УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-14

©2018. **С.М. Чуйко, Е.В. Чуйко, Я.В. Калиниченко**

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье предложены оригинальные условия регуляризации, а также схема нахождения решений линейной нетеровой краевой задачи для системы разностных уравнений, при этом существенно использована техника псевдообращения матриц по Муру–Пенроузу. Поставленная в статье задача продолжает исследование условий регуляризации линейных нетеровых краевых задач, приведенных в монографиях А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина, С.Г. Крейна, А.М. Самойленко, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной и А.А. Бойчука. Исследован общий случай, когда линейный ограниченный оператор, соответствующий однородной части линейной нетеровой краевой задачи, не имеет обратного. В статье построен обобщенный оператор Грина и найден вид линейного возмущения регуляризованой линейной краевой задачи для системы разностных уравнений. Предложенные условия регуляризации, а также схема нахождения решений линейных нетеровых краевых задач для системы разностных уравнений подробно проиллюстрированы на примерах. В отличие от более ранних статей авторов, задача о регуляризации линейной краевой задачи для системы разностных уравнений решена конструктивно, причем получены достаточные условия существования решения задачи о регуляризации.

MSC: 34B15.

Ключевые слова: *регуляризация, линейная нетерова краевая задача, системы разностных уравнений.*

1. Постановка задачи.

Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений $z(k) \in \mathbb{R}^n$ системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots \ ; \tag{1}$$

здесь $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ограниченные матрицы и $f(k)$ — действительные ограниченные вектор-столбцы. Как известно [1], общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для однородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде: $z(k) = X(k)c, \ c \in \mathbb{R}^n$; здесь $X(k)$ — нормальная фундаментальная матрица. Общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \ c \in \mathbb{R}^n;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

здесь

$$K[f(j)](k) := X(k) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1) f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (1). Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) существенно усложняется в случае ее вырождения, а именно: при условии $\det A(k) = 0$ хотя бы для некоторых $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. В этом случае для нахождения ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) можно использовать технику регуляризации [2–5]. Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы $A(k)$ будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\, \Omega(k),\ \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

предполагая матрицу $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon) z(k,\varepsilon) + f(k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Поскольку любая $(n \times n)$ – матрица $A(k)$ постоянного ранга σ в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения [6–8]

$$A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k),\ J_\sigma := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

постольку возмущение матрицы $A(k)$ представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k) \cdot \check{J}_{\sigma_0} \cdot S(k),\ \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix};$$

здесь $R(k)$ и $S(k)$ — ограниченные невырожденные матрицы.

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для однородной части невырожденной ($\det \mathcal{A}(k,\varepsilon) \neq 0$) системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c,\ c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $X(k,\varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon) X(k,\varepsilon),\ X(0,\varepsilon) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k,\varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j),\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что* $(n \times n)$ *– матрица* $A(k)$ *имеет постоянный ранг, а именно:*

$$1 \le \operatorname{rank} A(k) = \sigma < n.$$

Тогда общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ *для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:*

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + K[f(j)](k,\varepsilon),\ c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k,\varepsilon) := X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2).

Пример 1. *Найдем решение системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = Az(k) + f(k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения возмущенной матрицы

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{10} & 3\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\,\varepsilon & -2\,\varepsilon \\ 2\sqrt{10} & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},\ \mathcal{A}(k,0) = A,$$

определяющей регуляризованную систему линейных разностных уравнений используем возмущение матрицы A в виде

$$\Omega = R\cdot\check{J}_\sigma\cdot S,\ J_\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

При этом $X(k, \varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(1, \varepsilon) = X(0, \varepsilon) = I_3,$$

