УДК 531.38
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-7

©2018. **Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак**

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ ПО НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ряд задач автоматического управления, в частности, синхронизация траекторий, задача слежения (tracking) связаны с синтезом алгоритмов управления динамическими системами, которые представляют собой совокупность связанных между собой активных подсистем. В работе рассмотрена задача синхронизации колебаний для двух связанных осцилляторов Ван дер Поля. Предполагается, что одна из подсистем зависит от внешнего управляющего воздействия. Приведено решение задачи в виде обратной связи по состоянию. Во многих практических приложениях теории управления полный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния – выходы системы. Поэтому основная цель работы – изучить возможность решения исходной задачи с помощью управления, в котором состояние системы заменено на его оценку, полученную с помощью наблюдателя. Построен нелинейный наблюдатель, гарантирующий получение экспоненциальных оценок неизвестных компонент фазового вектора. Показано, что исходное управление совместно с уравнениями наблюдателя решает задачу локальной синхронизации.

MSC: 34A60,34D20, 34N05.

Ключевые слова: *синхронизация, нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, осциллятор Ван дер Поля.*

1. Введение.

В данной статье изучается возможность использования принципа разделения [1] в задаче синхронизации колебаний двух неидентичных осцилляторов Ван дер Поля. Рассматривается ведуще–ведомая (master–slave) схема соединения осцилляторов. Предполагается, что ведомая подсистема зависит от внешнего управляющего воздействия, осцилляторы связаны диссипативной и упругой связями, кроме того фазовый вектор известен не полностью. Такого рода системы во многих практических приложениях физики, биологии используются в качестве приближенной модели нелинейных циклических процессов, имеющих, вне зависимости от начальных условий, устойчивый предельный цикл [2]. В частности [3–5], определение характеристик и синхронизация колебаний для таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени является актуальной проблемой многих медико-биологических исследований. Нелинейный наблюдатель определения асимптотических оценок состояния и идентификатор параметров для системы связанных осцилляторов Ван дер Поля предложены в работе [6].

В начале статьи сформулирована задача синхронизации для рассматриваемой системы и приведено ее решение в виде обратной связи по состоянию. Целью работы является поиск синхронизирующего управления в виде обратной связи по оценке состояния. Такая постановка актуальна, поскольку во многих практических приложениях теории управления типичной является ситуация, когда полный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния – выходы системы. В этом случае можно попытаться использовать управление, которое получается из обратной связи заменой состояния системы на его оценку, полученную с помощью построение наблюдателя – специальной динамической системы, состояние которой с течением времени приближается (асимптотически или экспоненциально) к состоянию исходной системы. Возникает вопрос о том, будет ли полученное таким образом управление в виде обратной связи по оценке состояния решением исходной задачи. В теории управления, в частности в задаче стабилизации динамических систем, подобные вопросы составляет содержание известного принципа разделения [1].

В работе для решения задачи наблюдения использован аппарат метода инвариантных соотношений, который разработан в аналитической механике для поиска точных решений задач динамики твердого тела [7]. Сама схема синтеза вспомогательных инвариантных соотношений для построения нелинейного наблюдателя описана в [8]. В соответствии с этим способом для рассматриваемой системы построен некоторый аналог нелинейного наблюдателя, который обеспечивает получение экспоненциальных оценок фазового вектора. Установлено, что использование в управлении вместо состояния системы его оценки при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации приводит к локальному решению рассматриваемой задачи.

2. Синхронизация колебаний осцилляторов Ван дер Поля.

Рассмотрим уравнения движения двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных линейной упругой и диссипативной связью, при этом один из них является управляемым

$$\begin{aligned} &\ddot{s}_1 - \mu_1(1 - {s_1}^2)\dot{s_1} + {\omega_1}^2 s_1 + \alpha_1(s_1 - s_2) + \beta_1(\dot{s_1} - \dot{s_2}) = 0, \\ &\ddot{s}_2 - \mu_2(1 - {s_2}^2)\dot{s_2} + {\omega_2}^2 s_2 + \alpha_2(s_1 - s_2) + \beta_2(\dot{s_1} - \dot{s_2}) + u = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u – управление, переменные s_1, s_2 обозначают отклонения осцилляторов от положения равновесия $s_1 = s_2 = 0$ в отсутствии управления, коэффициенты μ_1, μ_2 характеризует нелинейное демпфирование. Случай $\mu_1 = \mu_2 = u = 0$ соответствует колебаниям двух связанных гармонических осцилляторов с собственными частотами ω_1, ω_2, соответственно. Если упругая и диссипативная связи являются механическими, то выполняться равенства $\alpha_1 = -\alpha_2,\ \beta_1 = -\beta_2$.

