УДК 004.942.519.87

Є. О. Додонов, О. Г. Додонов, А. І. Кузьмичов
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Моделювання та візуалізація узагальнених задач про потоки мінімальної вартості

Моделювання потоків мінімальної вартості — це, фактично, дослідження на моделях будь-якого типу чи принципу дії усіх комунікацій, природних або штучних, якими передаються чи мають передаватися мережеві потоки таким чином, аби сукупні витрати на їхні рух енергії, коштів чи ресурсів були як найменшими. Саме тому ядром математичного і обчислювального апарату мережевої оптимізації є модель фундаментальної задачі про потоки мінімальної вартості (Minimum Cost Flow, MCF) у різноманітних її версіях, постановках і застосуваннях. Зазвичай реалізація цих моделей вимагає серйозних зусиль і витрат, що пов'язані із застосуванням спеціальних програмних і мовних засобів. Наведено приклади розв'язання узагальнених задач MSF за доступною технологією електронно-табличного оптимізаційного моделювання.

***Ключові слова**: потоки у мережах мінімальної вартості, одно- та багатопродуктові потоки, minimum cost flow problem, multicommodity minimal cost network flows, optimization modeling with spreadsheets.*

Вступ

Спрощена оптимізаційна модель задачі про потоки мінімальної вартості (Minimum Cost Flow, MCF) — це вперше поставлена лінійна модель транспортної задачі про перевезення одного продукту від m постачальників до n споживачів, спочатку у матричній, пізніше — у мережевій постановках, де потік x_{ij}, що тече (i, j)-ю дугою, характеризується питомою вартістю c_{ij}. З часом ця задача у новітніх дослідженнях і впровадженнях узагальнюється, зокрема, у багатопродуктових (K-продуктових, $K > 1$) постановках, аби відповідні комп'ютерні моделі краще відтворювали звичайні, складні чи критичні ситуації у реальних комунікаціях, відшукуючи розв'язки практичних задач у формі: «k-й продукт – звідки – куди – скільки» з метою досягнення мінімальних сумарних витрат у процесах формування, перетворення й одночасної передачі потоків K продуктів з відповідних джерел до стоків мережами загального чи спеціального користування.

Типова розподільча задача про K-продуктові мережеві потоки мінімальної вартості у мережі (N, A), де N — множина n вузлів (*nodes*), A — множина m дуг (*arcs*). Змінна шуканого розв'язку та відповідного управлінського рішення $x_k(i, j)$ — потік k-го продукту (i, j)-ю дугою, $(i, j) \in A$. Шукані потоки характеризуються питомими вартостями (*costs*) $c_k(i, j)$ потоків k-го продукту, що течуть (i, j)-ми дугами, лінійністю/нелінійністю цільової функції та, додатково, нижніми/верхніми обмеженнями на допустиму величину потоку $l_k(i, j)/u_k(i, j)$ із-за діючих технологічних умов і пропускних здатностей каналів і вимогами до типу змінних: дійсного, цілого, 1/0 тощо.

1-продуктова задача MCF (матрична постановка)

Базова версія моделі — класична транспортна задача у матричній постановці, де розглядається двочасткова направлена мережа, яка утворена множиною m вузлів-джерел і n вузлів-стоків, усі зв'язки «джерела-стоки» представлені матрицями інциденцій щодо питомих витрат і шуканого плану розміром $m \times n$, що одночасно є перевагою та серйозним недоліком із-за солідних розмірів даних і результатів для крупної задачі. Тут кожен вузол може бути лише джерелом з певною пропозицією чи стоком з певним попитом. Необхідність уведення проміжного пункту з нульовими пропозицією/попитом суттєво збільшує розмір задачі.

Математична модель цієї оптимізаційної задачі має такий вигляд:

I. Знайти матрицю $X = \{x_{ij}\}$ таку, щоб

II. ЦФ $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$

III. за обмежень:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (\geq) p_i$, де p_i — пропозиція i-го постачальника;