кроме того

$$X(2, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 & \frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} & -\frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}}\varepsilon & \frac{3}{5}\left(5 + \varepsilon^2\right) & 3 - \frac{3\,\varepsilon^2}{5} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} & 6 - \frac{3\,\varepsilon^2}{10} & 6 + \frac{3\,\varepsilon^2}{10} \end{pmatrix},$$

$$X(3, \varepsilon) = \frac{1}{10\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -30\,\varepsilon & 9\sqrt{10}\left(30 + \varepsilon^2\right) & -9\sqrt{10}\left(-30 + \varepsilon^2\right) \\ -6\sqrt{10}\left(-15 + \varepsilon^2\right) & 6\varepsilon\left(-5 + 3\varepsilon^2\right) & -18\varepsilon\left(5 + \varepsilon^2\right) \\ 3\sqrt{10}\left(60 + \varepsilon^2\right) & -9\varepsilon\left(-10 + \varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) представимо в виде:

$$z(k, \varepsilon) = X(k, \varepsilon)c + K[f(j)](k, \varepsilon), \;\; c \in \mathbb{R}^3;$$

здесь

$$K[f(j)](1, \varepsilon) = f(1), \;\; K[f(j)](2, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 - \sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon \\ 5 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](3, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 25 - \frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} \\ 18 - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon - \frac{3\,\varepsilon^2}{5} \\ 35 + \sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon + \frac{3\,\varepsilon^2}{10} \end{pmatrix}$$

— оператор Грина регуляризованной задачи Коши для системы разностных уравнений (3). При этом нормальная фундаментальная матрица $X(k, \varepsilon)$ и оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (3) $K[f(j)](k, \varepsilon)$ непрерывны по ε :

$$X(k, \cdot), \;\; K[f(j)](k, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

поэтому общее решение задачи Коши $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) $z(k, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ обращается в точное решение $z(k)$ системы разностных уравнений (3)

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \;\; c \in \mathbb{R}^3;$$

здесь

$$X(1) = I_3, \;\; X(2) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \;\; X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 27 & 27 \\ 9 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нормальная фундаментальная матрица и

$$K[f(j)](1) = f(1),\ K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} 25 \\ 18 \\ 35 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина вырожденной задачи Коши для системы разностных уравнений (3).

2. Регуляризация линейной невырожденной краевой задачи для системы разностных уравнений.

Задача о нахождении ограниченных решений $z(k)$ линейной нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи для линейной невырожденной системы разностных уравнений первого порядка

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k),\ \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{4}$$

была решена А.А. Бойчуком [1]; здесь $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный ограниченный векторный функционал, определенный на пространстве ограниченных функций. Обозначим матрицу $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а также

$$P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q),\ P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$$

— матрицы-ортопроекторы. Подставляя общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ неоднородного линейного разностного уравнения (4) в краевое условие (4)

$$z(k) = X(k)c + K\Big[f(s)\Big](k),$$

при условии $\det A(k) \neq 0$ приходим к уравнению

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot),$$

разрешимому тогда и только тогда, когда [1]

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

В этом случае решение $z(k)$ линейной невырожденной нетеровой краевой задачи (4) определяет вектор

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [1]; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора

$P_Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Таким образом [1], линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии $\det A(k) \neq 0$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (5); в этом случае решение $z(k)$ линейной нетеровой краевой задачи (4) представимо в виде:

$$z(k) = X_r(k)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](k),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) := X(k)P_{Q_r}$, $X(k)$ — нормальная $(X(0) = I_n)$ фундаментальная матрица,

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](k) := X(k)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина нетеровой линейной краевой задачи (4) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка. Следуя традиционной классификации краевых задач [1], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим. Случай $P_{Q^*} = 0$ назовем некритическим. Поставим задачу о регуляризации $[2, 3, 5]$ краевой задачи (4), а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение функционала $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяющего вид краевого условия (4) будем искать в виде

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0,\varepsilon) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

линейного ограниченного векторного функционала, определенного на пространстве ограниченных функций $z(k,\varepsilon)$. Таким образом, возмущение матрицы Q будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q + \varepsilon\, \Xi,\ \ 0 < \varepsilon \ll 1,\ \ \Xi \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ матрицей полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0,\ \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в частности, для фредгольмовой $(m = n)$ задачи (4), невырожденной. В случае нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи (4) условие полноты ранга матрицы $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ равносильно уравнению

$$\Big(Q + \varepsilon\, \Xi\Big) \cdot \Big(Q + \varepsilon\, \Xi\Big)^+ = I_m \tag{6}$$

