КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Вычислительный эксперимент

УДК 681.3: 06.51

О.В. ВЕРЕВКА

АПРИОРНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ПРИ ЯРУСНОМ ПОДХОДЕ. ЧАСТЬ 2

Рассмотрено групповое априорное байесовское оценивание при ярусном представлении сетевого графа.

Введение. Данная работа – это продолжение публикации [1], посвящена групповому априорному оцениванию, методы которого являются основой для процедур оценивания апостериорного. Кратко напомним основные обозначения.

1. Основные обозначения. Пусть $\boldsymbol{G}$ – ориентированный ярусно-параллельный ациклиный граф с упорядоченным по ярусной принадлежности множеством вершин $V(\boldsymbol{G}) = V(\boldsymbol{G})=\{v_n\}_{n=1}^{N_G}$. Вершина v_n имеет ярусный показатель $\lambda(v_n)$ и может пребывать в одном из состояний $V_n \in \{V_n^{j_n}\}_{j_n=1}^{J_n}$, $J_n \geq 2$, образующих полную группу. Вершины $\{v_n\}_{n=K_{l-1}+1}^{K_l}$, $l=\overline{0,L}$, $K_l=\sum_{t=0}^{l} k_t$, с одинаковым ярусным показателем образуют l-й ярус $(\lambda(v_n)=l)$ мощностью k_l, $K_{-1}=0$. По матрице смежности $\Omega(\boldsymbol{G})=\{\omega_{ij}\}_{i=1}^{N_G}{}_{j=1}^{N_G}$ вершин $V(\boldsymbol{G})$ построена полная матрица достижимости $\Theta(\boldsymbol{G})=\{\theta_{ij}\}_{i=1}^{N_G}{}_{j=1}^{N_G}$: $\theta_{ij}=1$, если граф $\boldsymbol{G}$ допускает ориентированный маршрут из v_i в v_j, и $\theta_{ij}=0$ в противном случае. На главной диагонали $\theta_{ii}=1$. Для корневых вершин $\{v_n\}_{n=1}^{k_0}$ заданы априорные оценки вероятностей пребывания вершин v_n в состоянии $V_n^{j_n}$, $\boldsymbol{P}(v_n) = \{P(V_n^{j_n})\}_{j_n=1}^{J_n}$. Для вершин других ярусов задана совокупность прямых связей в сети

$\boldsymbol{P}(v_n;\ pr(v_n))$ – оценки условных вероятностей допустимых состояний вершины v_n относительно допустимых состояний ее родительских вершин $pr(v_n)$.

Для вершины v_n, $\lambda(v_n) = l \geq 1$ множество достижимости $\psi(n) = \{v_i{:}\theta_{in} = 1\}_{i=1}^{K_{l-1}}$; полное множество достижимости $\breve{\psi}(n) = v_n \cup \psi(n) = \{v_i{:}\ \theta_{in} = 1\}_{i=1}^{N_G}$. Для вершин $\{v_{m_q}\}_{q=1}^{Q}$, $Q \geq 2$ полное множество достижимости $\breve{\psi}(\{m_q\}_{q=1}^{Q}) = \bigcup_{q=1}^{Q} \breve{\psi}(m_q)$. Пусть $v_n \in V(\boldsymbol{G})$, $\lambda(v_n) \geq 1$, $G(n) \subseteq \boldsymbol{G}$ – подграф графа $\boldsymbol{G}$ с вершинами $\breve{\psi}(n)$. $v_{m_*} \in \psi(n)$ – младший локальный корень для вершины v_n, если v_{m_*} – разделяющая вершина графа $G(n)$ и на цепочках, соединяющих v_{m_*} с v_n, разделяющих в $G(n)$ вершин нет. Внутренняя вершина $v_{m_*} \in \breve{\psi}(\{m_q\}_{q=1}^{Q})$, $\{v_{m_q}\}_{q=1}^{Q} \in V(\boldsymbol{G})$, в графе $G(\{m_q\}_{q=1}^{Q})$ – младший локальный корень для $\breve{\psi}(\{m_q\}_{q=1}^{Q})$, если v_{m_*} – разделяющая вершина графа $G(\{m_q\}_{q=1}^{Q})$, и на всех возможных цепочках, проходящих через v_{m_*}, на младших относительно v_{m_*} ярусах разделяющих в $G(\{m_q\}_{q=1}^{Q})$ вершин нет. Используем обозначение $\overline{f_{\bullet m}} = \{f_{nm}\}_{n=1}^{N}$ для m-го столбца матрицы $\{f_{nm}\}_{n=1}^{N}{}_{m=1}^{M}$.

