УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-11

©2018. **В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов**

# О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПО ГЁЛЬДЕРУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ НА ГРАНИЦЕ

В статье найдены условия на комплексную коэффициент уравнений Бельтрами с вырождением условия равномерной эллиптичности в единичном круге, при которых обобщенные гомеоморфные решения непрерывны по Гёльдеру на границе. Результаты имеют прикладное значение при исследовании различных краевых задач для уравнений Бельтрами.

**MSC:** Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

***Ключевые слова:*** *непрерывность по Гёльдеру, уравнения Бельтрами, вырождение равномерной эллиптичности.*

## 1. Введение.

В серии недавних работ, при изучении краевых задач Гильберта, Дирихле, Неймана, Пуанкаре и Римана с произвольными измеримыми граничными данными для уравнения Бельтрами и обобщений уравнений Лапласа в анизотропных и неоднородных средах, использовалась логарифмическая ёмкость, см., например, [2–7]. Как хорошо известно, логарифмическая ёмкость совпадает с так называемым трансфинитным диаметром множества. Из этой геометрической характеристики следует, что множества нулевой ёмкости и, как следствие, функции измеримые относительно логарифмической ёмкости инвариантны при отображениях непрерывных по Гёльдеру. Это обстоятельство является мотивировкой нашего исследования.

В дальнейшем, $D$ — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. Пусть $\mu(z)\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в $D$. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)\, f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, $f_x$ и $f_y$ частные производные $f$ по $x$ и $y$, соответственно. Функция $\mu$ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

*дилатационным отношением* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu = \infty$.

Существование гомеоморфных решений класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ было недавно установлено для многих вырожденных уравнений Бельтрами при соответствующих условиях на дилатационное отношение $K_\mu$, см., напр., монографии [1] и [11] с дальнейшими ссылками в них.

**2. Определения и предварительные замечания.**

Прежде всего, напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{C}\longrightarrow [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в $\mathbb{C}$, пишут $\rho\in{\rm adm}\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(z)\,|dz|\geqslant 1 \tag{3}$$

для всех $\gamma\in\Gamma$. Соответственно, *модулем* семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{C}$ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in{\rm adm}\,\Gamma}\int\limits_{\mathbb{C}}\rho^2(z)\ dm(z)\ , \tag{4}$$

где $m$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}$.

Далее $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В дальнейшем, в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ мы используем *сферическую (хордальную) метрику*

$$h(z,\zeta)\colon=|\pi(z)-\pi(\zeta)|\,, \tag{5}$$

где $\pi$ — стереографическая проекция пространства $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу $S^2(\frac{1}{2}e_3,\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$h(z,\zeta)=\frac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+{|z|}^2}\sqrt{1+{|\zeta|}^2}},\quad z\neq\infty\neq\zeta, \tag{6}$$

$$h(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+{|z|}^2}}. \tag{7}$$

Отметим, что $h(z,\zeta)\leqslant 1$ , и $h(z,\zeta)\leqslant|z-\zeta|$ . *Сферический (хордальный) диаметр* множества $E\subset\overline{\mathbb{C}}$ есть величина

$$h(E)=\sup_{z,\zeta\in E}h(z,\zeta)\,. \tag{8}$$

В дальнейшем также используются следующие стандартные обозначения для кругов, окружностей и колец в комплексной плоскости:

$$\mathbb{D}\ :=\ D(0,1)\ ,\quad D(z_0,r)\ :=\ \{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}\ ,$$

$$S(z_0,r)\ :=\ \{z\,\in\,\mathbb{C}:|z-z_0|=r\},\quad A(z_0,r_1,r_2)\ :=\ \{z\,\in\,\mathbb{C}:r_1<|z-z_0|<r_2\}\ .$$

Пусть $Q : D \to [0\,,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Следуя работе [13], говорим, что гомеоморфизм $f\colon D\to\mathbb{C}$ является *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке* $z_0\in D$, если соотношение

$$M\;(\Delta\,(fS_1,fS_2,fD))\;\leqslant\int\limits_{A} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\;dm(z)\;, \tag{9}$$

где $S_i = S(z_0,r_i)$, $i=1,2$, выполнено для любого кольца $A=A(z_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0=\operatorname{dist}(z_0\,,\partial D)$ и каждой измеримой функции $\eta\colon(r_1,r_2)\longrightarrow[0,\infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\;dr\;\geqslant\;1\,. \tag{10}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D\to\mathbb{C}$ является *кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в области* $D$, если условие (9) выполнено для всех точек $z_0\in D$.

Следующее утверждение можно найти либо в работе [10], теорема 3.1, либо в монографии [9], теорема 5.3, смотри также [8], теорема 1.