относительно $(m \times n)-$ матрицы Ξ. Заметим, что в случае $P_{Q^*} \neq 0$ уравнение (6) разрешимо лишь для $m = n$, либо $m < n$. Действительно, предположим уравнение (6) переопределенным: $m > n$, при этом

$$\operatorname{rank}\Big(Q + \varepsilon\, \Xi\Big)\Big(Q + \varepsilon\, \Xi\Big)^+ \leq \operatorname{rank}\Big(Q + \varepsilon\, \Xi\Big) =$$

$$= \operatorname{rank} \left(Q + \varepsilon\, \Xi\right)^{+} \leq n < m,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (6). Поскольку любая $(m \times n)$ – матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения $Q = R \cdot J_\sigma \cdot S$, постольку возмущение матрицы Ξ представимо в виде

$$\Xi = R \cdot \check{J} \cdot S, \ \ \check{J} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & \check{J}_{(m-\sigma)\times(n-\sigma)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n};$$

здесь

$$\check{J}_{(m-\sigma)\times(n-\sigma)} \in \mathbb{R}^{(m-\sigma)\times(n-\sigma)}$$

— любая постоянная матрица полного ранга. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \ \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots$$

регуляризованной краевой задачи для системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1, \varepsilon) = A\, z(k, \varepsilon) + f(k), \ \ \mathcal{L}z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \tag{7}$$

В силу равенства $P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, регуляризованная краевая задача (7) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии* $\det A(k) \neq 0$ *в критическом случае:*

$$P_{Q^*} \neq 0, \ \ m \leq n$$

может быть регуляризована возмущением краевого условия:

$$\mathcal{L}z(\cdot, \varepsilon) := \ell z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0, \varepsilon), \ \ \Xi = R \cdot \check{J} \cdot S.$$

Регуляризованная краевая задача (7) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7), при этом решение $z(k)$ *линейной нетеровой краевой задачи (7) представимо в виде:*

$$z(k) = X_r(k) c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](k, \varepsilon), \ \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) = X(k) P_{Q_r}(\varepsilon)$, $X(k)$ *— нормальная* $(X(0) = I_n)$ *фундаментальная матрица,*

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](k, \varepsilon) = X(k) \mathcal{Q}^{+}(\varepsilon) \Big\{ \alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot) \Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина регуляризованной краевой задачи (7) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка.

Пример 2. *Найдем решение периодической задачи для системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = Az(k) + f,\ z(0) - z(4) = 0, \tag{8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i,\ \lambda_3 = 3 \neq 1$ — корни характеристического уравнения; в этом случае матрица A неособенным преобразованием подобия

$$A = S \cdot J \cdot S^{-1},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводится к жордановой форме

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

при этом общее решение линейной однородной системы разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$z(k+1) = Jz(k),\ k \in \mathbb{N}$$

представимо в виде

$$z(k) = Y(k)\,c,\ c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$Y(k) := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} & \sin\frac{\pi k}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\pi k}{2} & \cos\frac{\pi k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

— нормальная ($Y(0) = I_3$) фундаментальная матрица однородной части последней нормальной системы разностных уравнений. Общее решение однородной части системы (8) представимо в виде

$$z(k) = X(k)c,\ c \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$X(k)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2} & -\sin\frac{\pi k}{2} & \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2}+\sin\frac{\pi k}{2}-3^k & \cos\frac{\pi k}{2} & 3^k-\cos\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}-3^k & -\sin\frac{\pi k}{2} & 3^k+\sin\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица однородной части системы разностных уравнений (8); она определяет частное решение

$$K\Big[f(s)\Big](k)=\begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{\pi k}{2} \\ -\sin\frac{\pi k}{2} \\ 2\sin^2\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix},$$

представимое оператором Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (8). Поскольку матрица

$$Q=X(0)-X(4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 80 \\ -80 & 0 & 82 \end{pmatrix}$$