При априорном групповом оценивании исследуется вероятность $\tilde{P}(\tilde{S}^*_{0\div L}) = P(\bigcap_{j\in\tilde{S}^*_{0\div L}} V_j)$ совместной актуальности группы фиксированных состояний $\{V_j,\ j \in \tilde{S}^*_{0\div L}\}$ вершин $\{v_j,\ j \in \tilde{S}^*_{0\div L}\}$ сетевого графа $\boldsymbol{G}$, с номерами псевдо из множества натуральных чисел $\tilde{S}^*_{0\div L} \subseteq \{n\}_{n=1}^{N_G}$. Структурируем $\tilde{S}^*_{0\div L}$: $\tilde{S}^*_{0\div L} = \tilde{S}_{1\div L} \cup \tilde{S}^*_0$, где $\tilde{S}^*_0 \subseteq \{n\}_{n=1}^{K_0}$ – номера вершин корневого яруса, $\tilde{S}_{1\div L} = \{h_m\}_{m=1}^{M} \subseteq \{n\}_{n=K_0+1}^{N_G}$, $M \leq (N_G - K_0)$, $\tilde{S}_{1\div L} \neq \varnothing$ – упорядоченное множество номеров вершин некорневых ярусов, $\{m_1 < m_2\} \leftrightarrow \{\lambda(v_{h_{m_1}}) \leq \lambda(v_{h_{m_2}})\}$. Вершины v_i и v_j независимы при $(\overline{\theta}_{\bullet i}, \overline{\theta}_{\bullet j})^0 = \sum_{m=1}^{K_0} \theta_{mi}\theta_{mj} = 0$; иначе $(\overline{\theta}_{\bullet i}, \overline{\theta}_{\bullet j})^0 > 0$. Если вершины $\breve{\psi}(\tilde{S}_{1\div L})$ независимы от корневой вершины v_n, назовем v_n внешним относительно $\tilde{S}_{1\div L}$ корнем. Номера всех внешних относительно $\tilde{S}_{1\div L}$ корней из $\tilde{S}^*_0$ объединим в множество D_0, $\tilde{S}^*_0 = \tilde{S}_0 \cup D_0$, $\tilde{S}_0 = \{g_q\}_{q=1}^{Q} \subseteq \{n\}_{n=1}^{K_0}$, $0 \leq Q \leq K_0$, $\tilde{S}_0 \cap D_0 = \varnothing$, возможен вариант $\tilde{S}_0 = \varnothing$ или/и $D_0 = \varnothing$. Определим

$\tilde{S}_{0\div L} = \tilde{S}_{1\div L} \cup \tilde{S}_0$. При $D_0 \neq \varnothing$ одна вершина v_n, $\{n\} \in D_0$ считается независимым графом $G(n)$ и в качестве $\tilde{P}(n)$ используется априорная оценка $P(V_n)$.

Строки и столбцы матриц, состоящие лишь из нулей, назовем пустыми. Значки ${}^{k}\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft^{k}$, $\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft$ – метки начала и конца k-го алгоритма и текущего непронумерованного алгоритма.

2. Этапы ярусного априорного оценивания. Групповое априорное оценивание целесообразно выполнять в 2 этапа.

Сначала определим R, $1 \le R \le K_0$, множеств $\{H_r\}_{r=1}^{R}$, $H_{r_1} \cap H_{r_2} = \varnothing$ при $r_1 \neq r_2$, таких, что граф $G(\tilde{S}_{0\div L})$ с множеством вершин $\Psi(\tilde{S}_{1\div L}) \cup \Psi(\tilde{S}_0) = \Psi(\{h_m\}_{m=1}^{M}) \cup \Psi(\{g_q\}_{q=1}^{Q})$ представим как $G(\tilde{S}_{0\div L}) = \bigcup_{r=1}^{R} G(H_r)$. Если $R \ge 2$, то

$$\tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L}) := \prod_{r=1}^{R} \tilde{P}(H_r)\,, \quad \tilde{P}(\tilde{S}^{*}_{0\div L}) := \tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L}) \times \prod_{n\in D_0} \tilde{P}(n)\,. \tag{1}$$

Использование (1) облегчает вычисления и уменьшает их объем.