Системы вида (1) возникают во многих физических, медико-биологических прикладных исследованиях, а также могут быть использованы в ряде устройств в качестве упрощенной динамической модели сложных колебаний, имеющих предельный цикл. При этом различают модели с однонаправленной связью, когда параметры α_i или $\beta_i,\ i = 1, 2$ равны нулю, и модели, учитывающие взаимное влияние активных подсистем. Для некоторых из таких устройств актуальной является задача синтеза управления в виде обратной связи, обеспечивающего синхронизацию колебаний осцилляторов. В случае, если информация об их движении не является полной, возникает задача синтеза управления по выходу – известной информации о колебаниях системы. Далее в качестве выхода будем рассматривать

$$y_1 = s_1, \quad y_2 = s_2, \tag{2}$$

т.е. будем предполагать, что значения отклонений $s_1(t), s_2(t)$ в процессе движения доступны измерению и известны как функции времени. Обозначив

$$x_1 = s_1,\ x_2 = \dot{s_1},\ x_3 = s_2,\ x_4 = \dot{s_2},$$

перепишем уравнения (1) в виде следующей системы

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -{\omega_1}^2 x_1 + \mu_1(1-x_1^2)x_2 + \alpha_1(x_1 - x_3) + \beta_1(x_2 - x_4), \\ &\dot{x_3} = x_4, \quad \dot{x_4} = -{\omega_2}^2 x_3 + \mu_2(1-x_3^2)x_4 + \alpha_2(x_1 - x_3) + \beta_2(x_2 - x_4) + u, \\ &y_1 = s_1, \quad y_2 = s_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того, будем считать, что колебания при используемом далее управлении происходят в некоторой ограниченной области D фазового пространства

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le M^2\} \subseteq R^4.$$

Рассмотрим задачу управляемой синхронизации движений подсистем системы (3) по известной информации. В качестве таковой будем использовать функции (2), а также любые значения выражений, полученных с использований только лишь значений функций выхода. В частности, далее будем считать известными решения задачи Коши для любой систем дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = F(z, y_1, y_2), \quad z(0) = z_0 \in R^n, \tag{4}$$

которые ограничены и определены для $t \in [0, \infty)$.

Задача 1. Найти закон управления $u(z(t), x_1(t), x_3(t))$, при котором решения подсистем системы (3) асимптотически стремятся друг к другу, т.е.

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - x_3(t)) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(x_2(t) - x_4(t)) = 0.$$

Введем обозначения для отклонений соответствующих компонент фазовых векторов каждого из осцилляторов

$$e_1(t) = x_1(t) - x_3(t), \quad e_2(t) = x_2(t) - x_4(t).$$

Отметим, что величина $e_1(t)$ является известной функцией времени, поэтому она может быть использована как аргумент при синтезе закона управления, в отличие от переменной $e_2(t)$, значения которой неизвестны.

Перейдем от переменных x_3, x_4 к переменным e_1, e_2. С учетом сделанных обозначений уравнения (3) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = R_{11} + R_{12}x_2 + R_{13}e_2, \\ \dot{e}_1 &= e_2, \quad \dot{e}_2 = R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - u, \end{aligned} \tag{5}$$

коэффициенты которой зависят от известных величин $x_1(t), x_3(t)$:

$$\begin{aligned} &R_{11} = -{\omega_1}^2 x_1 + \alpha_1 e_1,\ R_{12} = \mu_1(1 - x_1^2) + \beta_1,\ R_{13} = -\beta_1, \\ &R_{21} = \mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2) + (\alpha_1 - \alpha_2)e_1, \\ &R_{22} = {\omega_2}^2 x_1 - {\omega_1}^2 x_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_1,\ R_{23} = \mu_2(1 - x_3^2) - \beta_1 + \beta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для решения задачи 1 достаточно синтезировать управление u, обеспечивающее асимптотическое стремление к нулю отклонений $e_1(t), e_2(t)$. Если бы все компоненты фазового вектора системы (3) были известными, то таким управлением, в частности, могло бы быть выражение

$$u = R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2, \tag{7}$$

где γ_1, γ_2 – некоторые постоянные.

