УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-16

©2018. **В.С. Шпаківський**

ГІПЕРКОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

В даній роботі пропонується процедура побудови нескінченної кількості сімейств розв'язків заданих лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. При цьому використовуються моногенні (тобто неперервні і диференційовні в сенсі Гато) функції, що визначені на певних послідовностях комутативних асоціативних алгебр над полем комплексних чисел. Для досягнення цієї мети, спочатку вивчаються розв'язки, так званого, характеристичного рівняння на заданій послідовності алгебр. Далі вивчаються моногенні функції на послідовності алгебр та досліджується їх зв'язок з розв'язками рівняннь в частинних похідних. Запропонований метод застосовано до побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики. Зокрема, для тривимірних рівняння Лапласа та хвильового рівняння, для рівняння поперечних коливань пружного стержня та спряженого з ним, узагальненого бігармонічного рівняння та двовимірного рівняння Гельмгольца.

MSC: 30G35, 57R35.

Ключові слова: *комутативна асоціативна алгебра, моногенна функція, характеристичне рівняння, розширення комутативної алгебри.*

1. Вступ.

Нехай $\mathbb{A}$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і нехай $e_1, e_2, \ldots, e_d$ — набір векторів в $\mathbb{A}$, де нутуральне число $d \geq 2$. Позначимо $\zeta := x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ і визначимо на алгебрі $\mathbb{A}$ експоненціальну функцію $\exp\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду

$$\exp\zeta := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^r}{r!}\,. \tag{1}$$

Похідна від функції $\Phi(\zeta) = \exp\zeta$ розуміється як формальна похідна ряду (1). Як наслідок, $\frac{\partial}{\partial x_j}\exp\zeta = e_j \exp\zeta$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

Нехай $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Позначимо $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, 2, \ldots, d$, і $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$. Розглянемо загальне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{2}$$

де

$$E_k(u) := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d}\, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\,, \quad C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \in \mathbb{R}.$$

Внаслідок рівності

$$E(u) = (E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^*) \exp \zeta,$$

де

$$E_k^* := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d}\, e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots e_d^{\alpha_d},$$

функція $\exp \zeta$ задовольняє рівняння (2), якщо вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ задовольняють *характеристичне* рівняння

$$E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^* = 0. \tag{3}$$

Оскільки рівняння (2) лінійне, то всі комплекснозначні компоненти розкладу функції $\exp \zeta$ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є його розв'язками.

Якщо ж рівняння (2) має вигляд

$$E_p(u) = 0, \tag{4}$$

то, очевидно, що при виконанні умови $E_p^*(u) = 0$ не лише $\exp \zeta$ є розв'язком рівняння (4), але й довільна $\mathbb{A}$-значна аналітична функція Φ змінної ζ. Аналогічно, усі комплекснозначні компоненти розкладу функції Φ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є розв'язками рівняння (4).

Такий підхід до побудови розв'язків заданих диференціальних рівнянь в частинних похідних використовувався в багатьох роботах, зокрема в роботах [1–14].

Таким чином, маємо дві задачі. Задача (З 1) — описати всі набори векторів $e_1, e_2, \ldots, e_d$, які задовольняють характеристичне рівняння (3) (або вказати процедуру за якою вони знаходяться), а друга задача (З 2) — описати всі компоненти аналітичної функції. Зокрема, для рівняння (4) — описати компоненти функції $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$.

Відмітимо, що в роботах [15, 16] отримано конструктивний опис усіх аналітичних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$. Теорема 5.1 роботи [17] стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (2) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних асоціативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ — нільпотенти. А в роботі [18] показано, що в кожній алгебрі з базисом виду $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ рівняння (3) має розв'язки. Тобто, на класах комутативних асоціативних алгебр з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ задачі (З 1) та (З 2) повністю розв'язані.

Варто зауважити, що в скінченновимірних алгебрах розклад аналітичної функції за базисом має скінченну кількість компонент, а тому породжує скінченне число розв'язків заданого диференціального рівняння в частинних похідних.

В даній роботі пропонується процедура побудови нескінченної кількості сімейств розв'язків заданих рівнянь з частинними похідними, використовуючи аналітичні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр. Для досягнення цієї мети, в п. 2 вивчаються розв'язки характеристичного рівняння (3) на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а в п. 5 вивчаються аналітичні функції на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ та їх зв'язок з розв'язками рівняння (2). В пп. 9 – 14 даний метод застосовано до побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики.

2. Послідовності розширень комутативної алгебри.

Нехай $\mathbb{A}_n$ — довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та з єдиним ідемпотентом — одиницею алгебри. За теоремою Е. Картана [19, с. 33] в алгебрі $\mathbb{A}_n$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^{s}$ такі, що виконуються наступні правила множення:

$$\forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,n-1\} \qquad I_r\, I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k\,, \tag{5}$$

тобто

$\cdot$	1	I_1	I_2	$\ldots$	I_{n-1}
1	1	I_1	I_2	$\ldots$	I_{n-1}
I_1	I_1	$\sum\limits_{k=2}^{n-1} \Upsilon_{1,k}^{1} I_k$	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k$	$\cdots$	0
I_2	I_2	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k$	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{2} I_k$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_{n-1}	I_{n-1}	0	0	$\cdots$	0

. (6)

Покладемо $I_0 := 1$.