вырождена, постольку для краевой задачи (8) имеет место критический случай: $P_{Q^*}\neq 0$, при этом матрица Q базисе может быть представлена в виде стандартного разложения $Q=R\cdot J_\sigma\cdot S$, где

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица

$$\mathcal{Q}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -80-\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 80-\frac{\varepsilon}{2} \\ -80+\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 82+\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$$

невырождена, постольку

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon)=P_{\mathcal{Q}}(\varepsilon)=0,$$

следовательно регуляризованная задача (7) в случае краевой задачи (8) разрешима для любых неоднородностей, при этом

$$z(k,\varepsilon)=G\Big[f(s)\Big](k,\varepsilon);$$

здесь

$$G\Big[f(s);0\Big](k)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} \\ \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (8).

3. Регуляризация линейной вырожденной краевой задачи для линейной системы разностных уравнений.

Поставим задачу о регуляризации [2, 3, 5] краевой задачи (4) при условии $\det A(k) = 0$, а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы $A(k)$ будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\,\Omega(k),\ \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

предполагая матрицу $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений (2). Поскольку любая $(n \times n)$ — матрица $A(k)$ постоянного ранга σ может быть представлена в виде стандартного разложения $A(k) = R(k)\cdot J_\sigma \cdot S(k)$, постольку возмущение матрицы $A(k)$ представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k)\cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k),\ \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Одной из фундаментальных матриц является матрица

$$X(k,\varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + K[f(j)](k,\varepsilon),\ c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k,\varepsilon) := X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2). Поставим задачу о регуляризации краевой задачи (4) при условии

$$\det A(k) = 0,$$

а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение функционала $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяющего вид краевого условия (4) будем искать в виде

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\Xi z(0,\varepsilon) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

линейного ограниченного векторного функционала, определенного на пространстве ограниченных функций $z(k,\varepsilon)$. Таким образом, возмущение матрицы Q будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q + \varepsilon\,\Xi, \ \Xi \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ матрицей полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0, \ m \le n, \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в частности, для фредгольмовой ($m = n$) задачи (4), невырожденной. Поскольку любая $(m\times n)$ – матрица Q ранга σ_q может быть представлена в виде стандартного разложения $Q = R_1 \cdot J_{\sigma_q} \cdot S_1$, постольку матрица Ξ представима в виде

$$\Xi = R_1 \cdot \check{J}_{\sigma_q} \cdot S_1, \ \check{J}_{\sigma_q} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma_q} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots$$

регуляризованной краевой задачи для системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon)\,z(k,\varepsilon) + f(k), \ \mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{9}$$

В силу равенства $P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, регуляризованная краевая задача (9) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (9). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии* $\det A(k) = 0$ *в критическом случае:* $P_{Q^*} \ne 0, \ m \le n$ *может быть регуляризована возмущением матрицы* $A(k)$:

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\,\Omega(k), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, \ \Omega(k) = R(k) \cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k),$$

а также краевого условия:

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\Xi z(0,\varepsilon), \ \Xi = R \cdot \check{J} \cdot S.$$

Регуляризованная краевая задача (9) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7), при этом решение $z(k)$ *линейной нетеровой краевой задачи (9) представимо в виде:*

$$z(k) = X_r(k)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon), \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) = X(k)P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon)$, $X(k)$ — *нормальная* $(X(0) = I_n)$ *фундаментальная матрица,*

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon) = X(k)\mathcal{Q}^+(\varepsilon)\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— *обобщенный оператор Грина регуляризованной краевой задачи (9) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка.*

Пример 3. *Найдем решение двухточечной задачи для системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = A\,z(k) + f,\ \ \ell z(\cdot) := M\,z(0) + N\,z(3) = 0, \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ N := 10\sqrt{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная матрица $A(k)$ постоянного ранга $\sigma = 2$ в виде стандартного разложения, а также возмущение $\mathcal{A}(\varepsilon)$ матрицы $A(k)$ представлены в примере 1, при этом нормальная фундаментальная матрица $X(k,\varepsilon)$, соответствующая возмущенной матрице $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ была найдена там же. Возмущение матрицы

$$Q(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right) & -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q(\varepsilon) + \varepsilon\,\Xi,\ \Xi \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ невырожденной, находим

$$\Xi(\varepsilon) = R_1(\varepsilon)\cdot \check{J}_{\sigma_q}\cdot S_1(\varepsilon),\ \check{J}_{\sigma_q} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_1 \end{pmatrix},$$