**Предложение 1.** *Пусть $D$ и $D'$ — области в $\mathbb{C}$, и $f : D\to D'$ — гомеоморфное решение класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu\in L^1_{\rm loc}(D)$. Тогда $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0\in D$ с $Q(z)=K_\mu(z)$.*

Из следствия 7.4 работы [12] непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пусть $\mu:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ — измеримая в $\mathbb{D}$ функция с $|\mu(z)|<1$ п.в. и $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если для всех $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ выполнено условие*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\;⨍_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z)<\infty\,, \tag{11}$$

*то $f$ имеет гомеоморфное продолжение $f:\overline{\mathbb{D}}\to\overline{\mathbb{D}}$.*

**3. Некоторые вспомогательные предложения.**

**Предложение 3.** *Пусть $D$ и $D'$ — области в $\mathbb{C}$, $Q:D\to[0,\infty]$ — измеримая функция, и пусть $f:D\to D'$ — кольцевой $Q$-гомеоморфизм в точке $z_0\in D$ и $h(\overline{\mathbb{C}}\setminus f(D))\geqslant\Delta>0$. Если для некоторого $\varepsilon_0\in(0,\operatorname{dist}(z_0,\partial D))$ и всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(z)\,\psi^2(|z-z_0|)\;dm(z)\;\leqslant C\cdot\,I(\varepsilon)\;,\qquad 0<I(\varepsilon):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty\;, \tag{12}$$

*для некоторой измеримой функции $\psi(t):(0,\infty)\to[0,\infty]$, то*

$$h(f(z),f(z_0))\leqslant\frac{32}{\Delta}\;\exp\left\{-\frac{2\pi}{C}\;I\left(|z-z_0|\right)\right\} \tag{13}$$

*для всех* $z \in D(z_0, \varepsilon_0)$. (См. следствие 4.1 в [10]).

Выбирая в предыдущем предложении $\psi(t) = \frac{1}{t}$, приходим к следующему результату.

**Предложение 4.** *Пусть* $D$ *и* $D'$ *— области в* $\mathbb{C}$, $Q : D \to [0, \infty]$ *— измеримая функция, и пусть* $f : D \to D'$ *— кольцевой* $Q$*-гомеоморфизм в точке* $z_0 \in D$ *и* $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. *Если для некоторого* $\varepsilon_0 \in (0, \mathrm{dist}(z_0, \partial D))$ *и всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant C \ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) , \tag{14}$$

*то для всех* $z \in D(z_0, \varepsilon_0)$

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\, \varepsilon_0^{-2\pi/C}\, |z - z_0|^{2\pi/C} . \tag{15}$$

**Лемма 1.** *Пусть* $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ *— измеримая функция и для* $\delta_0 \in (0, 1)$ *и* $C_* > 0$

$$\sup\limits_{r\in(0,\delta_0)} \fint_{D(z_0,r)} Q(z)\; dm(z) \;<\; C_* \qquad \forall\ z_0 \in \partial\mathbb{D} . \tag{16}$$

*Тогда для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *где* $\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}, \delta_0^2\}$,

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)\, dm(z)}{|z - z_0|^2} \leqslant \frac{4\pi C_*}{\ln 2} \ln\frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall\ z_0 \in \partial\mathbb{D} . \tag{17}$$

*Доказательство.* Пусть $\varepsilon_k := 2^{-k+1}\varepsilon_0$, $A_k := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_{k+1} \leqslant |z - z_0| < \varepsilon_k\}$, $D_k := D(z_0, \varepsilon_k)$ и $N$ — натуральное число такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$. Заметим, что

$$A(z_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \subset A(z_0, \varepsilon_{N+1}, \varepsilon_0) = \bigcup_{k=1}^{N} A_k\ , \qquad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_{k+1}^2} \qquad \forall\ z \in A_k\ .$$

Таким образом, имеем, что

$$\eta(\varepsilon) := \int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant \int\limits_{A(z_0,\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{m(D_k)}{\varepsilon_{k+1}^2} \fint\limits_{D_k} Q(z)\, dm(z) \leqslant 4\pi \sum_{k=1}^{N} \fint_{D_k} Q(z)\, dm(z) \leqslant 4\pi N C_*\ . \tag{18}$$

Поскольку $\varepsilon_0 \in (0, 2^{-1})$ и $\varepsilon < \varepsilon_N$ по выбору $N$, то

$$N \;<\; N \;+\; \log_2 \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\right) \;=\; \log_2 \frac{1}{\varepsilon_N} \;<\; \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\,. \tag{19}$$