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, \widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n\}$ виду (5):

$$\forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad \widetilde{I}_r\, \widetilde{I}_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \widetilde{\Upsilon}_{r,k}^{s}\, \widetilde{I}_k\,. \tag{7}$$

Означення 1 [18]. Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ називається розширенням алгебри $\mathbb{A}_n$, якщо справедливі рівності

$$\widetilde{\Upsilon}_{r,k}^{s} = \Upsilon_{r,k}^{s} \tag{8}$$

$$\forall\, k \in \{2,\ldots,n-1\} \quad \forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

При $n = 2$ за означенням покладаємо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, з таблицею множення

$\cdot$	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
1	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_1$	$\alpha\widetilde{I}_2$	0
$\widetilde{I}_2$	$\widetilde{I}_2$	0	0

є розширенням бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ (див., наприклад, [5]) з таблицею множення

$\cdot$	1	I_1
1	1	I_1
I_1	I_1	0

Зауважимо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ при всіх $\alpha \in \mathbb{C}$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{A}_3(1)$, моногенні функції в якій вивчались в роботі [6].

Зауваження 1. Іншими словами, рівність (8) означає, що якщо в таблиці множення виду (6) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ відкинути останній рядок і останній стовпчик і скрізь у таблиці множення елемент $\widetilde{I}_n$ замінити на нуль, то отримаємо таблицю множення алгебри $\mathbb{A}_n$.

Розглянемо приклади розширень.

Приклад 1. [18]. Кожна з наведених нижче алгебр є розширенням попередньої алгебри.

$\mathbb{B} \to \mathbb{A}_3(1) \to$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3
1	1	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1	I_2	I_3	0
I_2	I_2	I_3	0	0
I_3	I_3	0	0	0

$\to$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3	I_4
1	1	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	I_1	I_2	I_3	I_4	0
I_2	I_2	I_3	I_4	0	0
I_3	I_3	I_4	0	0	0
I_4	I_4	0	0	0	0

Можна говорити також про *послідовність розширень.*

Означення 2. Послідовність алгебр $\{\mathbb{A}_n\}_{n=2}^{\infty}$ виду (6) називатимемо послідовністю розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо кожна наступна алгебра $\mathbb{A}_{n+1}$ є розширенням попередньої алгебри $\mathbb{A}_n$.

Очевидно, що $\mathbb{E}^2 \equiv \mathbb{B}$, $\mathbb{E}^3$ співпадає з однією із алгебр $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ і т. д.

Приклад 2. Очевидно, що наведені в прикладі 1 алгебри мають такі відповідні базиси: $\{1, \rho^1\}$, $\rho^2 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2\}$, $\rho^3 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2, \rho^3\}$, $\rho^4 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$, $\rho^5 = 0$. Для кожного натурального n розглянемо алгебру $\mathbb{A}_n$ з базисом $\{1, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$, $\rho^{n+1} = 0$. Очевидно, що $(n+1)$-ша алгебра є розширенням n-ї алгебри. Тому послідовність алгебр $\{\mathbb{A}_n\}_{n=2}^{\infty}$ з базисами $\{1, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$ і властивістю $\rho^{n+1} = 0$ є *послідовністю розширень.*

3. Розв'язки рівняння (3) на послідовності розширень.

Означення 3. Будемо казати, що вектор $e(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} c_r I_r$, $c_r \in \mathbb{C}$, визначений на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо при кожному $n = 2, 3, \ldots$ справедливе співвідношення $e(n) \in \mathbb{E}^n$.

Означення 4. Скажемо, що рівняння (3) має розв'язки на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо при кожному $n = 2, 3, \ldots$ існують вектори $e_1(n)$, $e_2(n), \ldots$, $e_d(n)$ алгебри $\mathbb{E}^n$, які задовольняють рівняння (3) в $\mathbb{E}^n$.

Теорема 1. *На кожній послідовності розширень* $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ *рівняння (3) має розв'язки.*

Доведення. Повністю аналогічно до доведення теореми 2.3 з роботи [18] доводиться, що при кожному $n = 2, 3, \ldots$ в алгебрі $\mathbb{E}^n$ рівняння (3) має розв'язки. $\square$

Зауваження 2. Більше того, серед розв'язків $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$ рівняння (3) на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ завжди можна $d-1$ вектор визначити довільним чином на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а останній вектор виражається рекурентними співвідношеннями через вибрані $d-1$ векторів. Нехай для визначеності

$$e_d(n+1) = f\big(e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_{d-1}(n+1), e_d(n)\big). \tag{9}$$

Збільшуючи як завгодно n, визначаємо вектор $e_d(n)$ на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Очевидно, що рекурентні формули (9) визначаються рівнянням (3) і послідовністю розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Прикладом рекурентних співвідношень (9) є формули (15) з роботи [11]. Також відмітимо, що якщо у змінній $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ перейти до "базису" послідовності розширень, то ми фактично отримуємо нескінченновимірну змінну ζ.

4. Моногені функції.

Нехай вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$, які задовольняють характеристичне рівняння (3) в $\mathbb{A}_n$, мають наступний розклад в базисі алгебри:

$$e_j = \sum_{r=0}^{n-1} a_{jr}\, I_r\,, \quad a_{jr} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{10}$$

Для елемента $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, комплексне число

$$\xi := x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0}$$

називається *спектром* точки ζ.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n$ лінійну оболонку $E_d := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$.

Далі істотним є припущення: $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. В теоремі 4 роботи [16] встановлено підклас рівнянь вигляду (2) для яких умова $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ виконується при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Множині S простору $\mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in S\} \text{ в } E_d\,.$$

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_d$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_d.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ за базисом $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, I_k\,. \tag{11}$$

У випадку, коли функції $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто для довільного $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \Omega$

$$U_k\,(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_d + \Delta x_d) - U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\,\Delta x_j + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2}\right), \qquad \sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2 \to 0\,,$$

функція Φ моногенна в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли у кожній точці області Ω_ζ виконуються наступні аналоги умов Коші–Рімана:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\,e_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,e_j \qquad \text{при всіх} \quad j = 2, 3, \ldots, d.$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1 - \zeta)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, I_k \quad \forall\, t \in \mathbb{C} :\ t \neq \xi\,, \tag{12}$$