Действительно, в этом случае подсистема системы (5), описывающий отклонение траекторий осцилляторов, становится системой однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= e_2, \\ \dot{e_2} &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Характеристическое уравнение системы (8) имеет вид

$$\lambda^2 - \gamma_2\lambda - \gamma_1 = 0. \tag{9}$$

Выбрав постоянные γ_1, γ_2 из условия: корни λ_1, λ_2 этого уравнения имеют различные отрицательные действительные части, получаем, что закон управления (7) обеспечивает экспоненциальное стремление к нулю отклонений с показателем затухания $\lambda_* = \min(|\mathrm{Re}\lambda_1|, |\mathrm{Re}\lambda_2|)$.

3. Нелинейный наблюдатель.

Изучим возможность применения закона управления (7) в случае неполной информации о движении. А именно, используем в формуле (7) вместо значений переменных x_2, e_2 их оценки, полученные в результате решения следующей задачи наблюдения:

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки значения компонент $x_2(t), e_2(t)$ фазового вектора системы (5) по информации об $x_1(t), x_3(t)$.

Задачу наблюдения будем решать с помощью метода синтеза инвариантных соотношений [6]. Соответствующая схема состоит во введении конечных связей между известными и неизвестными переменными и последующем динамическим расширением исходных уравнений таким образом, чтобы эти связи стали инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений.

Согласно такому подходу на первом шаге представим неизвестные компоненты фазового вектора системы (7) в виде:

$$\begin{aligned} e_2 &= \Phi(e_1) + \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = v_1(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1), \\ x_2 &= \Psi(x_1) + \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = v_2(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в результате такого представления исходная система (5) расширена двумя (по числу неизвестных) дифференциальными уравнениями относительно переменных η_1, η_2. Далее будем предполагать, что подлежащие синтезу и неопределенные пока функции Φ, Ψ, v_1, v_2 должны будут удовлетворять следующим ограничениям:

– функции Φ, Ψ дифференцируемы и ограниченны в рассматриваемой области;

– правые части вспомогательных дифференциальных уравнений v_1, v_2 удовлетворяют условиям, достаточным для продолжимости их решений на интервал $t \in [0, \infty)$.

Обозначив невязку от соответствующих соотношений через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, в общем случае имеем:

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1 + \varepsilon_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2 + \varepsilon_2. \tag{11}$$

Дифференцируя эти равенства, получаем, что дифференциальные уравнения для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при условии, что вспомогательные функции v_1, v_2 равны

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - {\Phi'}_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u, \\ v_2 &= R_{11} + (R_{12} - {\Psi'}_{x_1})(\Psi + \eta_2) + R_{13}(\Phi + \eta_1), \end{aligned} \tag{12}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -(R_{23} - {\Phi'}_{e_1})\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= R_{12}\varepsilon_1 + (R_{12} - {\Psi'}_{x_1})\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (13) допускают тривиальное решение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Следовательно, соотношения

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2,$$

с учетом (12), для некоторых решений системы (5) выполняются тождественно. Отметим, что это утверждение верно для любых дифференцируемых функций $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ и любого допустимого управления u, при которых решения вспомогательных дифференциальных уравнений существуют.