Комбинируя оценки (18) и (19), получаем (17). $\Box$

**4. Основная лемма.**

**Лемма 2.** *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. в $\mathbb{D}$, и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, такое что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Если $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ и, для некоторых $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $C \in [1,\infty)$,*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\ dm(z)\ <\ C \qquad \forall\ \zeta \in \partial\mathbb{D}\ , \tag{20}$$

*то $f$ имеет гомеоморфное продолжение на $\partial\mathbb{D}$ и*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}|z_2 - z_1|^\alpha \qquad \forall\ z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}\,, |z_2 - z_1| < \delta_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon_0^2\right\} \tag{21}$$

*где $\alpha = \frac{\log 2}{68C}$.*

*Доказательство.* В силу предложения 1, отображение $f$ допускает гомеоморфное продолжение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$. Продолжим $f$ по симметрии во внешность круга $\mathbb{D}$. Тогда

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| < 1\,, \\ 1/\overline{f\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{cases} \tag{22}$$

Элементарные вычисления также показывают, что комплексная характеристика отображения $F$ имеет вид:

$$\mu_F(z) = \begin{cases} \mu(z), & |z| < 1\,, \\ \frac{z^2}{\overline{z}^2}\overline{\mu\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{cases} \tag{23}$$

Покажем, что $F \in W^{1,1}(\mathbb{D})$. Для этого заметим, что

$$|F_{\overline{z}}| \leqslant |F_z| \leqslant |F_z| + |F_{\overline{z}}| \leqslant K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\ J^{\frac{1}{2}}_F(z)\,. \tag{24}$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\ dm(z)\ \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\ J^{\frac{1}{2}}_F(z)\,dm(z)\,. \tag{25}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\ dm(z) \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\,dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\,dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{26}$$

В силу гомеоморфности отображения $F$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\,dm(z) \leqslant m(F(\mathbb{D})) = \pi\,. \tag{27}$$

Учитывая условие $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$, из оценок (26) и (27) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) \leqslant \left(\pi \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,. \tag{28}$$

Покажем, теперь, что $F \in W^{1,1}(D_R)$ для любого $R > 1$, где $D_R := D(0,R)$. Действительно, по аддитивности интеграла Лебега, имеем равенство

$$\int\limits_{|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) + \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z)\,. \tag{29}$$

В силу (28), $\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) < \infty$. Осталось показать, что $\int\limits_{1<|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) < \infty$.

Заметим, что в силу гомеоморфности отображения $F$

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\, dm(z) \leqslant \int\limits_{D_R} J_F(z)\, dm(z) \leqslant m(F(D_R)) < \infty\,. \tag{30}$$

Далее, покажем, что $\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) < \infty$. Сделав замену переменных $w = \frac{1}{\overline{z}}$, преобразуем этот интеграл к виду:

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_\mu\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) dm(z) = \int\limits_{1/R\leqslant|z|\leqslant 1} K_\mu(w)\, \frac{dm(w)}{|w|^4}\,. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{1/R\leqslant|z|\leqslant 1} K_\mu(w)\, \frac{dm(w)}{|w|^4} \leqslant R^4 \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(w) dm(w) < \infty\,. \tag{32}$$

Применяя неравенство Гёльдера и оценки (30), (32), получаем

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) \leqslant \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\, dm(z) \leqslant \tag{33}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\; dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,. \tag{34}$$

Таким, образом мы показали, что $F \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$.

Теперь, давайте оценим интеграл $\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_F(z)\,dm(z)$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Для этого последний интеграл разобьем на две части:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)=\int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)+\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)\,. \qquad (35)$$

Сделав замену переменных $w=\frac{1}{\bar z}$, преобразуем второй интеграл к виду:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)=\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu}\left(\frac{1}{\bar z}\right)\,dm(z)=\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\left(w\right)\,\frac{dm(w)}{|w|^4}\,. \qquad (36)$$

Далее, легко проверить, что выполняется следующее неравенство:

$$\max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}\frac{1}{|w|^4}<16$$

для всех $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Действительно,

$$\max_{|w-\zeta|=\varepsilon}\frac{1}{|w|^2}=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{|\zeta+\varepsilon e^{i\varphi}|^2}=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{|\zeta|^2+2\varepsilon Re(\zeta e^{-i\varphi})+\varepsilon^2}=$$

$$=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{1+2\varepsilon\cos(\varphi-\alpha)+\varepsilon^2}=\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}<4\,,$$

где $w=\zeta+\varepsilon e^{i\varphi},\zeta=e^{i\vartheta}$.