Далее для каждого из R подграфов $G(H_r)$ определим маршрутную матрицу $\varsigma^r = \{\zeta^{r}_{nj}\}_{n=1}^{N_G}{}_{j=1}^{N_G+2}$ группового оценивания $\tilde{P}(H_r)$, которую при формировании удобно рассматривать как упорядоченное множество $(N_G + 2)$ столбцов длины N_G. Вычисления в соответствии с ς^r выполняются слева направо, от первого непустого столбца с наименьшим номером до $(N_G + 1)$-го. $(N_G + 1)$-й столбец $\overline{\zeta^{r}_{\bullet N_G+1}}$ задает маршрут оценивания $\tilde{P}(H_r)$ с использованием оценок локальных корней графа $G(H_r)$. Непустые столбцы с номерами $n < \max(H_r)$ задают маршрут оценивания для вершины v_n в случае, если v_n является локальным корнем в графе $G(H_r)$ или локальным корнем в графе с вершинами из множества достижимости более молодого локального корня графа $G(H_r)$. При $\max(H_r) < n \le N_G$, столбцы $\overline{\zeta^{r}_{\bullet n}}$ остаются пустыми. Последний $(N_G + 2)$-й столбец $\overline{\zeta^{r}_{\bullet N_G+2}} = \{\zeta^{r}_{n(N_G+2)}\}_{n=1}^{N_G}$ является вспомогательным, его элементы (0 или 1) идентифицируют множество достижимости $\psi(H_r)$. Интерпретация допустимых значений $\{0, \pm1, \pm2\}$ элементов ζ^{r}_{nj} матриц ς^r при $n \le (N_G + 1)$ аналогична принятой для априорной маршрутной матрицы $\Xi(\boldsymbol{G}) = \{\xi_{mn}\}_{m=1}^{N_G}{}_{n=1}^{N_G}$, где $\overline{\xi_{\bullet n}}$ определяет маршрут оценивания $\boldsymbol{P}(v_n)$ по множеству локальных корней графа $G(n)$. При $\zeta^{r}_{nm} = 0$ оценки, связанные с вершиной v_m, отсутствуют в оценочном соотношении. Если же $\zeta^{r}_{nm} \neq 0$, оценки для v_m учитываются, причем ζ^{r}_{nm} задает статус вершины v_m относительно H_r. Вершина v_m – локальный корень для H_r, если

$|\zeta^r_{nm}| = 1$, и при оценивании используется уже просчитанная оценка $\boldsymbol{P}(v_m)$. Если $|\zeta^r_{nm}| = 2$, то v_m – транзитная в графе $G(H_r)$ вершина, и при учете вершин $\lambda(v_m)$-го яруса используются априорные оценки $\boldsymbol{P}(v_m\,;\, pr(v_m))$. При $\zeta^r_{nm} < 0$ допустимое состояние, в котором пребывает v_m, известно, вершина имеет статус «фиксированная». При $\zeta^r_{nm} > 0$ состояние v_m не определено, вершина имеет статус «свободная». Статус «фиксированная» внутренних относительно $\tilde{S}_{1\div L}$ корневых вершин с номерами псевдо из $\tilde{S}_0$ не меняет структуру матрицы S и просто учитывается непосредственно перед выходом из алгоритма, работающего с множеством $\tilde{S}_{1\div L} = \{h_n\}^M_{n=1}$.

Оценку $\tilde{P}(H_r)$ вероятности того, что вершины $\{v_{g_q}\}^Q_{q=1} \cup \{v_{h_m}\}^M_{m=1} \in V(\boldsymbol{G})$ с номерами из H_r находятся в фиксированных допустимых состояниях, соответственно $\{V_{g_q}\}^Q_{q=1}$ и $\{V_{h_m}\}^M_{m=1}$, получаем согласно $\overline{\zeta^r_{\bullet N_G+1}}$ с учетом локальных корней графа $G(H_r)$, оценки для которых вычисляются слева направо в порядке возрастания номера j непустых столбцов матрицы $\varsigma^r(H_r) = \{\zeta^r_{nj}\}^{N_G}_{n=1}\,{}^{N_G+2}_{j=1}$:

