2 \Big(\int\limits_{B_R} |D^m u|^2\,dx\Big)^{j/m} \Big(\int\limits_{B_R} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{m-j}{m}} + d_3 R^{-2j} \int\limits_{B_R} u^2\,dx \tag{28}$$

(здесь B_R — шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R, $d_2, d_3 < \infty$), неравенства Юнга, условий (9) и (10) следует оценка ([11])

$$\int\limits_{\Omega_t(\tau)} |D^j u_s|^2\,dx \le$$
$$\le k_1 h_1^{-2(m-j)} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) \int\limits_{\Omega_t(\tau)} (|D^m u_s|^2 + \mu^2_{s-i} u_s^2)\,dx, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{29}$$

Здесь и далее k_i — постоянные, зависящие лишь от m и n, c_i — постоянные, зависящие и от других параметров задачи. Соотношение (29) и неравенство Юнга позволяют получить оценку правой части неравенства (27).

$$g_{s-i}(T) \int\limits_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x,T)\,dx + \iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu^2_{s-i} u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt \le$$
$$\le (k_2 h_1^{-1} A_1 + \varepsilon) \iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu^2_{s-i} u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt + c_1(\varepsilon) k_3 A_2 \mathcal{H}_{s-1,s-i},$$

где $$\mathcal{H}_{\tau,s} = \iint\limits_{G_\tau} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha^2(x,t) \Lambda_{\mu(s)}^{-2(m-|\alpha|)}(t,|x|) g_s(t)\,dxdt,$$

$$A_1 = a_2 h_1^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_1^{-2(m-j-1)} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) + a_2 \sum_{j=0}^{m-1} h_1^{-2(m-j-1)} (d_2 + d_3 d_1^{2j})^{1/2},$$

$$A_2 = \sum_{j=1}^{m-1} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) h_1^{-2(m-j)}.$$

Из последнего неравенства видно, что постоянную h_1 можно выбрать так, чтобы для всех $s = 1, 2, \ldots, \quad i < s$, имела место серия оценок

$$\langle u_s \rangle_{s-1,s-i} = \iint\limits_{G_{s-1}} (|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t)\, dxdt \le c_2 \mathcal{H}_{s-1,s-i}. \qquad (30)$$

Далее используем энергетическую априорную оценку типа принципа Сен-Венана для решений однородной задачи $(1^0), (2)$ $(F_\alpha(x,t) \equiv 0, |\alpha| \le m)$ ([11]):

Теорема 3.*Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи $(1^0), (2)$. Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $\psi(\tau) > 1$ и для всех $\tau : 0 < \tau_0 < \tau < \infty$ выполнены условия (6)–(8), а также условие (10) с постоянной $h_1 > 0$, зависящей от известных параметров. Тогда для $\tau_1, \tau_2 : \tau_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \infty$ справедливо соотношение*

$$I(\tau_1) \equiv \int\limits_{-y(\tau_1)}^{T} \int\limits_{\Omega_t(\tau_1)} [|D^m u|^2 + \mu^2(\tau_1) u^2] g_{\tau_1}(t)\, dxdt \le \theta^{-1} \exp\Big(-\nu \ln \theta^{-1} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big) I(\tau_2), \qquad (31)$$

где $0 < \theta < 1$ зависит только от известных величин.

Обозначим $\langle u_s \rangle_k = \langle u_s \rangle_{k,k}$. Зафиксируем произвольный номер $k < \infty$ и оценим $\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1}$ при $s, s' \to \infty$. В силу теоремы 3 для произвольного $s \ge 1$ в области G_{k-1} для функции $v(x,t) = u_{k+s} - u_{k+s+1}$, удовлетворяющей однородному уравнению (21^0) $(F_\alpha(x,t) \equiv 0,\ |\alpha| \le m)$ и условию (23), выполнено неравенство

$$\langle v \rangle_{k-1} = \langle u_{k+s} - u_{k+s+1} \rangle_{k-1} \le \theta^{-1} \exp\Big(-\nu \ln \theta^{-1} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big) \langle u_{k+s} - u_{k+s+1} \rangle_{k+s-1}.$$

Поэтому, учитывая оценку (30), получим, что

$$\begin{gathered}
\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1} \le \sum_{i=0}^{s'-1} \langle u_{k+s+i} - u_{k+s+i+1} \rangle_{k-1} \le \\
\le \theta^{-1} \sum_{i=0}^{s'-1} \exp\Big(-\nu \ln \theta^{-1} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big) \langle u_{k+s+i} \rangle_{k+s+i-1} + \langle u_{k+s+i+1} \rangle_{k+s+i,k+s+i-1} \le \\
\le \theta^{-1} c_2 \sum_{i=0}^{s'-1} \exp\Big(-\nu \ln \theta^{-1} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big) \Big(\mathcal{H}_{k+s+i-1} + \mathcal{H}_{k+s+i,k+s+i-1}\Big)
\end{gathered} \qquad (32)$$