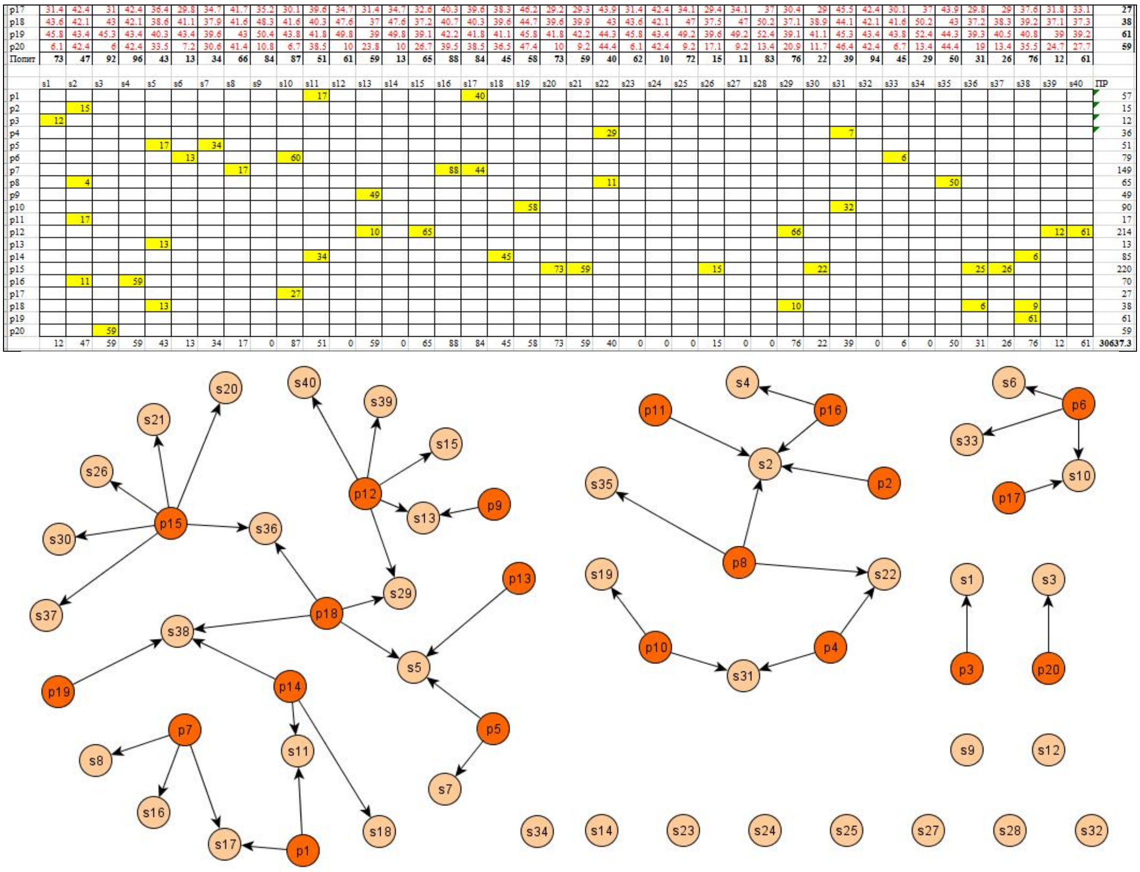
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = (\leq) s_j$, де s_j — попит j-го споживача;

$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.

Приклад 1.

Задано мережу із 60 вузлів, де m = 20 ($p_1 \times p_{20}$), n = 40 ($s_1 \times s_{40}$), та 800 дуг. Необхідно знайти матрицю потоків продукту загальної мінімальної вартості. Для вузлів згенеровано координати (x, y), за якими розраховано відстані (питомі вартості) між вузлами у вигляді матриці 20×40, а також значення пропозицій і попиту, за ними задача виявилася незбалансованою: сума пропозицій 1407 од., сума попиту 2145 од., відповідно діють обмеження: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i$ та $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq s_j$ — хтось із споживачів не отримає замовленого продукту.

Результат: попит 10 споживачів незадоволений, для 25 задоволений повністю, у інших 5 — частково, із 800 потенційних дугових потоків лише 45 ненульових (рис. 1).



p17	31.4	42.4	31	42.4	36.4	29.8	34.7	41.7	35.2	30.1	39.6	34.7	31.4	34.7	32.6	40.3	39.6	38.3	46.2	29.2	29.3	43.9	31.4	42.4	34.1	29.4	34.1	37	30.4	29	45.5	42.4	30.1	37	43.9	29.8	29	37.6	31.8	33.1	27
p18	43.6	42.1	43	42.1	38.6	41.1	37.9	41.6	48.3	41.6	40.3	47.6	37	47.6	37.2	40.7	40.3	39.6	44.7	39.6	39.9	43	43.6	42.1	47	37.5	47	50.2	37.1	38.9	44.1	42.1	41.6	50.2	43	37.2	38.3	39.2	37.1	37.3	38
p19	45.8	43.4	45.3	43.4	40.3	43.4	39.6	43	50.4	43.8	41.8	49.8	39	49.8	39.1	42.2	41.8	41.1	45.8	41.8	42.2	44.3	45.8	43.4	49.2	39.6	49.2	52.4	39.1	41.1	45.3	43.4	43.8	52.4	44.3	39.3	40.5	40.8	39	39.2	61
p20	6.1	42.4	6	42.4	33.5	7.2	30.6	41.4	10.8	6.7	38.5	10	23.8	10	26.7	39.5	38.5	36.5	47.4	10	9.2	44.4	6.1	42.4	9.2	17.1	9.2	13.4	20.9	11.7	46.4	42.4	6.7	13.4	44.4	19	13.4	35.5	24.7	27.7	59
Попит	73	47	92	96	43	13	34	66	84	87	51	61	59	13	65	88	84	45	58	73	59	40	62	10	72	15	11	83	76	22	39	94	45	29	50	31	26	76	12	61	

