КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ, А.Е. СКУКИС

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕТИ, ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РАЗРЕЗЫ, МАТРОИДЫ

Изучаются свойства матриц, строками которых являются значения 0 или 1, как характеристические векторы фундаментальных разрезов. Показано, что при решении сложных проблем проектирования сетей возникают задачи линейного программирования с определенными матрицами ограничений, а также сформулирована характеристика этих матриц в терминах специальных подматриц.

Пусть $G=(V,E)$ – связный простой и неориентированный граф с множеством узлов V и множеством ребер E, где $n=|V|$ и $m=|E|$. Для произвольного $S \subset V (S \neq \varnothing)$ разрез, разделяющий S и $S = V \setminus S$ в графе G, обозначается как $\delta(S)$. Пусть T – остовное дерево G. Обозначим ребра T как $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$. Удаление любого ребра t_k разделяет T на два поддерева, множества узлов которых обозначаются V_k и $\bar{V}_k = V \setminus V_k$. Соответствующий t_k разрез ¢(V_k) называется фундаментальным разрезом (*FC*). Для любого вектора $x \in R^E$ и $S \subset V (S \neq \varnothing)$, $x(S)$ обозначает $\sum_{e \in \delta(S)} x_e$. Рассмотрим $(n-1) \times m$ – матрицу A с элементами 0 или 1, столбцы которой индексируются ребрами G, а строки являются 0, 1 характеристическими векторами фундаментальных разрезов G, соответствующих ребрам T. Такие матрицы будем называть *FC*-матрицами. Задачи линейного программирования с такими матрицами ограничений возникают при решении, а также при формулировке некоторых классов задач проектирования сетей. Как тема другой статьи, сразу отметим, что применительно к задачам линейного программирования (*LP)* с *FC*-матрицей ограничений и неотрицательным правым вектором, число итераций симплекс алгоритма, в классическом варианте, не превышает $m-n+1$. Этот факт косвенный образ подтверждения того, что ожидаемое число итераций симплекс алгоритма является линейной функцией от числа переменных, при решении большинства практических задач линейного программирования (см., например, [1, 2]). Определенные выше *FC*-матрицы рассматриваются как представления матроидов в комбинаторной теории. Матрица A над некоторым полем – это представление матроида M, если между столбцами A и независимыми множествами M существует взаимно однозначное соответствие, такое что столбцы в A линейно независимы (как векторы), если соответствующее им множество является независимым множеством M. Если M может быть представлен матрицей A с элементами над полем $GF(2)$, то он называется бинарным матроидом. Когда матрица A вполне унимодулярна, M называется регулярным матроидом. Известно, что графический матроид $M=(E,F)$ и его двойственный – регулярные, где E – множество ребер G, а F содержит любой лес, в частности, любое остовное дерево в G. Любое остовное дерево T графа G – это база графического матроида $M=(E,F)$. Таким образом *FC*-матрица является представлением графического матроида $M=(E,F)$ над полем $GF(2)$ относительно его базы T. Многие другие результаты по бинарным и регулярным матроидам можно найти в [3–5]. В отличие от регулярного матричного представления M его *FC*-матрица не унимодулярна, в общем случае. Например, рассмотрим граф G на рисунке, где ребра остовного дерева T выделены жирны-ми линями.

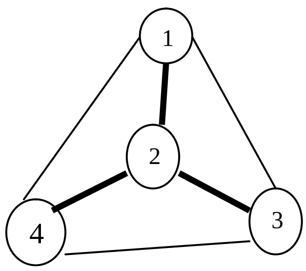

РИСУНОК. Пример графа с остовным деревом

Ребро соединяющее вершины i и j обозначим как (i,j). Матрица (1) представляет собой *FC*-матрицу G, столбцы которой индексируются ребрами (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), а строки – 0, 1 характеристические векторы фундаментальных разрезов, соответствующих ребрам $a=(1,2), b=(2,3), c=(2,4)$ дерева T. Нетрудно видеть, что эта матрица является представлением графического матроида $M=(E,F)$ графа G на рисунке относительно базы T.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \qquad (1)$$

Не трудно убедиться, что эта матрица содержит подматрицу с определителем 2. Далее (см. утверждение), если T гамильтонов путь, то FC – унимодулярна [6].

Рассмотрим задачи проектирование сети, при решении которых возникают LP с FC-матрицей. Задачи проектирования сетей [7, 8] содержат экспоненциально число линейных неравенств, для которых задача тестирования допустимости заданного вектора $x \in R^E$ сводится к нахождению максимального разреза на сети. Так как последняя задача NP-трудная, при определении решений оценочных задач, предлагается решить следующую задачу:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$x(\delta(V_k)) \geq f(V_k), k = 1, ..., n-1,$$
$$x_e \geq l_e \geq 0, e \in E,$$

для различных остовных деревьев графа G, построенных специальной процедурой.