де A_k визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0 := \frac{1}{t-\xi}\,, \quad A_1 := \frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,,\ \ \xi_1 := x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_d a_{d1},$$

$$A_s = \frac{\xi_s}{(t-\xi)^2} + \frac{1}{t-\xi}\sum_{r=1}^{s-1} A_r\, B_{r,s} \tag{13}$$

при

$$\xi_s := x_1 a_{1s} + x_2 a_{2s} + \cdots + x_d a_{ds}\,,\ \ B_{r,s} := \sum_{k=1}^{s-1} \xi_k \Upsilon_{r,s}^{k}\,, \quad s = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Із співвідношень (12) випливає, що точки $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, які відповідають необоротним елементам $\zeta \in E_d$, лежать на множині

$$M: \quad \begin{cases} x_1 \operatorname{Re} a_{10} + x_2 \operatorname{Re} a_{20} + \cdots + x_d \operatorname{Re} a_{d0} = 0, \\ x_1 \operatorname{Im} a_{10} + x_2 \operatorname{Im} a_{20} + \cdots + x_d \operatorname{Im} a_{d0} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

у просторі $\mathbb{R}^d$.

Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ. Це означає, що Ω_ζ містить відрізок $\{\theta_1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1) : \alpha \in [0,1]\}$ для всіх $\theta_1, \theta_2 \in \Omega_\zeta$ таких, що $\theta_2 - \theta_1 \in M_\zeta$. Позначимо

$$D := \{\xi = x_1 a_{10} + x_2 a_{20} + \cdots + x_d a_{d0} \in \mathbb{C} : \zeta \in \Omega_\zeta\}.$$

Теорема A [16]. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ і нехай хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt, \tag{15}$$

де F_k — деяка голоморфна функція в області D, а Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D і охоплює точку ξ.

Оскільки за умов теореми **A** кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_d : \xi \in D\},$$

тому надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ .

5. Розв'язки рівняння (4).

Відповідно до п. 1, компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (11) задовольняють рівняння (4). Крім того, очевидно, що зображення моногенної фукції (15) залежить від n — розмірності алгебри.

Далі дослідимо, як компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (11) залежать від n і від k.

Отже, маємо дві алгебри $\mathbb{E}^n$ та $\mathbb{E}^{n+1}$. В алгебрі $\mathbb{E}^n$ визначений набір векторів $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$, який задовольняє рівняння (3), а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ визначений інший набір векторів — $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$, який також задовольняє рівняння (3) (відносно вибору векторів $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$ див. зауваження 2). В $\mathbb{E}^n$ розглядаємо змінну $\zeta(n) = x_1 e_1(n) + x_2 e_2(n) + \cdots + x_d e_d(n)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n)\big)$, а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ розглядаємо змінну $\zeta(n+1) = x_1 e_1(n+1) + x_2 e_2(n+1) + \cdots + x_d e_d(n+1)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n+1)\big)$. Нехай $\Phi\big(\zeta(n)\big) : \Pi_{\zeta(n)} \to \mathbb{E}^n$ має вигляд (11), а моногенна функція $\Phi\big(\zeta(n+1)\big) : \Pi_{\zeta(n+1)} \to \mathbb{E}^{n+1}$ має вигляд

$$\Phi\big(\zeta(n+1)\big) = \sum_{k=0}^{n} V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, \widetilde{I}_k\,.$$

Повністю аналогічно до теореми 4.1 з роботи [18] доводиться співвідношення

$$U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \equiv V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad \text{при всіх } \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким чином, для побудови розв'язків рівняння (4) у вигляді компонент моногенної функції має сенс розглядати лише останню — n-ту компоненту $U_n(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції в $\mathbb{E}^n$ при кожному фіксованому n. Перейдемо до вичення поставленої задачі.

Праву частину рівності (15) подамо у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, W_k(x_1, \ldots, x_d, t) dt$$

і будемо розглядати функції $W_k(x_1, \ldots, x_d, t)$.

Підставляючи вираз для резольвенти (12) в рівність (15), враховуючи правила множення алгебри $\mathbb{E}^n$, отримаємо такі перші чотири значення:

$$W_0(x_1, \ldots, x_d, t) = F_0 A_0\,,$$

$$W_1(x_1, \ldots, x_d, t) = F_1 A_0 + \widetilde{F}_0 A_1\,,$$

$$W_2(x_1, \ldots, x_d, t) = F_2 A_0 + \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2} + \widehat{F}_0 A_2\,,$$

$$W_3(x_1, \ldots, x_d, t) = F_3 A_0 + \Big(\widehat{F}_1(t)\Upsilon^1_{1,3} + \widetilde{F}_2(t)\Upsilon^1_{2,3}\Big) A_1 +$$

$$+ \Big(\widehat{F}_1(t)\Upsilon^1_{2,3} + \widetilde{F}_2(t)\Upsilon^2_{2,3}\Big) A_2 + \widetilde{\widetilde{F}}_0(t) A_3\,,$$

де F з усіма індексами і тільдами довільні комплексні аналітичні функції.

Проаналізуємо отримані вирази. Відповідно до п. 1

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} W_0(x_1, \ldots, x_d, t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_0 A_0 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Розглянемо вираз для W_1. Оскільки аналітичні функції F_0, F_1 довільні, то вираз $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_1 A_0 dt$ задовольняє рівняння (2). Беручи до уваги, що $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W_1 dt$ є розв'язком рівняння (4) і що це рівняння лінійне, то й їх різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_1 - F_1 A_0) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_0 A_1 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що й наступна різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_2 - F_2 A_0 - \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widehat{F}_0 A_2 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Точно так само отримуємо наступний розв'язок:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{\widetilde{F}}_0(t) A_3 dt.$$

Збільшуючи як завгодно натуральне n, отримуємо нескінченне сімейство розв'язків рівняння (4):

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t) A_k \, dt \right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{16}$$

де F_k — довільні аналітичні функції комплексної змінної, а A_k визначені рекурентними формулами (13).