где

$$R_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right)}{90\,\varepsilon - 9\,\varepsilon^3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим невырожденную матрицу

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right) & -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

которая определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[f(s)\Big](0,\varepsilon)=\begin{pmatrix}-\frac{90+2\sqrt{10}\,\varepsilon+3\,\varepsilon^2}{3(60+\varepsilon^2)}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ G\Big[f(s)\Big](1,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{90+2\sqrt{10}\,\varepsilon+3\,\varepsilon^2}{3(60+\varepsilon^2)}\\ -\frac{\varepsilon\left(4\sqrt{10}+3\,\varepsilon\right)}{3(60+\varepsilon^2)}\end{pmatrix},$$

$$G\Big[f(s)\Big](2,\varepsilon)=\begin{pmatrix}-\frac{30+6\sqrt{10}\,\varepsilon+5\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2}\\ \frac{180-18\sqrt{10}\,\varepsilon+7\varepsilon^2}{180+3\varepsilon^2}\\ \frac{540+9\sqrt{10}\,\varepsilon+7\varepsilon^2}{180+3\varepsilon^2}\end{pmatrix},\ G\Big[f(s)\Big](3,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\frac{780-9\sqrt{10}\,\varepsilon+15\,\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2}\\ -\frac{30+30\sqrt{10}\,\varepsilon+23\,\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2}\\ 0\end{pmatrix},$$

в свою очередь, определяемый оператором Грина задачи Коши для возмущенной системы разностных уравнений

$$K\Big[f(s)\Big](0,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ K\Big[f(s)\Big](1,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$K\Big[f(s)\Big](2,\varepsilon)=\begin{pmatrix}4\\ 1-\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon\\ 3+\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},\ K\Big[f(s)\Big](3,\varepsilon)=\begin{pmatrix}13-\frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}}\\ 4-2\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon-\frac{3\,\varepsilon^2}{5}\\ 9+\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon+\frac{3\,\varepsilon^2}{10}\end{pmatrix}.$$

Итак, найдено ограниченное решение $z(k,\varepsilon)$ регуляризованной краевой задачи (9) для линейной краевой задачи (10)

$$z(k,\varepsilon)=G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon),\ z(k,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

следовательно найдено ограниченное решение $z(k)$ линейной краевой задачи для вырожденной системы (10):

$$z(k):=G\Big[f(s);\alpha\Big](k,0),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

здесь

$$z(0)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ z(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\ z(2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix},\ z(3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}26\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты [1] на случай необратимости матрицы $A(k)$. Кроме того, полученные результаты аналогично [10] могут быть использованы в теории устойчивости для систем разностных уравнений, а также аналогично [11, 12] — в теории нелинейных нетеровых краевых задач для систем разностных уравнений. Предложенная в статье схема исследования аналогично [11,13–15] может быть перенесена на нелинейные краевые задачи для систем разностных уравнений.

Цитированная литература

1. *Бойчук А.А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 832–835.
2. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
5. *Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V.* On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. – 2014. – **1**. – P. 12–14.
6. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. – М.: Изд. МЦНМО, 2009. – 672 с.
7. *Чуйко С.М.* О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе // Укр. мат. вестник. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 1–17.
8. *Chuiko S.M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 235, № 1. – P. 2–18.
9. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
10. *Коробов В.И., Бебия М.О.* Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 20–25.
11. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 pp.
12. *Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения // Таврический вестник информатики и математики. – 2015. – № 1 (26). – С. 104–116.
13. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – **214**. – P. 200–219.
14. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – **215**, № 1. – P. 163–179.
15. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – **17**, № 1. – P. 139–150.