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25	s26	s27	s28	s29	s30	s31	s32	s33	s34	s35	s36	s37	s38	s39	s40	ПР
p1											17						40																								57
p2		15																																							15
p3	12																																								12
p4																						29									7										36
p5					17		34																																		51
p6						13				60																							6								79
p7								17								88	44																								149
p8		4																				11													50						65
p9													49																												49
p10																			58												32										90
p11		17																																							17
p12													10		65														66										12	61	214
p13					13																																				13
p14											34							45																				6			85
p15																				73	59					15				22						25	26				220
p16		11		59																																					70
p17										27																															27
p18					13																								10							6		9			38
p19																																						61			61
p20			59																																						59
	12	47	59	59	43	13	34	17	0	87	51	0	59	0	65	88	84	45	58	73	59	40	0	0	0	15	0	0	76	22	39	0	6	0	50	31	26	76	12	61	30637.3

Рис. 1. Оптимальний розподіл продукту від 20 джерел (p) до 40 стоків (s)

1-продуктова задача MCF (мережева постановка)

Значно краще пристосована до реальності потокова задача в мережевій постановці (*transshipment problem*) у мережі з N вузлами та A дугами. У цій задачі зникають базові поняття моделі транспортної задачі про два типи вузлів, джерела та стоки, бо тепер кожен вузол може одночасно бути джерелом, проміжним пунктом чи стоком продукту. Кожна ненаправлена дуга представлена парою направлених назустріч дуг.

Завдяки дії принципу збереження (балансу) потоку у вузлі шлях потоку від початкового джерела до кінцевого стоку може проходити не лише через проміжні пункти, але й через інші джерела та стоки, підсилюючи/послаблюючи поточне значення.

Зазвичай таку мережу в розрахунках представляють матрицею «вузли-дуги», для економії машинних ресурсів у наведених прикладах зв'язки між вузлами представлені списками питомих витрат і шуканого плану для дуг, що з'єднують лише сусідні вузли, відповідно, відшукується компактний вектор шуканих дугових потоків.

Потенціал i-го вузла — пропозиція ($+p_i$) джерела, попит ($-p_i$) стоку, 0 для проміжних пунктів. Базове обмеження формується на балансі вхідних і вихідних потоків для кожного вузла та додатково обмежує:

— зверху шуканий потік, пропускна здатність окремої дуги чи каналу, яким рухаються потоки у двох напрямках;

— знизу, згідно технологічних умов експлуатації відповідних комунікацій чи специфічного типу продукту.

Математична модель цієї оптимізаційної задачі має такий вигляд:

I. Знайти вектор $X = \{x_{ij}\}$, $i, j \in N$ такий, щоб

II. ЦФ $Z = \sum\limits_{(i,j)\in D} c_{ij} x_{ij} \to \min$

III. за обмежень:

$\sum\limits_{j:(i,j)} x_{ij} - \sum\limits_{j:(j,i)} x_{ji} \quad \pm p_i \quad \forall i \in D$ (баланс потоків в i-му вузлі);

$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$.

Приклад 2.

Задано ненаправлену мережу (рис. 2) з 18 вузлів, з них 5 джерел (2, 3, 9, 14, 15) і 4 стоки (1, 5, 11, 18), та 72 дуги. Треба знайти вектор потоків продукту загальної мінімальної вартості. Для згенерованих координат (x, y) вузлів розраховано відстані (питомі вартості) між парами зв'язаних вузлів, задано значення пропозицій і попиту, за ними задача виявилася незбалансованою: сума пропозицій 38 од., сума попиту 42 од.

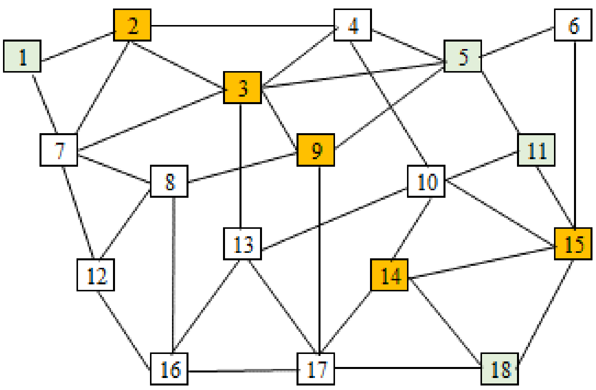


Рис. 2. Ненаправлена мережа з джерелами та стоками

Результат: задоволення попиту: 11 (13/12), 1 (15/12), 5 (5/5), 18 (9/9), що показано на рис. 3.