На втором шаге определим свободные функции $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ из условий асимптотической устойчивости тривиального решения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Пусть

$$R_{12} - {\Psi'}_{x_1} = -\lambda, \quad R_{23} - {\Phi'}_{e_1} = \lambda,$$

где λ – некоторая положительная постоянная. С учетом обозначений (12) перепишем эти равенства:

$$\Psi'_{x_1} = \mu_1(1 - x_1^2) + \lambda, \quad \Phi'_{e_1} = \mu_2(1 - x_3^2) + \lambda, \tag{14}$$

В качестве функций, которые удовлетворяют последним соотношениям возьмем

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1, \tag{15}$$

Таким образом, можно утверждать, что при выбранных $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$, ошибки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, возникающие при определении неизвестных $x_2(t), e_2(t)$ по формулам (11), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -\lambda\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= R_{13}\varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{16}$$

Покажем, что нулевое решение (16) при некоторых λ становится асимптотически устойчивым. Для этого рассмотрим в качестве функции Ляпунова положительно определенную функцию

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$

и оценим ее производную, взятую в силу системы (16)

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + (R_{13} + R_{22})\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq \left(-\lambda + \frac{|R_{13}| + |R_{22}|}{2}\right)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2).$$

В соответствии со сделанным ранее предположением амплитуды колебаний осцилляторов Ван дер Поля ограничены. Пусть

$$R^* = \sup_{t \in [0,\infty)} \{|R_{13}| + |R_{22}|\} = \sup_{t \in [0,\infty)} |\beta_1 + \mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2)|.$$

Тогда, при $\lambda > R^*$ функция V становится отрицательно определенной, что является достаточным условием для асимптотической устойчивости нулевого решения (16).

В итоге, мы получили соотношения, которые решают задачу наблюдения неизвестных компонент фазового вектора исходной системы (5)

$$e_2 = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1 + \eta_1 + \varepsilon_1, \ x_2 = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x^3}{3} + \eta_2 + \varepsilon_2, \tag{17}$$

где правые части дифференциальных уравнений относительно η_1, η_2 определены формулами (12). При этом оценки (17) являются экспоненциальными, так как

$$\varepsilon_i(t) = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\}), \ i = 1, 2. \tag{18}$$

4. Синхронизация по выходу.

Используем в законе управления (7) вместо переменных x_2, e_2 их приближенные оценки $\hat{x}_2, \hat{e}_2$, вычисленные по формулам

$$\hat{x}_2 = \Psi(x_1) + \eta_2, \quad \hat{e}_2 = \Phi(e_1) + \eta_1,$$

т.е. $\hat{x}_2 = x_2 - \varepsilon_2,\ \hat{e}_2 = e_2 - \varepsilon_1$. В результате применения управления (7) с такими аргументами в дифференциальных уравнениях для отклонений траекторий двух осцилляторов (8) возникают ошибки: $e_1(t) + \delta_1(t),\ e_2(t) + \delta_2(t)$. Соответствующие возмущения удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим, что при наличии возмущений формально задача синхронизации не имеет решения, поскольку тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = 0$ не удовлетворяет системе (19).

В общем же случае, при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации, уравнения для отклонений имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\lambda\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\lambda\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{20}$$

Последняя система линейных дифференциальных уравнений допускает тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Поэтому одновременное решение задачи наблюдения и синхронизации может, в принципе, решить задачу 1. В частности, для этого достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ из условий асимптотической устойчивости положения равновесия системы (20). Для формирование ограничений на выбор этих параметров воспользуемся теоремой [9].

Теорема. *Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ выполнено:*

а) каждое решение системы стремится к нулю при $t \to \infty$;

б) в системе $\dot{z} = Az + f(z)$ вектор функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности $z = 0$;

в) $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \to 0$ при $z \to 0$.

Тогда каждое решение $z(t, z_0)$, где $z(0, z_0) = z_0$, стремится к нулю для достаточно малых $\|z_0\|$.