$$\tilde{P}(H_r) := \{\prod_{j:\zeta^r_{j(N_G+1)}=-1} P(V_j)\} \times \sum_{\substack{j_n=1 \\ n:\zeta^r_{n(N_G+1)}=2}}^{J_n} \sum_{\substack{j_i=1 \\ i:\zeta^r_{i(N_G+1)}=1}}^{J_i} \{\{\prod_{n:|\zeta^r_{n(N_G+1)}|=2} P\,[V(n)/\bigcap_{\substack{1\le q\le(n-1), \\ \zeta^r_{q(N_G+1)}\ne 0}} V(q)]\} \times$$
$$\times\{\prod_{i:\zeta^r_{i(N_G+1)}=1} P(V_i^{j_i})\}\}, \quad (2)$$

где $V(k) = V_k^{j_k}$, если $\zeta^r_{k(N_G+1)} > 0$, и $V(k) = V_k$, когда $\zeta^r_{k(N_G+1)} < 0$. Окончательная групповая априорная оценка $\tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L})$ вычисляется согласно (1).

3. Демонтаж ярусного графа на независимые компоненты. Приступим к построению [матрицы $\varsigma(\tilde{S}_{0\div L}) = \{\zeta_{nj}\}^{N_G}_{n=1}\,{}^{N_G+2}_{j=1}$ при $R = 1$ // комплекта $\{\varsigma^r(H_r)\}^R_{r=1}$, $R \ge 2$, матриц $\varsigma^r(H_r) = \{\zeta^r_{nj}\}^{N_G}_{n=1}\,{}^{N_G+2}_{j=1}$ // трехмерной матрицы $\mathrm{S} = \{\varsigma^r(H_r)\}^R_{r=1} =$ $= \{\zeta^r_{nj}\}^{N_G}_{n=1}\,{}^{N_G+2}_{j=1}\,{}^{R}_{r=1}$, $R \ge 2$] для оценивания вероятности $\tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L})$.

Для получения R и $\{H_r\}^R_{r=1}$ предлагаются схемы операций.

Схема I. Случай M=1. ^{1}► Если $\tilde{S}_{1\div L} = \{h_1\}$, то R:=1, $\forall(j,\ n=\overline{1, N_G})$ ζ_{nj}:= 0. (N_G+2)-й столбец матрицы $\varsigma(h_1;\ \tilde{S}_0)$ идентифицирует множество достижимости вершины v_{h_1}, $\overline{\zeta_{\bullet(N_G+2)}} := \overline{\theta_{\bullet h_1}}$. (N_G+1)-й столбец матрицы ς задает маршрут оценивания для вершины v_{h_1}, $\overline{\zeta_{\bullet(N_G+1)}} := \overline{\xi_{\bullet h_1}}$. Далее $m := (N_G+1)$.

а) если в столбце $\overline{\zeta_{\bullet m}}$ нет единиц на позициях, соответствующих некоренным ярусам графа $G(v_{h_1})$ – переход на д). Иначе – необходимо дополнительно обозначить маршруты вычисления оценок для локальных корней;

б) двигаясь снизу вверх по столбцу $\overline{\zeta_{\bullet m}}$: по j от $(m–1)$ до (K_0+1) включительно: ► если $\zeta_{jm}=1$, т. е. v_j в $G(v_{h_1})$ – локальный корень, то в матрице ς $\overline{\zeta_{\bullet j}} := \overline{\xi_{\bullet j}}$; ◄

в) если все столбцы $\overline{\zeta_{\bullet j^*}}$ с номерами $j^* < m$ пусты, переход на д). Иначе – определяем наибольший номер $j^* < m$ непустого столбца $\overline{\zeta_{\bullet j^*}}$. $m := j^*$. Если $m \le K_0$, т. е. вершины всех некорневых ярусов отработаны, переход на д);

г) если в столбце $\overline{\zeta_{\bullet m}}$ нет единиц на позициях, соответствующих некорневым вершинам графа $G(v_{h_1})$, переход на в). Иначе – переход на б);

д) отмечаем в $\varsigma(\tilde{S}_{0\div L})$ строки, соответствующие вершинам с фиксированными состояниями: для $\forall\{n\in \tilde{S}_{0\div L}:\ \overline{\zeta_{n\bullet}} := -\overline{\zeta_{n\bullet}}\}$. Матрицу $\varsigma(\tilde{S}^*_{0\div L})$ получаем, выставив (–1) на главной диагонали $\forall m\in D_0$. ВЫХОД из алгоритма [1]. ◄ [1]

Схема II. Случай $M = 2$. $\tilde{S}_{1\div L} = \{h_1, h_2\}$. Возможны следующие варианты.