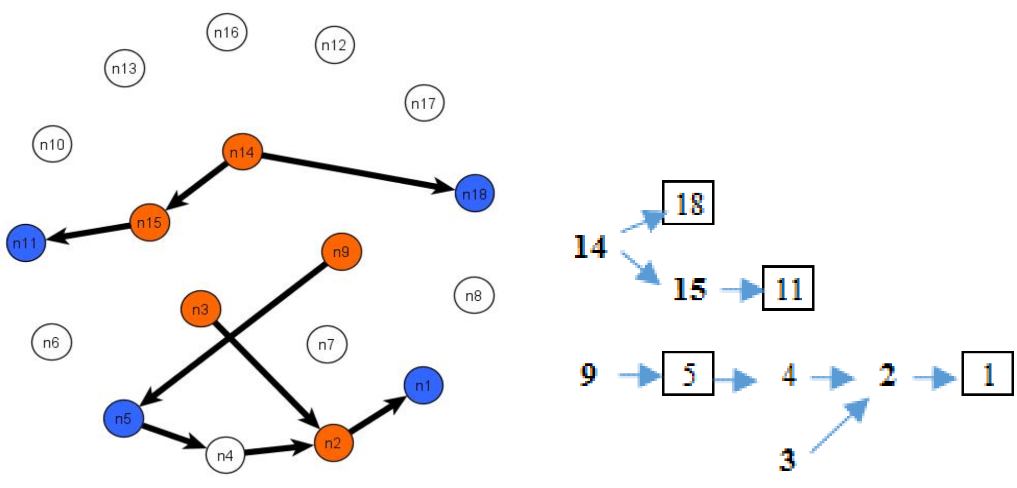


Рис. 3. Розподіл 1-продуктових потоків

Багатопродуктова задача про потоки мінімальної вартості

Тут фундаментальну роль щодо отримання розв'язку задачі відіграє принцип декомпозиції Данцига-Вульфа[1], що зводиться до процедури розкладення глобальної K-продуктової задачі на K окремих, цілком чи майже незалежних локальних k-продуктових ($k = 1, \ldots, K$) задач із фіксованою структурою, та наступної їхньої агрегації в єдину головну та координуючу задачу, де одночасно діють обмеження до шуканих змінних (дугових потоків) як для однопродуктових, так і, що важливо, для головної K-продуктової задачі[2].

У наведених прикладах незмінними є параметри мережі (множини N, A, U, L), якою усі учасники користуються. Для кожної k-продуктової задачі визначаються функції власних вузлів (джерело, стік, проміжні) та їхні потенціали (пропозиція, попит), за необхідності — граничні оцінки $l_k(i, j)$ $u_k(i, j)$ для шуканого потоку $x_k(i, j)$.

Приклад 3.

Задано ту ж саму ненаправлену мережу загального призначення з 18 вузлів і 72 дуг, де визначені питомі вартості між усіма парами зв'язаних вузлів. Треба знайти потоки двох продуктів Пр1 та Пр2, що одночасно рухаються мережею, загальної мінімальної вартості.

Для продуктів визначено джерела, стоки та їхні потенціали, для проміжних — нулі:

Пр1: 2 (+1), 3 (+4), 15 (+5), 9 (+12), 14 (+16);
1 (–15), 11 (–13), 18 (–9), 5 (–5) → +38/–42;
Пр2: 1 (+4), 5 (+5), 3 (+7), 7 (+11); 12 (–17), 10 (–9), 14 (–6), 17 (–4) → +27/–36.

Задача відкрита, для обох продуктів пропозиції перевищують попит, вузли 1 та 5 одночасно є стоками продукту Пр1 та джерелами продукту Пр2, вузол 3 — джерело обох продуктів. Додатковим обмеженням є: $x_1(i, j) + x_2(i, j) \le u(i, j)$.

Результат (дугові потоки обмежені зверху значенням 10 од.) продемонстровано на рис. 4.