Далі вкажемо сімейство розв'язків рівняння (2). З цією метою зазначимо, що визначення функції $\exp\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду (1) рівносильне її визначенню у вигляді головного продовження голоморфної функції комплексної змінної e^z в алгебру $\mathbb{E}^n$:

$$\exp\zeta := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^z (z-\zeta)^{-1} dz, \tag{17}$$

де γ — спрямлювана кривая в комплексній площині, що охоплює точку $\xi = x_1 a_{10} + x_2 a_{20} + \cdots + x_d a_{d0}$ (див., наприклад, [20, с. 182]). А оскільки функція (17) задовольняє рівняння (2), то і її компоненти також задовольняють це рівняння. Тобто, для рівняння (2) будемо мати таке нескінченне сімейство розв'язків:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^t A_k \, dt \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{18}$$

6. Послідовність розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$.

У цьому пункті на конкретній послідовності розширень випишемо розв'язки виглядів (16) та (18).

Через $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ позначимо послідовність розширень, наведену в прикладі 2. На послідовності $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ у розкладі резольвенти (12) коефіцієнти A_k визначаються наступними рекурентними співвідношеннями (див. [11]):

$$A_0 := \frac{1}{t-\xi}\,,\ A_s = \frac{1}{t-\xi}(\xi_s A_0 + \xi_{s-1} A_1 + \cdots + \xi_1 A_{s-1}),\ s = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Тобто, маємо такі перші значення:

$$A_1 = \frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,, \quad A_2 = \frac{\xi_2}{(t-\xi)^2} + \frac{\xi_1^2}{(t-\xi)^3}\,,$$

$$A_3 = \frac{\xi_3}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\,,$$

$$A_4 = \frac{\xi_4}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{(t-\xi)^3} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{(t-\xi)^4} + \frac{\xi_1^4}{(t-\xi)^5}\,,$$

$$A_5 = \frac{\xi_5}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3}{(t-\xi)^3} + \frac{3\xi_1^2\xi_3 + 3\xi_1\xi_2^2}{(t-\xi)^4} + \frac{4\xi_1^3\xi_2}{(t-\xi)^5} + \frac{\xi_1^5}{(t-\xi)^6}\,,$$

$$A_6 = \frac{\xi_6}{(t-\xi)^2} + \frac{\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4}{(t-\xi)^4} +$$
$$+ \frac{4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2}{(t-\xi)^5} + \frac{5\xi_1^4\xi_2}{(t-\xi)^6} + \frac{\xi_1^6}{(t-\xi)^7}\,,$$

і т. д.

7. Розв'язки рівняння (2).

Далі на $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ випишемо експоненту (1). Для цього зауважимо, що $A_r = A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big)$, де $s = \{2, 3, \ldots, r+1\}$.

Введемо деякі визначення. Нехай $\varphi(t-\xi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ — довільна комплексна функція від $(r+1)$ комплексних змінних. Визначимо лінійний оператор P, який кожній функції φ ставить у відповідність функцію від r змінних за правилом

$$P\varphi\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) = \varphi\Big((s-1)!\,, \xi_1, \ldots, \xi_r\Big) \qquad \forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}.$$

Так, наприклад,

$$P\left(\frac{\xi_3}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\right) = \xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\,.$$

Тепер визначимо функції

$$\Psi_0 := 1, \quad \Psi_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) := P\,A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) \tag{20}$$
$$\forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Лема 1 [11]. *На послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ справедлива рівність*

$$\exp\zeta = e^\xi \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_r\,\rho^r, \tag{21}$$

де коефіцієнти Ψ_r визначені співвідношеннями (20).

Випишемо декілька перших членів розкладу експоненти (21):

$$\exp\zeta = e^\xi\left[1 + \xi_1\,\rho + \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2!}\right)\rho^2 + \left(\xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\right)\rho^3 + \right.$$
$$+ \left(\xi_4 + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{2!} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^4}{4!}\right)\rho^4 +$$
$$\left. + \left(\xi_5 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \frac{\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3}{2!} + \frac{\xi_1^3\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^5}{5!}\right)\rho^5 + \cdots\right].$$

Оскільки функція $\exp\zeta$ задовольняє рівняння (2), то її комплексні компоненти $V_r(t,x)$ розкладу

$$\exp\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} V_r(t,x)\,\rho^r \tag{22}$$

також задовольняють рівняння (2). Сформулюємо це в наступному вигляді.

Теорема 2. *Рівняння (2) задовольняють комплексні функції*

$$V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d) = \Psi_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\xi(x_1,x_2,\ldots,x_d)} \tag{23}$$

при всіх $r = 0,1,\ldots$, де поліноми Ψ_r визначаються рівностями (20).

Зауваження 3. Виділяючи в комплексному розв'язку V_r дійсну і уявну частини, отримуємо два дійсні розв'язки рівняння (2) вигляду

$$V_{r,1} = U_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\cos\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

$$V_{r,2} = R_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\sin\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

де U_r , R_r — деякі поліноми степеня r, а $\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \mathrm{Re}\,\xi$, $\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \mathrm{Im}\,\xi$.

В наступній теоремі встановлюється властивість розв'язків вигляду (23) рівняння (2).

Теорема 3. *Для розв'язків (23) рівняння (2) справедливі рівності*

$$\sum_{r+s=n} \int_\gamma V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,d\xi_s = 0 \qquad \forall\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{24}$$

де γ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива у просторі $\mathbb{R}^d$, яка гомотопна точці.

Доведення. Відповідно до аналога теореми Коші (див. теорему 3 з роботи [21]), справедлива рівність $\int_\gamma \exp\zeta\,d\zeta = 0$. Нехай $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ фіксоване. Враховуючи позначення (22), отримуємо рівності

$$\int_\gamma \exp\zeta\,d\zeta = \int_\gamma \sum_{r=0}^{n} V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,\rho^r \sum_{s=0}^{n} d\xi_s\,\rho^s =$$

$$= \int_\gamma \sum_{0\le r+s\le n} V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,d\xi_s\,\rho^{r+s} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при ρ^{r+s}, отримуємо співвідношення (24). $\square$

8. Розв'язки рівняння (4).