Введем в рассмотрение векторы $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T,\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T,\ z = (\delta^T, \varepsilon^T)^T$, где T означает операцию транспонирования. Матрица A и вектор-функция $f(z)$ в нашем случае имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2 \\ R_{22}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условия а) и б) теоремы выполнены. Действительно, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, а функция $f(z)$ является линейной однородной функцией z. Рассмотрим теперь условие в). В качестве нормы вектора будем использовать сумму абсолютных величин всех его компонент. Тогда

$$\|z\| = |\delta_1| + |\delta_2| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, \ \|f(z)\| = |R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|.$$

Оценим выражение $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|}$. Пусть M некоторая положительная константа, которая мажорирует максимальные значения ограниченных функций $|R_{23}|, |R_{22}|$. Имеем:

$$\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} = \frac{|R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|}{\|z\|} \le \frac{|R_{23}||\varepsilon_1| + 2|R_{22}||\varepsilon_2|}{\|z\|} \le 2M\frac{\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon\| + \|\delta\|}.$$

Для выполнения условия в) теоремы, достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ так, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|\varepsilon\|}{\|\delta\|} = 0. \tag{21}$$

В соответствии с (18), норма числителя этого частного $\|\varepsilon\| = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\})$. Следовательно, в случае экспоненциального стремления к нулю величины $\|\delta\|$, ее показатель затухания должен быть строго меньше $\lambda - R^*$.

Чтобы выполнить это условие достаточно потребовать, чтобы коэффициенты γ_1, γ_2 характеристического уравнения (9) были таковы, что

$$0 < \lambda_* = \min(|\mathrm{Re}\lambda_1|, |\mathrm{Re}\lambda_2|) < \lambda - R^*. \tag{22}$$

Действительно, система дифференциальных уравнений (20) является каскадной, переменные ε не зависят δ и их значения могут быть рассмотрены как внешнее воздействие на подсистему, состоящей из первых двух уравнений (20). Общее решение этой подсистемы имеет вид

$$\delta(t) = \Delta(t)\delta_0 + \int_0^t \Delta(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \ \delta(0) = \delta_0, \tag{23}$$

где Δ – матрица фундаментальных решений системы линейных однородных уравнений (8), имеющая собственные значения λ_1, λ_2, а внешнее воздействие задано вектор-функцией $f_1(t) = (0, \ -R_{23}(t)\varepsilon_1(t) - R_{22}(t)\varepsilon_2(t))^T$.

Поскольку показатель затухания первого слагаемого (23) удовлетворяет неравенству (22), то вне зависимости от второго слагаемого (23) показатель затухания их суммы эту величину может только лишь уменьшить. Следовательно, условие в) теоремы выполнено и тривиальное решение системы (20) обладает свойством локальной асимптотической устойчивости. Тем самым установлено, что отклонения траекторий двух осцилляторов $\|e+\delta\|$ при достаточно малых начальных значениях $\|\delta\|, \|\varepsilon\|$ стремятся к нулю с ростом t.

В итоге можно сформулировать следующее

Утверждение. *Пусть постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ таковы, что выполнено неравенство (22). Тогда управление*

$$u = -\gamma_1 e_1 + R_{22}(\Psi(x_1) + \eta_2) + (R_{23} - \gamma_2)(\Phi(e_1) + \eta_1) + R_{21} \tag{24}$$

где

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1,$$

а переменные η_1, η_2 – произвольное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - \Phi'_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u, \\
\dot{\eta}_2 &= R_{11} + R_{12}(\Psi + \eta_2) - \Psi'_{x_1}(\Psi + \eta_2),
\end{aligned}$$

решает, по крайней мере, локально, Задачу 1 для системы (5).

Как уже было отмечено, система (20) имеет каскадную структуру, из вида которой следует, что решение задачи наблюдения не зависит от решения задачи синхронизации. Поэтому, с целью уменьшения начального значения $\|z(0)\|$, задачу можно разбить на два этапа. На первом из них начать решать задачу наблюдения при произвольном допустимом управлении, например, при $u = 0$, обеспечивая тем самым малость значений $\|\varepsilon\|$. На втором этапе, начиная с некоторого момента времени, принятого далее за начальный момент, начинать решать одновременно Задачу 1 и Задачу 2 с управлением (24).