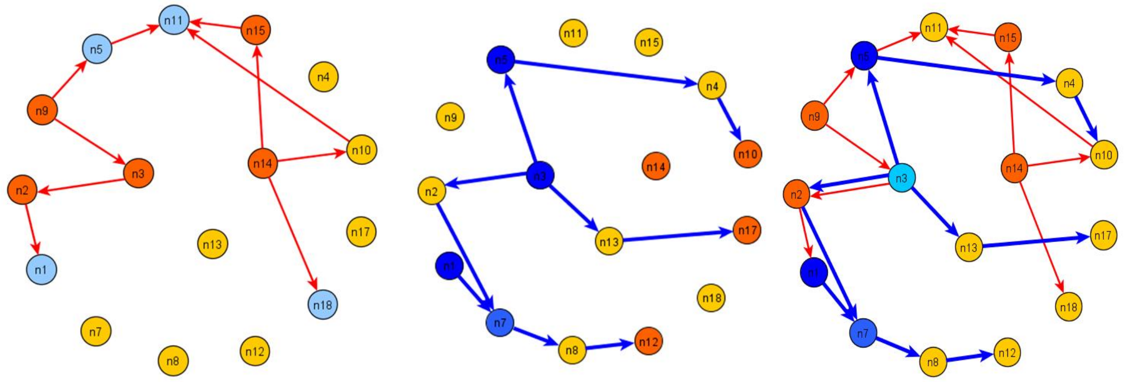


Рис. 4. Розподіл потоків: продукту Пр1, продукту Пр2, обох продуктів

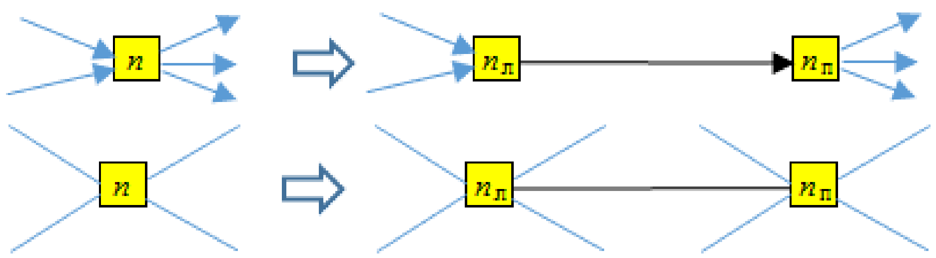
[1] Dantzig G., Wolfe Ph. Decomposition principle for linear program. OR, 1960 [1, Гл. 23. Принцип разложения для задач линейного программирования].
[2] У підручниках і монографіях ці задачі не розглядаються, зазвичай лише згадуються.

Незадоволений попит. Пр1: вузол 1 (–4); Пр2: вузол 14 (–6, повністю), вузол 17 (–3).

Урахування питомих витрат для вузлів (ПВВ)

У класичних моделях мережевої оптимізації вважається, що питомі вартості c_{ij} стосуються лише потоку, що рухається (i, j)-ю дугою, вузли — «ідеальні», бо рух ними миттєвий чи безкоштовний. Будь-який перевізник з цим навряд чи погодиться, бо у реальних мережах будь-якого рівня вузли «неідеальні». Це, наприклад, пункти перевалки, порти чи крупні міста, де у загальних витратах мають враховуватись явно ненульові питомі витрати/вартості за транзит реальними вузлами. Для цього будують об'їзні дороги у містах, якщо рух ними обходиться дешевше чи скоріший, хоча буває, що краще перетнути зважений вузол, ніж оминати його затратними шляхами, тож оптимальні потоки у реальній мережі повністю визначають задані питомі вартості дуг і вузлів.

Щодо цієї специфіки в моделі здійснюється уявне розщеплення кожного «реального» вузла (*node splitting*), усіх чи окремих, на два «ідеальних» вузли, що з'єднані між собою однією чи двома, залежно від направленості мережі, штучними «вузловими» дугами з певними питомими вартостями, щоби відповідна потокова модель краще відповідала реальній мережевій структурі. За таким підходом кожен n-й вузол мережі розщеплюється, скажімо, на лівий і правий вузли $n_л$ та $n_п$, між ними утворюється зважена одна ($n_л \to n_п$) або дві дуги ($n_л \to n_п$) та ($n_п \to n_л$) з певними ПВВ, тоді в оновленому наборі вузлів множина дуг розділяється на вхідні та вихідні, чи зберігається, залежно від орієнтованості мережі, як показано на схемі.



За такої зміни структури мережі розмір задачі суттєво збільшується для ненаправленої мережі: число дуг і вузлів подвоюється — якщо попередня задача мала 18 вузлів і 72 направлених дуги, задача з розщепленими вузлами має 36 вузлів і 144 дуги — плюс 36 штучних дуг між вузлами $n_л$ та $n_п$.

Приклад 4. 1-продуктова задача MCF з ПВВ.

Задано ненаправлену мережу (рис. 2) з 18 вузлів і 36 двонаправлених дуг, де 5 вузлів-джерел (2, 3, 9, 14 та 15) мають пропозиції, 4 вузла-стоки (1, 5, 11 та 18) — попит і 9 проміжних пунктів, додається умова врахування ПВВ для усіх вузлів (рис. 5).

Треба знайти дугові потоки від джерел до стоків для забезпечення попиту із загальними мінімальними витратами.

Мережа:

— дві множини вузлів: {1л ± 18л} та {1п ± 18п}. Потенціали вузлів: $n_л$ — стоки, $n_п$ — джерела;

— множина 180 дуг складається із 4-х груп: 1) «п→л» (72); 2) «л→п» (72) — зв'язки між різними вузлами; 3) «л→п» (18); 4) «п→л» (18) — в кожному вузлі.

Отримуємо наступний результат (рис. 5).

Зі 180 дуг потоками зайнято 13 дуг:

7 (група 1): $\{x_{2п,1л} = 15,\ x_{3п,5л} = 4,\ x_{5п,11л} = 1,\ x_{9п,3л} = 7,\ x_{10п,11л} = 7,\ x_{14п,15л} = 16,\ x_{15п,11л} = 5\}$;

4 (група 2): $\{x_{3л,2п} = 5,\ x_{3л,5п} = 2,\ x_{15л,10п} = 7,\ x_{15л,18п} = 9\}$;

0 (група 3);

2 (група 4): $\{x_{5п,5л} = 1,\ x_{18п,18л} = 9\}$.