У цьому пункті на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ випишемо декілька перших сімейств розв'язків виду (16) рівняння (4). Для цього у вирази (16) підставимо перші коефіцієнти розкладу резольвенти (19). Якщо послідовність (16) позначити через $\{U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\}_{k=0}^{\infty}$, то перші значення цієї послідовності матимуть наступний вигляд:

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1'(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2'(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!} F_2''(\xi),$$

$$U_3 = \xi_3 F_3'(\xi) + \xi_1 \xi_2 F_3''(\xi) + \frac{\xi_1^3}{3!} F_3'''(\xi),$$

$$U_4 = \xi_4 F_4'(\xi) + \frac{1}{2}(2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2) F_4''(\xi) + \frac{\xi_1^2 \xi_2}{2} F_4'''(\xi) + \frac{\xi_1^4}{4!} F_4^{(4)}(\xi),$$

$$U_5 = \xi_5 F_5'(\xi) + (\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3) F_5''(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3) F_5'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\xi_1^3\xi_2 F_5^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^5}{5!} F_5^{(5)}(\xi),$$

$$U_6 = \xi_6 F_6'(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4) F_6''(\xi) + \frac{1}{6}(\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4) F_6'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{4!}(4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2) F_6^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^4\xi_2}{4!} F_6^{(5)}(\xi) + \frac{\xi_1^6}{6!} F_6^{(6)}(\xi),$$

і т. д., де F_m при $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ — довільні аналітичні функції комплексної змінної.

Обчислюючи за рекурентною формулою (19) значення A_k, виписуємо нескінченну множину розв'язків рівняння (4), причому у кожному розв'язку міститься довільна аналітична функція.

Далі розглянемо кілька прикладів застосування даного методу.

9. Розв'язки тривимірного рівняння Лапласа.

У цьому пункті для тривимірного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{25}$$

побудуємо розв'язки виду (16). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ знайдемо усі трійки векторів e_1, e_2, e_3, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{26}$$

Для простоти сприйняття вектори e_1, e_2, e_3 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \rho^r, \quad e_3 = \sum_{r=0}^{\infty} g_r \rho^r, \quad k_r, m_r, g_r \in \mathbb{C}.$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$. В роботі [11] (див. формули (9), (10)) встановлено, що

$$B_0 = k_0^2\,, \quad B_1 = 2k_0k_1\,, \quad B_2 = k_1^2 + 2k_0k_2\,, \tag{27}$$

і в загальному випадку

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = \begin{cases} k_{r/2}^2 + 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ парному}, \\ 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ непарному}. \end{cases} \tag{28}$$

Очевидно, що рівняння (26) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) + B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) + B_r(g_0, g_1, \ldots, g_r) = 0, \tag{29}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots .$$

Відповідно до зауваження 2, вектори e_1, e_2 покладаємо довільними, а вектор e_3 виразимо через e_1 та e_2 рекурентними формулами виду (9). Тобто, $k_r\,, m_r$ є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (29), з урахуванням (27), маємо такі початкові значення:

$$g_0 = \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,, \quad g_1 = \frac{\pm i(k_0k_1 + m_0m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\,, \tag{30}$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (28), система (29) має такий розв'язок:

$$g_r = \begin{cases} \frac{-1}{2g_0}\Big[k_{r/2}^2 + m_{r/2}^2 + g_{r/2}^2 + 2\big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1} \\ +m_0m_r + m_1m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r}{2}-1}m_{\frac{r}{2}+1} \\ +g_1g_{r-1} + g_2g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r}{2}-1}g_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big] \qquad \text{при } r \text{ парному}, \\ \frac{-1}{g_0}\Big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}} \\ +m_0m_r + m_1m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r-1}{2}}m_{\frac{r+1}{2}} \\ +g_1g_{r-1} + g_2g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r-1}{2}}g_{\frac{r+1}{2}}\Big) \qquad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \tag{31}$$

з початковими значеннями (30). Зауважимо, що формула (31) є формулою виду (9) для рівняння (25).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y + g_0 z = k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z,$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y + g_r z$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому $k_r\,, m_r$ — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а g_r визначаються рекурентними формулами (31).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (16). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$U_0 = F_0\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

$$U_1 = \left(k_1 x + m_1 y \pm \frac{i(k_0 k_1 + m_0 m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\, z\right) F_1\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

$$U_2 = \Bigg(k_2 x + m_2 y \pm \frac{i}{2\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\Big(k_1^2 + m_1^2 + 2k_0 k_1 + 2m_0 m_1 -$$

$$- \frac{(k_0 k_1 + m_0 m_1)^2}{k_0^2 + m_0^2}\Big)\, z\Bigg) F_2\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(k_1 x + m_1 y \pm \frac{i(k_0 k_1 + m_0 m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\, z\right)^2 F_2'\left(k_0 x + m_0 y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

де $k_r\,, m_r$ при $r = 0, 1, 2,$ — довільні комплексні числа, а F_0, F_1, F_2 — довільні аналітичні функції комплексної змінної.

10. Розв'язки хвильового рівняння.