Если вершины v_{h_1} и v_{h_2} независимы, $(\overline{\theta}_{\bullet h_1}, \overline{\theta}_{\bullet h_2})^0 = 0$, то $R := 2$, $G(H_1) := \psi(h_1)$, $G(H_2) := \psi(h_2)$, $G(\{h_1,\ h_2\}) = G(h_1) \cup G(h_2)$, $G(h_1) \cap G(h_2) = \varnothing$. Получаем $\mathsf{S} = \{\varsigma^r(h_r;\ \tilde{S}_0 \cap \psi(h_r))\}_{r=1}^{2}$ по схеме I для $\{v_{h_1}\}$ и $\{v_{h_2}\}$. Оценка вероятности того, что вершины из $\tilde{S}_{1\div L}$ и внутренние относительно $\tilde{S}_{1\div L}$ вершины корневого яруса из $\tilde{S}_0 = \{g_q\}_{q=1}^{Q}$ находятся в состояниях $\{V_{h_m}\}_{m=1}^{2}$ и $\{V_{g_q}\}_{q=1}^{Q}$:

$$\tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L}) := \prod_{r=1}^{2} \tilde{P}(h_r \cup \{\tilde{S}_0 \cap \psi(h_r)\}) .$$

Если $(\overline{\theta}_{\bullet h_1}, \overline{\theta}_{\bullet h_2})^0 > 0$, $R := 1$. Возможны два случая.

1. Вершина v_{h_1} – внутренняя для v_{h_2}, $v_{h_1} \in \psi(v_{h_2})$. Тогда $\mathsf{S} = \varsigma^{1\div 2}(h_1, h_2;\ \tilde{S}_0)$ для оценки $\tilde{P}(\tilde{S}_{0\div L})$ получаем по схеме I из $\varsigma^2(h_2;\ \tilde{S}_0)$ предоставлением статуса вершине v_{h_1}, положив в конце алгоритма [1] $\overline{\zeta^2_{h_1\bullet}} := -\overline{\zeta^2_{h_1\bullet}}$.

2. $v_{h_1} \notin \psi(v_{h_2})$, но $\psi(v_{h_1}) \cap \psi(v_{h_2}) \ne \varnothing$. $G(H_1) = \psi(h_1) \cup \psi(h_2)$, $\lambda(v_{\max(H_1)}) = \lambda(v_{h_2})$. $r := 1$. Переход к выполнению алгоритма [4], представленного в схеме III.

Схема III. [2]► Случай $M \geq 3$. Группируем $\tilde{S}_{1\div L} = \{h_m\}_{m=1}^{M}$ в K_0 множеств $\{\Phi_r\}_{r=1}^{K_0}$ номеров вершин: $h_m \in \Phi_r$, если в множестве достижимости $\bar{\theta}_{\bullet h_m}$ вершины v_{h_m} присутствует корневая вершина v_r ($\theta_{rh_m}=1$) и нет корневых вершин с номерами меньше r (используется простой алгоритм: $\vartheta := \tilde{S}_{1\div L}$. Для $r = \overline{1, K_0}$ последовательно по возрастанию индекса r: $\Phi_r := \varnothing$. Для $m = \overline{1, M}$ ► если $h_m \in \vartheta$ и $\theta_{rh_m} = 1$, то $\Phi_r := \Phi_r \cup \{h_m\}$ и $\vartheta := \vartheta \backslash \{h_m\}$. ◄). Если таким образом было построено лишь одно непустое множество, это H_1 и $R := 1$. В противном случае (среди $\{\Phi_r\}_{r=1}^{K_0}$ есть хотя бы два непустых множества) далее применяется алгоритм[3], определяющий количество R, $1 \leq R \leq K_0$, независимых подграфов $\{G(H_r)\}_{r=1}^{R}$ в представлении $G(\tilde{S}_{1\div L}) = \bigcup_{r=1}^{R} G(H_r)$ и упорядоченные по возрастанию значений множества $\{H_r\}_{r=1}^{R}$ номеров $h_n \in H_r$ вершин $v_{h_n} \in G(H_r)$. Построим вспомогательную матрицу $Z(\tilde{S}_{1\div L}) := \{z_{rn}\}_{r=1}^{K_0}{}_{n=1}^{K_0}$ зависимости группировки $\{\Phi_r\}_{r=1}^{K_0}$ вершин графа $G(\tilde{S}_{1\div L})$ от корневых вершин $\{v_r\}_{r=1}^{K_0}$: $z_{rn} = 1$, если в множестве достижимости $\psi(\Phi_n)$ вершин с номерами псевдо из Φ_n присутствует корневая вершина v_r, и $z_{rn} = 0$ в противном случае. Если корневая вершина v_r не является предком ни для одной из вершин $\{v_{h_m}\}_{m=1}^{M}$, строка $\bar{z}_{r\bullet}$ пуста, $\sigma_{r\bullet} = \sum_{n=1}^{K_0} z_{rn} = 0$. Аналогично пуст столбец $\bar{z}_{\bullet n}$ при $\sigma_{\bullet n} = \sum_{r=1}^{K_0} z_{rn} = 0$, что соответствует случаю $\Phi_n = \varnothing$. Столбцы $\bar{z}_{\bullet n} = \{z_{rn}\}_{r=1}^{K_0}$ для множеств $\Phi_n \neq \varnothing$ формируем последовательно по возрастанию n от 1 до K_0: ► для $r = \overline{1, K_0}$ $z_{rn} := \max\{\theta_{rh}: h \in \Phi_n\}$ ◄.