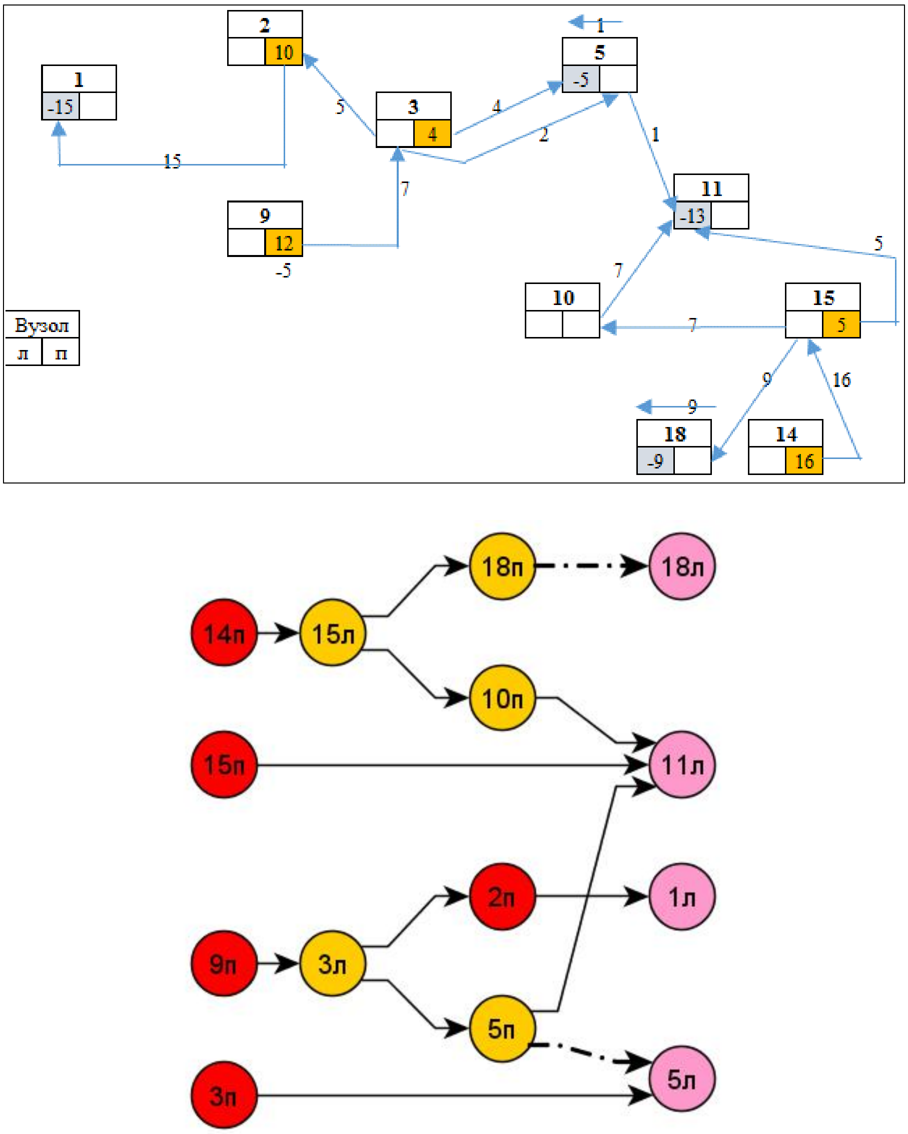


Рис. 5. Розподіл потоків продукту

Приклад 5. 2-продуктова задача MCF з ПВВ.

Визначеною у попередньому прикладі мережею течуть потоки двох продуктів Пр1 та Пр2. Для кожного визначено початкові дані: потенціали вузлів і питомі вартості дуг і вузлів. Додатково можна задати пропускні здатності всіх чи окремих звичайних і вузлових дуг.

Відшукуються потоки «джерела → стоки» загальної мінімальної вартості.

Отриманий результат показано на рис. 6, 7.