Цитированная литература

1. *Freeman R.* Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // IEEE Transactions on Automatic. Control. – 1995. – V. 40, № 12. – P. 2119–2122.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
4. *Bernardo D.D., Signorini M. G., Cerutti S.* A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics // Int. J. Bifurcation Chaos. – 1998. – V. 8. – P. 1975–1985.
5. *Brandt M.E., Wang G., Shih H-T.* Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. – Bifurcation Control. – Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. – Springer, 2003. – P. 265–273.
6. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Идентификация характеристик осцилляторных сетей // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iм. В.Н. Каразiна. – Т. 84. – 2016. – С. 22–30.
7. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

8. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

References

1. Freeman, R. (1995). Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances. *IEEE Transactions on Automatic. Control, 40*(12), 2119-2122.
2. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). Fenomen uravneniya van der Polya. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika, 22*(4), 3-42 (in Russian).
3. Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A, 336*(1-2), 153-162.
4. Bernardo, D.D., Signorini M.G., Cerutti S. (1998). A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. I*nt. J. Bifurcation Chaos, 8*, 1975-1985.
5. Brandt, M.E., Wang, G., Shih, H-T. (2003). Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. In *Bifurcation Control*, Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu., Springer, 265-273.
6. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2016). Identification of characteristics of coupled oscillators. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 84*, 22-30 (in Russian).
7. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15-24 (in Russian).
8. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh trebovaniy v zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69-76 (in Russian).
9. Bellman R. (1954). *Teoriya ustoychivosti resheniy differentsial'nykh uravneniy.* Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury (in Russian).

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Synchronization of oscillations for coupled Van der Pol oscillators by output.

A number of automatic control tasks, in particular, the synchronization of trajectories, the tracking task, control by a reference system are associated with the synthesis of control algorithms for dynamic cascade systems, which are a set of interconnected active subsystems. In this paper, the oscillation synchronization problem is considered for two Van der Pol coupled oscillators. It is assumed that the driven subsystem depends on the external control action, in addition, the phase vector is not fully known. On the first step the solution of the problem of synchronization in the form of state feedback is written. The aim of the work is to find the synchronizing control in the form of feedback on the state estimation. Such a formulation is relevant, since for many practical applications of control theory, a typical situation is when the complete state vector of the system is unknown and only some of the functions of the state variables – the outputs of the system are accessible to measurement. One can try to use the control law obtained from feedback by replacing the state with its estimate obtained by observer – a special dynamical system whose state eventually approaches (asymptotically or exponentially) to the state of the original system. In this case a question arises whether such control will be solving the synchronization problem. In mathematical control theory, in particular for the stabilization problem of dynamical systems, similar questions constitute the content of the known principle of separation. For the observation problem solving the apparatus of the method of synthesis of auxiliary invariant relations for constructing a nonlinear observer was used. In accordance with this approach a nonlinear observer is constructed for the system under consideration, which ensures the exponential estimates of the phase vector. It is further shown that the use in the control law instead of the state of the system of its evaluation under simultaneously solving the problems of observation and synchronization leads to the local solution of the problem under consideration.

Keywords: *synchronization, nonlinear observer, invariant relations, Van der Pol oscillator.*

Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак

Синхронізація коливань зв'язаних осциляторів Ван дер Поля за неповною інформаією.

Ряд задач автоматичного управління, зокрема, синхронізація траєкторій, стеження (tracking) за еталоною системою тощо пов'язані з синтезом алгоритмів керування динамічними системами, які представляють собою сукупність пов'язаних між собою активних підсистем. В роботі розглянуто задачу синхронізації коливань для двох пов'язаних між собою осциляторів Ван дер Поля. Передбачається, що одна з підсистем залежить від зовнішнього керування. Наведено рішення задачі синхронізації для вихідної системи у вигляді зворотного зв'язку за станом. У багатьох практичних додатках теорії управління повний вектор стану системи є невідомим, а виміру доступні лише деякі функції змінних стану – виходи системи. Тому основний зміст роботи – вивчити можливість використання закону керування, в якому стан системи замінено на його оцінку, отриману за допомогою спостерігача. Побудований нелінійний спостерігач, який гарантує отримання експоненційних оцінок невідомих компонент фазового вектора. Показано, що одночасне рішення задач спостереження та синхронізації вирішує локально вихідну задачу.

Ключові слова: *синхронізація, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, осцилятор Ван дер Поля.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net`

Получено 24.11.18