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)\leqslant\max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}\frac{1}{|w|^4}\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\left(w\right)\,dm(w)<16\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\left(w\right)\,dm(w).$$

Учитывая последнюю оценку и равенство (35), имеем, что

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)<17\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\left(w\right)\,dm(w)\,.$$

Поэтому, в силу условия (20), видим, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\fint_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)<17\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\frac{m\left(\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)\right)}{\pi\varepsilon^2}\fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu}(z)dm(z)<17C\,.$$

Далее, применяя лемму 1 при $C'=17C$, получаем оценку

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{K_{F_\mu}(z)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}\leqslant\frac{68\pi C}{\log 2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

для всех $z_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Кроме того, учитывая оценку

$$\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} = 1 + \frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} < 2$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, приходим к оценке

$$\frac{\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{K_F(z)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{68\pi C}{\log 2}\,\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{136\pi C}{\log 2}\,.$$

Наконец, при $\varepsilon := |z_2 - z_1|$ из предложения 4 следует оценка

$$h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant 32\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1 - z_2|^{\alpha}\,, \qquad \text{где } \alpha = \tfrac{\log 2}{68C}\,, \tag{37}$$

и, поскольку $z_1$ и $z_2 \in \partial\mathbb{D}$, имеем, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1 - z_2|^{\alpha}\,. \tag{38}$$

## 5. Основной результат.

**Теорема 1.** *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — измеримая функция и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ и, для некоторых $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $C \in [1,\infty)$,*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\;dm(z) \;<\; C \qquad \forall\,\zeta \in \partial\mathbb{D}\,, \tag{39}$$

*то $f$ имеет гомеоморфное продолжение на $\partial\mathbb{D}$, которое непрерывно там по Гёльдеру.*

*Доказательство. Действительно, применяя в образе дробно-линейное отображение $\gamma$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, $\gamma(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, переводящее $f(0)$ в 0 и $f(1)$ в 1, можем считать, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Далее, при $|z_1 - z_2| \geqslant \delta_0$, имеем тривиальную оценку*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 2 = \frac{2}{\delta_0^{\alpha}}\,\delta_0^{\alpha} \leqslant \frac{2}{\delta_0^{\alpha}}\,|z_1 - z_2|^{\alpha} \tag{40}$$

*и, выбирая $L := \max\{\frac{2}{\delta_0^{\alpha}}, 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\}$, получаем по лемме 2, что*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L\,|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

*для всех $z_1$ и $z_2 \in \partial\mathbb{D}$.*

**Цитированная литература**

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation. A Geometric Approach. – Developments in Mathematics, **26**. – New York: Springer, 2012.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 3. – P. 363–389; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – **214**, no. 2. – P. 200–219.
3. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On a new approach to the study of plane boundary-value problems // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 2017. – No. 4. – P. 12–18.
4. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E., Yefimushkin A.* On Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains // ArXiv.org: 1807.09578v3 [math.CV] 1 Nov 2018, 28 pp.
5. *Yefimushkin A.* On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis // Advances in Analysis. – 2016. – **1**, no. 2. – P. 114–120.
6. *Efimushkin A., Ryazanov V.* On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 2. – P. 190–209; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2015. – **211**, no. 5. – P. 646–659.
7. *Yefimushkin A., Ryazanov V.* On the Riemann–Hilbert Problem for the Beltrami Equations // Contemp. Math. - 2016. - **667**. - P. 299-316.
8. Kovtonyuk D.A., Petkov I.V., Ryazanov V.I. The Beltrami equations and lower $Q-$homeomorphisms // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 114–117.
9. *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* (под общей редакцией Рязанова В.И.) К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева. – Киев: Наук. думка, 2013.
10. Lomako T., Salimov R., Sevostyanov E. On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2010. – **1(LIX)**, № 2. – P. 263–274.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009.
12. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math. – 2013. – **591**. – P. 211–242.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.

**References**

1. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami Equation. A Geometric Approach.* Developments in Mathematics, 26. New York, Springer.
2. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2015). On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane. *Ukr. Mat. Visn., 12*(3), 363-389; transl. in (2016) *J. Math. Sci. (N.Y.), 214*(2), 200-219.
3. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2017). On a new approach to the study of plane boundary-value problems. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 4*, 12-18.
4. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yakubov, E., Yefimushkin, A. (2018). O*n Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains.* Retrieved July 24, 2018, from https://arxiv.org/abs/1807.09578v7.
5. Yefimushkin, A. (2016). On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis. *Advances in Analysis, 1*(2), 114-120.
6. Efimushkin, A., Ryazanov, V. (2015). On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks. *Ukr. Mat. Visn., 12*(2), 190-209; transl. in (2015) *J. Math. Sci. (N.Y.), 211*(5), 646-659.
7. Yefimushkin, A., Ryazanov, V. (2016). On the Riemann-Hilbert Problem for the Beltrami Equations. *Contemp. Math., 667*, 299-316.
8. Kovtonyuk, D.A., Petkov, I.V., Ryazanov, V.I. (2010). The Beltrami equations and lower Q-homeomorphisms. *Proc. IAMM NASU, 21*, 114-117.