Процедура состоит из последовательности однотипных шагов, выполняемых по убыванию n справа налево: ► из множеств $\Phi_n \neq \varnothing$ (непустых столбцов $\{\bar{z}_{\bullet n}\}_{n=1}^{K_0}$, $\sigma_{\bullet n} > 0$) выбираем Φ_{TAIL} ($\bar{z}_{\bullet TAIL}$) с максимальным номером $TAIL$. Если $\forall n < TAIL$ $\Phi_n \cap \Phi_{TAIL} = \varnothing$, то множество Φ_{TAIL} ($\bar{z}_{\bullet TAIL}$) номеров псевдо вершин соответствует одному из искомых независимых подграфов; изымаем Φ_{TAIL} ($\bar{z}_{\bullet TAIL}$) из дальнейшего рассмотрения и используем это множество для формирования маршрута оценивания. В противном случае объединяем множество Φ_{TAIL} (столбец $\bar{z}_{\bullet TAIL}$) с множеством Φ_r с наибольшим номером r, таким, что $1 \le r \le TAIL - 1$, $\Phi_r \cap \Phi_{TALE} \ne \varnothing$: $\Phi_r := \Phi_r \cup \Phi_{TALE}$ (с непустым столбцом $\bar{z}_{\bullet r}$, $\sigma_{\bullet r} > 0$, $(\bar{z}_{\bullet r}, \bar{z}_{\bullet TAIL}) > 0$: для i от 1 до K_0 $z_{ir}:= \max\{z_{ir}, z_{iTALE}\}$). Исключаем множество Φ_{TAIL} (столбец $\bar{z}_{\bullet TAIL}$) из дальнейшего рассмотрения. ◄

Схему алгоритма[3] можно представить следующим образом:

[3]► а) $TAIL:= K_0+1$; $R:= 0$. Определим значение $KRAI$ – это наименьший номер непустого подмножества Φ_r, $KRAI:= \min\{r\colon 1 \le r \le K_0, \Phi_r \ne \varnothing\}$ (это номер крайнего левого непустого столбца матрицы $Z(\tilde{S}_{1\div L})$, $KRAI:= \min\{r\colon 1 \le r \le K_0, \sigma_{\bullet r} > 0\}$);

б) $TAIL:=TAIL - 1$. Если $TAIL = KRAI$, ► $R:= R + 1$, $H_R:= \Phi_{KRAI}$. Значение R и множества $\{H_r\}_{r=1}^{R}$ определены, ВЫХОД из алгоритма[3]; ◄

в) если $\Phi_{TAIL} = \varnothing$ ($\sigma_{\bullet TAIL} = 0$), переход на б). В противном случае ($\Phi_{TAIL} \ne \varnothing$, или $\sigma_{\bullet TAIL} > 0$) значение $TAIL$ определено. $HEAD$: – $TAIL$;

г) $HEAD:= HEAD - 1$;

д) если $\Phi_{HEAD} = \varnothing$, переход на г);

е) скалярное произведение $(HEAD, TAIL):= (\bar{z}_{\bullet HEAD}, \bar{z}_{\bullet TAIL})$;

ж) если $\Phi_{HEAD} \cap \Phi_{TAIL} \ne \varnothing$ (или $(HEAD, TAIL) > 0$), то

► $\Phi_{HEAD} := \Phi_{HEAD} \cup \Phi_{TAIL}$, $\Phi_{TAIL}:= \varnothing$. Если $HEAD = KRAI$, переход на б).