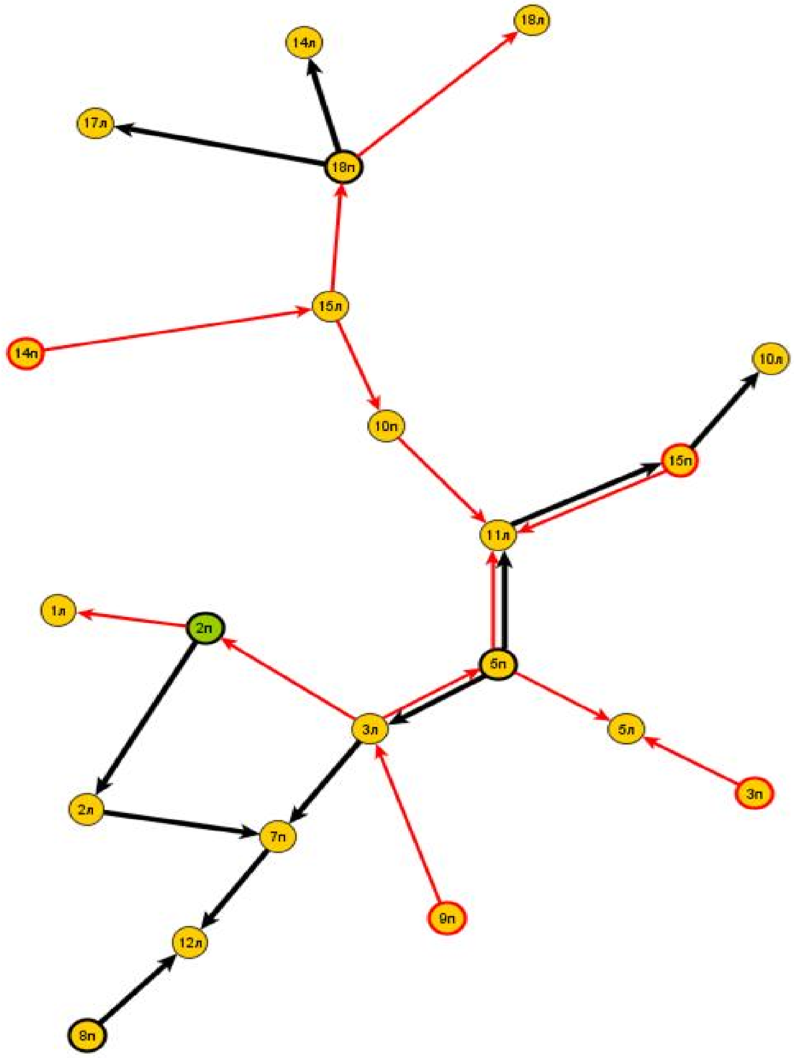


Рис. 6. Розподіл потоків 2-х продуктів без обмеження на ПЗ дуг

Приклад 6. 4-продуктова задача MCF з ПВВ.

Визначеною у попередніх прикладах мережею течуть потоки чотирьох продуктів Пр1×Пр4. Для кожного продукту визначено початкові дані:

— потенціали вузлів: Пр1(+47/–42), Пр2(+59/–52), Пр3(+103/–106), Пр4(+77/–88);

— питомі вартості звичайних і вузлових дуг.

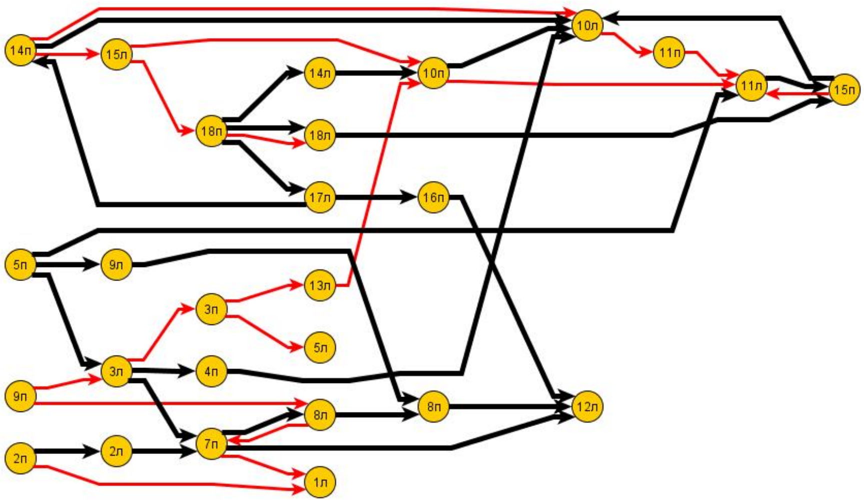


Рис. 7. Розподіл потоків 2-х продуктів з обмеженням на ПЗ дуг (до 10 од.)

Відшукуються потоки «джерела → стоки» загальної мінімальної вартості. У результаті отримуємо оптимальний план (рис. 8).

Пр1

Початок	Кінець	Варт	Потік
2п	7л	6	**15**
7л	12п	15	**15**
8п	12л	10	**12**
9п	9л	10	**12**
9л	8п	12	**12**
14п	15л	3	**10**
15л	10п	7	**9**
14п	10л	4	**6**
2л	2п	1	**5**
3п	2л	16	**4**
15л	18п	11	**1**
4п	2л	14	**1**
16п	12л	10	**1**
18п	17л	8	**1**
10л	4п	5	**1**
17л	16п	16	**1**
		ЦФ1=	949

Пр2

Початок	Кінець	Варт	Потік
5п	11л	22	**19**
7п	12л	31	**19**
15п	10л	17	**13**
11л	15п	14	**13**
2п	2л	18	**10**
2л	7п	10	**10**
5п	3л	14	**9**
18п	14л	12	**9**
3л	7п	15	**9**
18п	17л	14	**3**
8п	12л	11	**2**
		ЦФ2=	2123

Пр3

Початок	Кінець	Варт	Потік
9л	9п	1	**29**
8п	9л	6	**26**
15л	14п	13	**25**
14л	14п	1	**22**
12п	8л	20	**16**
8л	8п	1	**16**
15л	15п	1	**15**
2л	2п	1	**14**
3п	2л	16	**12**
13л	3п	8	**12**
13п	16л	19	**10**
16л	8п	5	**10**
17п	9л	13	**3**
14л	17п	10	**3**
14п	10л	4	**2**
4п	2л	14	**2**
10л	4п	5	**2**
		ЦФ3=	1540