Маючи розв'язки рівняння (25) легко виписати розв'язки хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0. \tag{32}$$

Для рівняння (32) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 - \hat{e}_3^2 = 0. \tag{33}$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо трійка векторів* $e_1, e_2, e_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняє рівняння (26), то вектори* $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := e_2, \hat{e}_3 := ie_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняють рівняння (33) і навпаки.* Тобто, потрібно праві частини рівностей (30), (31) помножити на комплексну одиницю i. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi = k_0 x + m_0 y \pm \sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (32) матимуть вигляд:

$$W_0 = F_0\left(k_0 x + m_0 y \pm \sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

$$W_1 = \Big(k_1x + m_1y \pm \frac{k_0k_1 + m_0m_1}{\sqrt{k_0^2+m_0^2}}\, z\Big) F_1\left(k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2+m_0^2}\, z\right),$$

де k_0, m_0, k_1, m_1 — довільні комплексні числа, а F_0, F_1 — довільні аналітичні функції дійсної або комплексної змінної.

11. Розв'язки рівняння (34).

У цьому пункті для рівняння поперечного коливання пружного стержня (див., наприклад, [22, с. 940])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{34}$$

побудуємо розв'язки виду (23). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + a^2 e_2^4 = 0. \tag{35}$$

Вектори e_1, e_2 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^\infty k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^\infty m_r \rho^r, \quad k_r, m_r \in \mathbb{C}.$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^\infty B_r \rho^r, \quad e_2^2 = \sum_{r=0}^\infty C_r \rho^r$. Коефіцієнти B_r визначені рівностями (27) та (28). Коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r). \tag{36}$$

Відповідно до зауваження 2, вектор e_2 покладемо довільним, а вектор e_1 виразимо через e_2 рекурентними формулами виду (9). Для цього рівняння (35) перепишемо у вигляді $e_1^2 + (ae_2^2)^2 = 0$, звідки $e_1 = \pm i a e_2^2$, що рівносильно

$$k_r = \pm i\, a\, C_r, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Зауважимо, що формула (37) є формулою виду (9) для рівняння (34).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0x + m_0y = \pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0y,$$

а $\xi_r = k_rx + m_ry$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому m_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а k_r визначаються рекурентними формулами (37).

Таким чином, ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (23). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^\xi = e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$V_1 = \xi_1 e^\xi = \Big(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y\Big) e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2}\right) e^{\xi} =$$

$$= \left[\pm ia(m_1^2 + 2m_0 m_2)x + m_2 y + \frac{1}{2}(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y)^2 \right] e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

де m_0, m_1, m_2 — довільні комплексні числа.

12. Розв'язки рівняння $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$.

Маючи точні розв'язки рівняння (34), легко виписати розв'язки рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{38}$$

Для рівняння (38) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 - a^2 \hat{e}_2^4 = 0. \tag{39}$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо пара векторів $e_1, e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ задовольняє рівняння (35), то вектори $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ задовольняють рівняння (39) і навпаки.* Тобто, потрібно праву частину рівності (37) помножити на $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi = k_0 x + m_0 y = \pm\, a\, m_0^2\, x + m_0 y$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (38) матимуть вигляд:

$$W_0 = e^{\xi} = e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$W_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(\pm\, 2\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y \Big) e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

де m_0, m_1 — довільні комплексні числа.

13. Розв'язки узагальненого бігармонічного рівняння.

У цьому пункті для рівняння

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2p \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad p \in \mathbb{R} \tag{40}$$

побудуємо розв'язки виду (16). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^4 + 2p\, e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0. \tag{41}$$

Вектори e_1, e_2 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \rho^r, \quad k_r, m_r \in \mathbb{C}. \tag{42}$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (27), (28). Покладаючи $e_1^4 = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \rho^r$, коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = B_r(B_0, B_1, \ldots, B_r).$$

Якщо $e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} H_r \rho^r$, то коефіцієнти H_r визначаються рівностями

$$H_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) = B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r).$$

Аналогічно, для $e_2^4 = \sum_{r=0}^{\infty} D_r \rho^r$, коефіцієнти D_r, визначаються співвідношеннями

$$D_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) = H_r(H_0, H_1, \ldots, H_r).$$

Залишилось визначити коефіцієнти R_r із розкладу $e_1^2 e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} R_r \rho^r$. Враховуючи правила множення для послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$, маємо

$$R_r = B_0 H_r + B_1 H_{r-1} + \cdots + B_r H_0.$$

Тепер очевидно, що рівняння (41) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$D_r + 2pR_r + C_r = 0, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{43}$$

Відповідно до зауваження 2, вектор e_1 покладемо довільним, а вектор e_2 виразимо через e_1 рекурентними формулами виду (9). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (43), маємо такі початкові значення:

$$m_0 = \pm k_0 \sqrt{\pm\sqrt{p^2-1} - p}\,, \quad m_1 = -\frac{k_0^3 k_1 + p k_0 k_1 m_0^2}{m_0^3 + p k_0^2 m_0}\,,$$

$$m_2 = -\frac{m_0^2(3m_1^2 + pk_1^2 + 2pk_0k_2) + 3k_0^2(k_1^2 + 2k_0k_2 + pm_1^2) + 4pk_0k_1m_0m_1}{2m_0^3 + 2pk_0^2 m_0}\,, \tag{44}$$

де серед знаків $+, -$ вибирається будь-який. Зауважимо, що для визначення коефіцієнтів m_r при всіх $r = 3, 4, \ldots$ із рівностей (43) щоразу будемо отримувати лінійне рівняння.

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку, $\xi = k_0 x + m_0 y$, $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а m_r — визначаються із рекурентних формул (43) з урахуванням (44).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (16). Зокрема, маючи значення m_0, m_1, m_2 можемо виписати перші три розв'язки

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!} F_2'(\xi),$$

де F_0, F_1, F_2 — довільні аналітичні функції змінної ξ.

14. Розв'язки двовимірного рівняння Гельмгольца.