Рост правой части уравнения (1) определяется условием (11). Поэтому из неравенства (32) следует, что

$$\langle u_{k+s}-u_{k+s+s'}\rangle_{k-1} \le 2\theta^{-1}c_2 M\sum_{i=0}^{s'-1}\exp\Big(-\nu\ln\theta^{-1}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big)\exp\Big(\gamma\int\limits_{\tau_0}^{\tau_{k+s+i-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big)\le$$

$$\le 2c_2M\theta^{-1}\exp\Big(\gamma\int\limits_{\tau_0}^{\tau_{k-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big)\exp\Big[(\gamma-\nu\ln\theta^{-1})\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big]\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\exp\Big[(\gamma-\nu\ln\theta^{-1})\int\limits_{\tau_{k+s-1}}^{\tau_{k+s+i-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big].$$

Последовательность $\{\tau_s\}$ и число γ удовлетворяют условиям (12) и (13), поэтому ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\exp\Big[(\gamma-\nu\ln\theta^{-1})\int\limits_{\tau_{k+s-1}}^{\tau_{k+s+i-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\Big]$ сходится, $\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}}\frac{dz}{z\varphi(z)}\to\infty$ при $s\to\infty$, а значит,

$$\langle u_{k+s}-u_{k+s+s'}\rangle_{k-1}\to 0 \quad \text{при} \quad s,s'\to\infty. \tag{33}$$

Из сходимостей (33) следует, что для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\|u_{k+s}-u_{k+s+s'}\|_{L_2(-y(\tau_{k-1}),T;\,W_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))}\to 0 \text{ при } s,s'\to\infty,$$

т.е. последовательность $\{u_s\}$ фундаментальна в $L_2(-y(\tau_{k-1}),T;\,W_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))$ при любом $k\in\mathbb{N}$, следовательно существует функция $u(x,t)\in L_2(-y(\tau_{k-1}),T;\mathring{W}_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|u_s-u\|_{W_2^{m,0}(G',\partial G'\setminus\partial G)}=0$ в любой ограниченной подобласти $G'= G_\rho^\nu(\tau)\subset G$. Далее, из уравнения (21) следует, что $\frac{\partial u_s}{\partial t}\in(\mathring{W}_2^{m,0}(G_{k-1}))^*$, а значит, существует функция $w\in(\mathring{W}_2^{m,0}(G_{k-1}))^*$: $\langle w-\frac{\partial u_s}{\partial t},v\rangle\to 0$ при $s\to\infty$ для произвольной функции $v\in\mathring{W}_2^{m,0}(G_{k-1})$, т.е. $w=\frac{\partial u}{\partial t}$.

Покажем, что функция $u(x,t)$ является решением задачи (1),(2). Действительно, пусть $v(x,t)$ — произвольная функция из $\mathring{W}_2^{m,0}(G)$ с компактным носителем из G. Существует такой номер k_0, что $supp\ v\subset\widetilde{G}_k$ при всех $k\ge k_0$. В силу линейности уравнения

$$L(u,v)\equiv\langle u_t,v\rangle+\iint\limits_G\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}a_{\alpha\beta}D^\alpha uD^\beta v\,dxdt=L(u-u_k,v)+L(u_k,v).$$

Пусть $u_k(x,t)$ — решение задачи (21)–(23) в области $\widetilde{G}_k$. Очевидно, $\big|L(u-u_k,v)\big|\to 0$ при $k\to\infty$. С другой стороны, т.к. $supp\ v\subset\widetilde{G}_k$, то

$$L(u_k,v)=\iint\limits_{\widetilde{G}_k}\sum_{|\alpha|\le m}F_\alpha^2D^\alpha v\,dxdt\ .$$

Следовательно, $u(x,t)$ — решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

Для доказательства следствия 2 выберем $\mu(\tau)=\mu_1=h_2Y(\tau)^{m/(2m-1)}$ и $\varphi(\tau)= h_0\tau^{-1}\mu_1^{-1/m}(\tau)$. Условия (6)–(8) выполнены с $h_2=(2m-1)(4m(h_0+\varepsilon))^{-1}\ln H_0$, $\varepsilon>0$, начиная с некоторого $\tau=\tau_0(\varepsilon)$ ([11]). При таких $\mu(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ условия (14) и (15) следуют из (11), (13).