В противном случае ($HEAD > KRAI$) переход на г); ◄

з) при $\Phi_{HEAD} \cap \Phi_{TAIL} = \varnothing$ (или $(HEAD, TAIL) = 0$)

► если $HEAD = KRAI$, $R:= R + 1$, $H_R:= \Phi_{TAIL}$, $\Phi_{TAIL}:= \varnothing$, переход на б);

если $HEAD > KRAI$, переход на г). ◄ ◄[3] ◄[2]

4. Матрица ярусного априорного группового оценивания. Алгоритм построения матрицы $\varsigma^r(H_r) = \{\zeta^r_{nj}\}_{n=1}^{N_G}{}_{j=1}^{N_G+2}$ при фиксированном r, $1 \le r \le R$ является более сложным «многовершинным» аналогом предложенного и детально изложенного в [1] «одновершинного» алгоритма для получения априорной маршрутной матрицы $\Xi(\boldsymbol{G}) = \{\xi_{mn}\}_{m=1}^{N_G}{}_{n=1}^{N_G}$: $\overline{\xi_{\bullet k}}$, $K_0 + 1 \le k \le N_G$, определяет маршрут оценивания $\tilde{P}(k)$ по множеству локальных корней графа $G(k) = \psi(k)$, порожденного единственной самой молодой в $G(k)$ фиксированной вершиной v_k, а $\overline{\zeta^r_{\bullet N_G+1}}$ задает маршрут оценивания $\tilde{P}(H_r)$ с использованием оценок локальных корней графа $G(H_r) = \psi(H_r)$, порожденного множеством фиксированных «родственных» вершин с номерами из H_r, так что граф $G(H_r)$ может быть «горным хребтом» с несколькими фиксированными разно/равновысокими вершинами и перевалами или «одинокой горой» с фиксированной самой молодой вершиной, в обоих вариантах возможны фиксированные «престарелые родственники» (внутренние вершины) из H_r. Алгоритм можно расписать, как в [1], начиная с младших вершин и строго придерживаясь ярусного порядка при учете остальных вершин.

Выводы. Соотношение (2) является важным также для задач апостериорного оценивания и сетевых задач поиска возможного экстремума вероятностей. Все разработанные для ярусного подхода алгоритмы основаны на использовании информационных зависимостей в сети, и выбор стратегии вычислений в соответствии с (2) и их объем определяется сложностью сетевого графа [2]. Если граф сети является сильно связным, при групповом оценивании целесообразно использование созданных для апостериорного оценивания алгоритмов с вычисленными каркасными оценками ярусных «взносов» для множеств $\{H_r\}_{r=1}^{R}$. В этом случае для управления процессом вычислений привлекается также «диспетчерская» матрица, построение которой рассмотрено в отдельной работе, посвященной апостериорному оцениванию.

О.В. Верьовка

АПРІОРНЕ ОЦІНЮВАННЯ В БАЙЄСІВСЬКИХ МЕРЕЖАХ ПРИ ЯРУСНОМУ ПІДХОДІ. ЧАСТИНА 2

Розглянуто групове апріорне байєсівське оцінювання при ярусному представленні мережевого графу.

O.V. Verovka

THE BAYESIAN NETWORKS A PRIORI ESTIMATION IN THE MULTILEVEL APPROACH. PART 2

The group a priori Bayesian estimation in the network graph multilevel presentation is considered.

1. Веревка О.В., Карпинка Е.С. Априорное оценивание в байесовских сетях при ярусном подходе. Часть 1. *Компьютерная математика*. 2017. № 1. С. 55 – 62.
2. Парасюк И.Н., Веревка О.В. Математические основы вероятностного оценивания в нечетких байесовских сетях доверия. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 2. С. 37 – 51.

Получено 13.07.2017

Об авторе:

Веревка Ольга Викторовна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.