У цьому пункті для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{45}$$

побудуємо розв'язки виду (23). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$ знайдемо пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + e_2^2 + \lambda = 0. \tag{46}$$

Нехай вектори e_1, e_2 подаються у вигляді (42). Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$, $e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (27), (28), а коефіцієнти C_r визначаються формулою (36). Очевидно, що рівняння (46) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$\begin{gathered} k_0^2 + m_0^2 + \lambda = 0, \\ B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) + B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) = 0, \;\; r = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{47}$$

Вектор e_1 покладаємо довільними, а вектор e_2 виразимо через e_1 (9). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (47) маємо такі початкові значення:

$$m_0 = \pm i\sqrt{k_0^2 + \lambda}, \quad m_1 = \frac{\pm i k_0 k_1}{\sqrt{k_0^2 + \lambda}}, \quad m_2 = \frac{k_1^2 \lambda}{2m_0^3} - \frac{k_0 k_2}{m_0}, \tag{48}$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (28), система (47) має такий розв'язок:

$$m_r = \begin{cases} \frac{-1}{2m_0}\Big[k_{r/2}^2 + m_{r/2}^2 + 2\big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1} + \\ \quad + m_1m_{r-1} + m_2m_{r-2} + \cdots + m_{\frac{r}{2}-1}m_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big] \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } r \text{ парному}, \\ \frac{-1}{m_0}\Big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}} + m_1m_{r-1} + \\ \quad + m_2m_{r-2} + \cdots + m_{\frac{r-1}{2}}m_{\frac{r+1}{2}}\Big) \quad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \tag{49}$$

з початковими значеннями (48). Зауважимо, що формула (49) є формулою виду (9) для рівняння (45).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. В цьому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y = k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2 + \lambda},$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а m_r визначаються рекурентними формулами (49).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (23). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^{\xi} = e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}},$$

$$V_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(k_1 x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\, y\Big) e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2}\right) e^{\xi} =$$

$$= \left[k_2 x + \Big(\frac{k_1^2\lambda}{\sqrt{2m_0^3}} - \frac{k_0k_2}{m_0}\Big) y + \frac{1}{2}\Big(k_1 x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\, y\Big)^2\right] e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}},$$

де k_0, k_1, k_2 — довільні комплексні числа.

Зауваження 4. В роботі [11] даний метод застосовано до побудови точних розв'язків рівняння гідродинаміки

$$\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \alpha\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \beta\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

А в роботі [12] отримано гіперкомплексне представлення аналітичних розв'язків даного рівняння, використовуючи двовимірну комутативну алгебру.

Зауваження 5. Використовуючи запропонований в роботі метод, отримуємо усі аналітичні розв'язки дворимірного рівняння Лапласа

$$\Delta_2 u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{50}$$

та двовимірного бігармонічного рівняння

$$\Delta_2^2 u(x,y) = 0. \tag{51}$$

Зокрема, усі аналітичні розв'язки рівняння (50) отримуються у вигляді компоненти U_0, а всі розв'язки у вигляді компонент U_k при $k = 2, 3, \ldots$ будуть підмножиною розв'язків, що отримані у вигляді компоненти U_0. Для рівняння (51) загальний розв'язок отримуємо у вигляді суми $U_0 + U_1$. Причому, розв'язок $U_0 + U_1$ буде вточності співпадати з формулою Гурса загального розв'язку рівняння (51). А всі інші розв'язки U_k при $k = 3, 4, \ldots$ є підмножиною множини розв'язків $U_0 + U_1$.

Цитована література

1. *Ketchum P.W.* A Complete Solution of LaPlace's Equation by an Infinite Hypervariabl // American J. Math. – 1929. – **51**, No. 2. – P. 179–188.
2. *Ketchum P.W.* Solution of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables // American J. Math. – 1932. – **54**, No. 2. – P. 253–264.

3. *Roşculeţ M.N.* Funcţii monogene pe algebre comutative. – Bucuresti: Acad. Rep. Soc. Romania, 1975. – 339 p.
4. *Мельниченко И.П., Плакса С.А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
5. *Grishchuk S.V., Plaksa S.A.* Monogenic functions in a biharmonic algebra // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, No. 12. – P. 1865–1876.
6. *Plaksa S.A., Shpakovskii V.S.* Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, No. 8. – P. 1251–1266.
7. *Plaksa S.A., Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. – 2014. – **1**. – P. 1–13.
8. *Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R.M., Shapiro M.* Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras // Math. Meth. Appl. Sci. – 2014. – **37**, No. 17. – P. 2799–2810.
9. *Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R.M.* Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 5. – P. 624–632.
10. *Плакса С.А.* Аналитические решения одной системы эллиптических уравнений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 292–306.
11. *Шпаковский В. С.* Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 262–274.
12. *Шпаковский В.С.* Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. – 2016. – **30**. – С. 155–164.
13. *Plaksa S.A., Pukhtaevich R.P.* Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 5. – P. 740–751.
14. *Plaksa S.A., Pukhtaievych R.P.* Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. – 2014. – **22**, No. 1. – P. 221–235.
15. *Shpakivskyi V.S.* Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. – 2016. – **7**, No. 1. – P. 63–75.
16. *Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine. – 2015. – **12**, No. 3. – P. 251–268.
17. *Шпаківський В.С.* Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. – 2018. – **15**, No. 2. – P. 272–294.
18. *Шпаківський В.С.* Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геометр. центру. – 2018. – **11**, No. 3. – P. 1–18.
19. *Cartan E.* Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes // Annales de la faculté des sciences de Toulouse. – 1898. – **12**, No. 1. – P. 1–64.
20. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
21. *Shpakivskyi V.S.* Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2015. – **12**, No. 4. – P. 313–328.
22. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – Second Edition, Updated, Revised and Extended. 2016. – 1632 p.

References

1. Ketchum, P.W. (1929). A Complete Solution of LaPlace's Equation by an Infinite Hypervariable. *American J. Math. 51*(2), 179-188.
2. Ketchum, P.W. (1932). Solution of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables. *American J. Math. 54*(2), 253-264.
3. Rosculet, M.N. (1975). *Functii monogene pe algebre comutative.* Bucuresti: Acad. Rep. Soc. Romania.
4. Mel'nichenko, I.P., Plaksa, S.A. (2008). *Commutative algebras and spatial potential fields.* Kiev.