9. Kovtonyuk, D.A., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2013). *Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev*, (ed. Ryazanov, V.I.). Kiev: Naukova dumka (in Russian).
10. Lomako, T., Salimov, R., Sevostyanov, E. (2010). On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math., 1(LIX)*(2), 263-274.
11. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
12. Ryazanov, V., Salimov, R., Srebro, U., Yakubov, E. (2013). On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemp. Math., 591*, 211-242.
13. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equations. *J. Anal. Math., 96*, 117-150.

**V.I. Ryazanov, R.R. Salimov**

**On Hölder continuity of solutions of the Beltrami equations on the boundary.**

In the present paper, it is found conditions on the complex coefficient of the Beltrami equations with the degeneration of the uniform ellipticity in the unit disk under which their generalized homeomorphic solutions are continuous by Hölder on the boundary. These results can be applied to the investigations of various boundary value problems for the Beltrami equations. In a series of recent papers, under the study of the boundary value problems of Dirichlet, Hilbert, Neumann, Poincare and Riemann with arbitrary measurable boundary data for the Beltrami equations as well as for the generalizations of the Laplace equation in anisotropic and inhomogeneous media, it was applied the logarithmic capacity, see e.g. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 3. – P. 363–389; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – **214**, no. 2. – P. 200–219; Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On a new approach to the study of plane boundary-value problems // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 2017. – No. 4. – P. 12–18; Yefimushkin A. On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis // Advances in Analysis. – 2016. – **1**, no. 2. – P. 114–120; Efimushkin A., Ryazanov V. On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 2. – P. 190–209; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2015. – **211**, no. 5. – P. 646–659; Yefimushkin A., Ryazanov V. On the Riemann–Hilbert Problem for the Beltrami Equations // Contemp. Math. - 2016. - **667**. - P. 299-316; Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E., Yefimushkin A. On Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains // ArXiv.org: 1807.09578v3 [math.CV] 1 Nov 2018, 28 pp. As well known, the logarithmic capacity of a set coincides with the so–called transfinite diameter of the set. This geometric characteristic implies that sets of logarithmic capacity zero and, as a consequence, measurable functions with respect to logarithmic capacity are invariant under mappings that are continuous by Hölder. That circumstance is a motivation of our research. Let $D$ be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and let $\mu : D \to \mathbb{C}$ be a measurable function with $|\mu(z)| < 1$ a.e. The equation of the form $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$ where $f_{\bar z} = \bar\partial f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, $f_x$ and $f_y$ are partial derivatives of the function $f$ in $x$ and $y$, respectively, is said to be a *Beltrami equation*. The function $\mu$ is called its *complex coefficient*, and $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ is called its *dilatation quotient*. The Beltrami equation is said to be *degenerate* if $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$. The existence of homeomorphic solutions in the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ has been recently established for many degenerate Beltrami equations under the corresponding conditions on the dilatation quotient $K_\mu$, see e.g. the monograph Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26. Springer, New York, 2012 and the further references therein. The main theorem of the paper, Theorem 1, states that a homeomorphic solution $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ in the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ of the Beltrami equation in the unit disk $\mathbb{D}$ has a homeomorphic extension to the boundary that is Hölder continuous if $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ and, for some $\varepsilon_0 \in (0,1)$ and $C \in [1,\infty)$,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) \ < \ C \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

where $D(\zeta,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| < \varepsilon\}$.

***Keywords:*** *continuity by Hölder, Beltrami equations, degeneration of uniform ellipticity.*

**В.І. Рязанов, Р.Р. Салімов**

**Щодо неперервності по Гьольдеру рішень рівнянь Бельтрамі на межі.**

У статті знайдені умови на комплексну коефіцієнт рівнянь Бельтрами з виродженням умови рівномірної еліптичності в одиничному колі, при яких узагальнені гомеоморфні рішення неперервні по Гьольдеру на межі. Результати мають прикладне значення при дослідженні різних крайових задач для рівнянь Бельтрамі.

***Ключові слова:*** *неперервність по Гьольдеру, рівняння Бельтрамі, виродження рівномірної еліптичності.*

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск;*
*Институт математики НАН Украины, Киев*
*vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com*

*Получено 19.11.2018*