Выбирая $\varphi(\tau) = h_o\tau^{-1}\Lambda^{-1}(t,\tau)$, немедленно получим утверждение следствия 3.

Доказательство теоремы 2 в основном совпадает с доказательством теоремы 1. Поэтому укажем только отличные моменты. Пусть $u_s(x,t)$ — решение уравнения (1^*) в области $\widetilde{G}_s$, удовлетворяющего условиям (22),(23). Аналогом неравенства (27) в этом случае является неравенство

$$g_{s-i}(T) \int\limits_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x,T)\,dx + \iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt \le$$

$$\le \iint\limits_{G_{s-1}} \sum_{|\alpha|\le m} |F_\alpha| \sum_{i=0}^{|\alpha|} |D^{|\alpha|-i} u_s| g_{s-i}(t)\,dxdt.$$

Для оценки правой части используем неравенство Юнга с ε, неравенство (28) и условия (9) и (6^*). В результате получим:

$$\iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt \le$$

$$\le \varepsilon \iint\limits_{G_{s-1}} (a_0|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t)\,dxdt + k_3 c_4(\varepsilon) \sum_{j=1}^{m} (d_2 + d_3 h_0^{-2j}) \mathcal{H}_{s-1,s-i},$$

откуда следует оценка (30).

При оценке $\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'}\rangle_{k-1}$ в области G_{k-1} основную роль играет утверждение типа принципа Сен-Венана ([11]):

Теорема 3^*. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение однородной задачи (1^{0*}), (2). Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$ и для всех $\tau : 0 < \tau_0 < \tau < \infty$ выполнены условия (6^*)- (8^*), (9). Тогда для $\tau_1, \tau_2 : \tau_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \infty$ и зависящей от известных параметров постоянной $\theta \in (0,1)$*

$$I(\tau_1) \le \theta^{-1} \exp\Big(-\nu c_0 \ln\theta^{-1} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dz}{z\varphi(z)}\Big) I(\tau_2).$$

Доказательство следствия 3. Условия (6^*)- (8^*) выполнены, если выбрать $\mu(\tau) = \mu_\varepsilon(\tau) = \big[(\beta-\varepsilon_0)(y'(\tau))^{-1}\big]^{m/(2m-1)}$, $\varphi(\tau) = h_0\tau^{-1}\big[y'(\tau)(\beta-\varepsilon_0)^{-1}\big]^{1/(2m-1)}$ ([11]). При таких $\mu(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ условия (19),(20) следуют из (11) и (13).

Замечание. Существование решений задачи (1),(2) (или (1^*),(2)) с квалифицированно растущей правой частью уравнения при $|x| \to \infty$ доказано в областях $G : G \subset \Pi$, где Π — предельный параболоид: $\Pi = \{(x,t) : t > -\alpha|x|^{2m}\}$, $\alpha > 0$ зависит лишь от известных параметров.

1. *Lions J.L.* Une remarque sur les problemes devolution non lin eaires dans des domaines non cylindriques // Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquees. - 1964. - 9.- P.11-18.
2. *Fujita H., Sauer N.* Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equation in a noncylindrical domain // Bull. Amer. Math. Soc. - 1969. - 75. - P.465-468.

3. *Medeiros L.A.* Non-linear wave equations in domains with variable boundary // Arch. Rational Mech. and Anal. - 1972. - 47,№1. - P.47-58.
4. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system // Математичні студії. - 1998. - 9, №1. - С.21-28.
5. *Bokalo M., Dmytriv V.* A Fourier problem for quaşi-linear paabolic equations of arbitrary order in noncylindric domains // Математичні студії. - 2000. - 14, №2. - С.175-188.
6. *Lions J.L.* Sur les problemes mixted pour certains systemes paraboliques dans des ouverts non cylindriques // Ann. Inst. Fourier. - 1957.- 7. - P.143-182.
7. *Гасанова И.А.* Разрешимость первой краевой задачи для параболических уравнений в нецилиндрических областях // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат.наук. - 1988. - №1. С.34-39.
8. *Кожанов А.И., Ларькин Н.А.* Волновое уравнение с нелинейной диссипацией в нецилиндрических областях // Докл.РАН. - 2000. - 374, №1. - С.17-19.
9. *Шишков А.Е.* Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Диф.уравнения. - 1990. - 26, №9. - С.1627-1633.
10. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // УМН. - 1978. - 33, в.5. - С.7-73.
11. *Шишков А.Е.* Принцип Сен-Венана для квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка и его приложения - Киев. - 1987. - 40с. - (Препринт/ Ин-т математики АН УССР.; 87.23.)

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24
83055, Донецк, Украина

Получено 14.10.2004