Inst. Math. NAS Ukraine (in Russian).
5. Grishchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2009). Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukr. Math. J., 61*(12), 1865-1876.
6. Plaksa, S.A., Shpakovskii, V.S. (2011). Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank. *Ukr. Math. J., 62*(8), 1251-1266.
7. Plaksa, S.A., Shpakivskyi, V.S. (2014). Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality. *J. Algerian Math. Soc., 1*, 1-13.
8. Pogorui, A., Rodriguez-Dagnino, R. M., Shapiro, M. (2014). Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Math. Meth. Appl. Sci., 37*(17), 2799-2810.
9. Pogorui, A., Rodriguez-Dagnino, R.M. (2017). Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions. *J. Math. Sci., 220*(5), 624-632.
10. Plaksa, S.A. (2012). Analytical solutions of one system of elliptic equations. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 9*(2), 292-306 (in Russian).
11. Shpakivskyi, V.S. (2017). Hypercomplex functions and exact solutions of one hydrodynamic equation. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 1*4(1), 262-274 (in Russian).
12. Shpakivskyi, V.S. (2016). Hypercomplex representation of analytical solutions of one hydrodynamic equation. *Proc. IAMM of NAS of Ukraine, 30*, 155-164 (in Russian).
13. Plaksa, S.A., Pukhtaevich, R.P. (2013). Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical. *Ukr. Math. J., 65*(5), 740-751.
14. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 22*(1), 221-235.
15. Shpakivskyi, V.S. (2016). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Adv. Pure Appl. Math., 7*(1), 63-75.
16. Shpakivskyi, V.S. (2015). Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 12*(3), 251-268.
17. Shpakivskyi, V.S. (2018). On monogenic functions defined in different commutative algebras. *Ukr. Math. Visnyk, 15*(2), 272-294. (in Ukrainian).
18. Shpakivskyi, V.S. (2018). On monogenic functions on extensions of commutative algebra. *Proc. Internat. Geometry Center, 11*(3), 1-18 (in Ukrainian).
19. Cartan, E. (1898). Les groupes bilineares et les systemes de nombres complexes. *Annales de lafaculte des sciences de Toulouse, 12*(1), 1-64.
20. Hille, E., Phillips, R. (1962). *Functional analysis and semigroups.* Moscow: Izdat. Inostran. Lit. (in Russian).
21. Shpakivskyi, V.S. (2015). Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 12*(4), 313-328.
22. Polyanin, A.D., Nazaikinskii, V.E. (2016). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Second Edition, Updated, Revised and Extended, New-York: Chapman and Hall/CRC.

V.S. Shpakivskyi

Hypercomplex method for solving linear PDEs.

Algebraic-analytic approach to constructing solutions for given partial differential equations were investigated in many papers. In particular, in papers [1 – 14]. It involves solving two problems. Problem (P 1) is to describe all the sets of vectors $e_1, e_2, \ldots, e_d$, which satisfy the characteristic equation (or specify the procedure by which they can be found). And the problem (P 2) is to describe all the components of monogenic (i. e., continuous and differentiable in sense Gateaux) functions. In particular, for the equation (4) we must describe the components of the function $\Phi(\zeta) = \exp\zeta$. Note that in the papers [15, 16] a constructive description of all analytic functions with values is obtained in an arbitrary finite-dimensional commutative associative algebra over the field $\mathbb{C}$. The Theorem 5.1 of the paper [17] states that it is enough to limit the study of monogenic functions in algebras with the basis of $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$, where $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ are nilpotents. In addition, in [18] it is showed that in each algebra with a basis of the form $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ the equation (3) has solutions. That is, the problems (P 1) and (P 2) are completely solved on the classes of commutative associative algebras with the basis $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$. It is worth noting that in a finite-dimensional algebra a decomposition of monogenic functions has a finite number of components, and therefore, it generates a finite number of solutions of a given partial differential equations. In this paper, we propose a procedure for constructing an infinite number of families of solutions of given linear differential equations with partial derivatives with constant coefficients. We use monogenic functions that are defined on some sequences of commutative associative algebras over the field of complex numbers. To achieve this goal, we first study the solutions of the so-called characteristic equation on a given sequence of algebras. Further, we investigate monogenic functions on the sequence of algebras and study their relation with solutions of partial deferential equations. The proposed method is used to construct solutions of some equations of mathematical physics. In particular, for the three-dimensional Laplace equation and the wave equation, for the equation of transverse oscillations of the elastic rod and the conjugate equation, a generalized biharmonic equation and the two-dimensional Helmholtz equation. We note that this method yields all analytic solutions of the two-dimensional Laplace equation and the two-dimensional biharmonic equation (Goursat formula).

Keywords: *commutative associative algebra, monogenic function, characteristic equation, expansion of commutative algebra.*

В.С. Шпакивский

Гиперкомплексный метод решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В данной работе предлагается процедура построения бесконечного множества семейств решений заданных линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. При этом используются моногенные (то есть, непрерывные и дифференцируемые по Гато) функции со значениями на определенных последовательностях коммутативных ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел. Для достижения данной цели, сначала изучаются решения, так называемого, характеристического уравнения на заданной последовательности алгебр. Дальше изучаются моногенные функции на последовательности алгебр та их связь с решениями уравнений в частных производных. Предложенный метод применено к построению решений некоторых уравнений математической физики. В частности, для трехмерного уравнения Лапласа та волнового уравнения, для уравнения поперечных колебаний упругого стержня та сопряженного с ним, обобщенного бигармонического уравнения та двумерного уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: *коммутативная ассоциативная алгебра, моногенная функция, характеристическое уравнение, расширения коммутативной алгебры.*

Інститут математики НАН України, Київ
`shpakivskyi86@gmail.com`

Отримано 03.11.18