References

1. Boichuk, A.A. (1997). Boundary value problems for systems of difference equations. *Ukr. mat. zhurn., 49*(6), 832-835 (in Russian).
2. Krein, S.G. (1971). *Linear equations in Banach space.* Moscow: Nauka (in Russian).
3. Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya. (1986). *Methods for solving incorrect problems.* Moscow: Nauka (in Russian).
4. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (1991). *Introduction to the theory of functional differential equations.* Moscow: Nauka (in Russian).
5. Chuiko, S.M., Chuiko, E.V., Belushenko, A.V. (2014). On a regularization method for solving linear matrix equation. *Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math., 1*, 12-14.
6. Arnold, V.I., Varchenko, A.N., Guseyn-Zade, S.M. (2009). *Features of differentiable mappings.* 3rd ed. Moscow: Izd. MTsNMO (in Russian).
7. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Ukr. mat. vestnik, 15*(1), 1-17 (in Russian).
8. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *J. Math. Sci., 235*(1), 2-18.

9. Voevodin, V.V., Kuznetsov, Yu.A. (1984). *Matrices and calculations.* Moscow: Nauka (in Russian).
10. Korobov, V.I., Bebiya, M.O. (2014). Stabilization of a class of nonlinear systems uncontrollable by the first approximation. *Dopovidi NAN Ukraini, 2*, 20-25 (in Russian).
11. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
12. Chuiko, S.M. (2015). Generalized Green operator for a linear Fredholm boundary value problem for a matrix difference equation. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki, 1*(26), 104-116 (in Russian).
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *J. Math. Sci., 214*, 200-219.
14. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163-179.
15. Chuiko, S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes, 17*(1), 139-150.

S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko

On a regularization method for solving linear Noetherian boundary value problem for difference system.

The article proposes unusual regularization conditions as well as a scheme for finding bounded solutions of the linear Noetherian boundary value problem for a system of difference equations in the critical case, significantly using the Moore-Penrose matrix pseudo-inversion technology. The problem posed in the article continues the study of the a sufficient condition for solvability and regularization conditions for linear Noetherian boundary value problems in the critical case given in the monographs by A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin, S.G. Krein, A.M. Samoilenko, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boichuk. The general case is studied in which a linear bounded operator corresponding to a homogeneous part of a linear Noetherian boundary value problem has no inverse. The noninvertibility of the operators corresponding to a homogeneous part of a linear Noetherian boundary value problem is a consequence of the fact that the number of boundary conditions does not coincide with the number of unknown variables of the difference equations. Using the theory of generalized inverse operators and Moore-Penrose pseudoinverse matrix in the article, a generalized Green operator is constructed and the type of a linear perturbation of a regularized linear Noether boundary value problem for a system of difference equations in the critical case is found. The proposed regularization conditions, as well as the scheme for finding of bounded solutions to linear Noetherian boundary value problems for a system of difference equations in the critical case, are illustrated in details with examples. In contrast to the earlier articles of the authors, the regularization problem for a linear Noether boundary value problem for a system of difference equations in the critical case has been resolved constructively, and sufficient conditions has been obtained for the existence of a bounded solution to the regularization problem.

Keywords: *regularization, linear Noether boundary value problem, systems of difference equations.*

С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, Я.В. Калиниченко

Про регуляризацію лінійної нетерової крайової задачі для системи різницевих рівнянь.

У статті запропоновано оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для системи різницевих рівнянь, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром–Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна, С.Г. Крейна, М.В. Азбелева, А.М. Самойленка, Л.Ф. Рахматулліної та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної нетерової крайової задачі, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдений вигляд лінійного збурення регулярізованої лінійної крайової задачі для системи різницевих рівнянь. Запропоновані умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійних нетерових крайових задач для системи різницевих рівнянь детально проілюстровано на прикладах. На відміну від попередніх статей авторів, задача про регуляризацію лінійної крайової задачі для системи різницевих рівнянь розв'язана конструктивно, причому отримані достатні умови існування розв'язку задачі про регуляризацію.

Ключові слова: *регуляризація, лінійна нетерова крайова задача, системи різницевих рівнянь.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net

Получено 22.11.2018