Пр4

Початок	Кінець	Варт	Потік
3п	13л	24	**21**
17п	17л	13	**21**
13л	17п	18	**21**
5л	5п	40	**20**
4п	3л	21	**10**
3л	5п	14	**10**
4л	5п	39	**9**
2л	7п	10	**8**
7п	8л	14	**8**
8л	8п	13	**8**
3п	2л	19	**8**
4л	2п	33	**8**
3п	7л	19	**1**
7л	2п	19	**1**
		ЦФ4=	3406

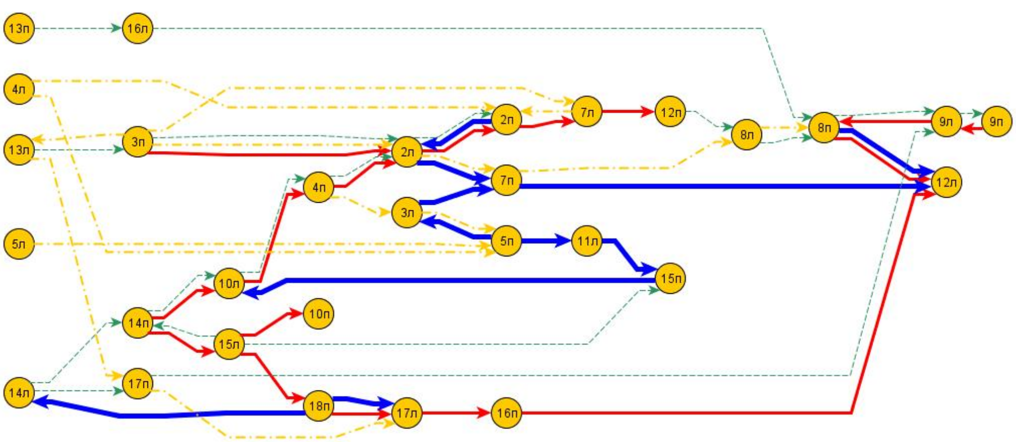


Рис. 8. Розподіл потоків 4-х продуктів без обмеження на ПЗ дуг

На рис. 8 зображено 58 із 720 направлених дуг (число шуканих невідомих[3]), що зайняті потоками: Пр1 (16), Пр2 (11), Пр3 (17), Пр4 (14).

На рис. 9 відображено збільшений фрагмент з рис. 8.

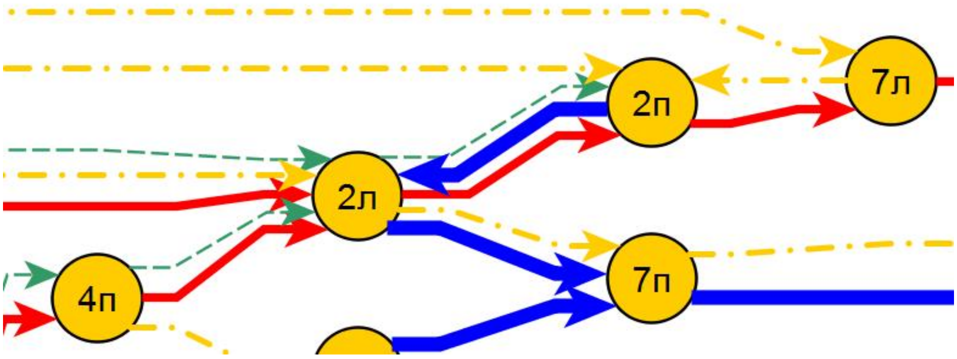


Рис. 7. Навантаження на вузол 2 (2л ↔ 2п)

Висновок

Доведено можливість дослідження ускладнених постановок задачі про потоки мінімальної вартості засобами електронно-табличного оптимізаційного моделювання, зокрема, у *K*-продуктовій версії з урахуванням питомих витрат (ресурсів, коштів, часу) у вузлах.

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение/пер. с англ. Москва: Прогресс, 1966. 601 с.

2. Йенсен П., Барнес Д. Потоковое программирование/пер. с англ. Москва: Радио и связь, 1984. 391 с.

3. Ahuja R., Magnanti T., Orlin J. Network Flows. Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 1993. 863 p.

4. Rouse W. Modeling and Visualization of Complex Systems and Enterprises. Explorations of Physical, Human, Economic, and Social Phenomena. Wiley, 2015. 294 p.

5. Baker K. Optimization Modeling with Spreadsheets, 3-ed. Thomson, 2015. 354 p.

6. Додонов О.Г., Додонов В.О., Кузьмичов А.І. Візуальна підтримка оптимальних рішень у просторових мережах. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних.* 2017. Т. 19. № 4. С. 16–25

7. Кузьмичов А.І. Аналітика мережевих структур. Моделювання засобами WinQSB та MS Excel. Київ: Ліра-К, 2018. 208 с.

8. Додонов Є.О., Додонов О.Г., Кузьмичов А.І. Моделювання та візуалізація максимальних багатопродуктових потоків у мережі. *Реєстрація, зберігання і оброб. даних*. 2018. Т. 20. № 2. С. 52–59.

Надійшла до редакції 20.08.2018

[3] у матричній постановці їх було би біля 5000