Другая задача проектирования сети, при решении которой используется LP с FC-матрицей, является оптимизационной задачей проектирования сети в форме остовного дерева (ЗПСОД) для соединения заданных n терминальных узлов из множества V [9]. Между парами узлов v и w стоимость коммуникаций вычисляется как произведение количества заданного потока r_{vw} на сумму весов c_{ij} ребер (i, j) на единственном пути, соединяющем v и w в остовном дереве. Стоимость остовного дерева определяется как сумма коммуникаций для всех пар узлов. Среди всех остовных деревьев, связывающих заданные n узлов, требуется найти остовное дерево с минимальной стоимостью. Покажем, что для решения ЗПСОД в качестве подзадачи можно использовать задачу LP с FC-матрицей, хотя в [9] без доказательства отмечается, что эта задача является трудноразрешимой для произвольно заданных весов ребер.

Пусть $G = (V, E)$ – полный граф на n узлах с весами $c_{ij} > 0$ ребер, и $R = (V, E(R))$ обозначает граф заданных требований r_{ij}, то есть $(i, j) \in E(R)$, если $r_{ij} > 0$. Разрез в графе R, определяемый подмножеством $S \subset V (S \neq \varnothing)$ обозначим как $\delta_R(S)$. В этих обозначениях ЗПСОД на графе G можно сформулировать следующим образом: найти остовное дерево T_* такое, что

$$c(T_*) = \min \sum_{e \in T_* \subset E} c_e x_e$$

при ограничениях

$$x_t = r(\text{¢}_R(V_t)), t \in T_* .$$

Чтобы решить проблему ЗПСОД в общем, можно использовать следующие свойства задачи *LP* с *FC*-матрицей. Пусть T_0 – некоторое остовное дерево графа G с весами c_{ij} его ребер. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\varphi(T_0) = \min\{cy;\ Ax = b, x \geq 0\},$$

где A – *FC*-матрица относительно остовного дерева T_0 графа G и $b_t = r(\text{¢}_R(V_t))$, для всех $t \in T_0$. Так как столбцы матрицы A, соответствующие ребрам дерева T_0, образуют единичную подматрицу, то, положив $x_t = b_t$ для $t \in T_0$ и $x_e = 0$ для остальных ребер, получаем начальное базисное решение. Если оно является оптимальным решением, то легко видеть, что $c(T_0) \leq c(T)$ для произвольного остовного дерева T, полученного добавлением произвольного ребра $e \in E \setminus T_0$ в T_0, и удалением некоторого ребра $t \in T_0$ из единственного цикла в $\{e\} \cup T_0$. На базе простых свойств матрицы A легко можно найти остовное дерево T_0 с этим свойством. Таким образом, неравенство $\varphi(T_0) \leq c(T)$ позволяет исключить $O(n\text{«})$ остовных деревьев из множества допустимых решений ЗПСОД. Принимая во внимание, что цикломатическое число $\mu = O(n^2)$ для полного графа G, использование неравенства $\varphi(T_0) \leq c(T)$ существенно уменьшает число итераций при решении ЗПСОД методами типа ветвления и отсечения.

Теперь рассмотрим некоторые характеристики *FC*-матриц. Пусть $A = (I, N)$ – заданная матрица с элементами 0 или 1. Существует ли неориентированный простой граф $G = (V, E)$, такой, что столбцы матрицы A могут быть проиндексированы ребрами из E, строки A представляют собой 0,1 характеристические векторы фундаментальных разрезов, полученных путем удаления ребер некоторого остовного дерева графа G? Другими словами, является ли матрица A графическим представлением матроида относительно некоторой его базы. Следующая лемма позволяет построить такой граф для некоторых частных случаев матрицы $A = (I, N)$.

Лемма. Если матрица $A = (I, N)$ с элементами 0 или 1 имеет $n-1$ строку и $m \leq (n-1)n/2$ столбцов и каждый столбец из *N* содержит два единичные элементы, а также не существует одинаковых столбцов в *N*, то она может быть представлена графом $G = (V, E)$ с *n* вершинами и *m* ребрами относительно остовного дерева *T*– звезда.

Доказательство. Напомним, что произвольный связный граф только с одной не висячей вершиной, называется звездой. Любая звезда с n вершинами является остовным деревом графа G . Пусть T – звезда с не висячей вершиной S. Так как T содержит $n-1$ ребер, сначала индексируем строки A и столбцы подматрицы I ребрами дерева T, затем построим граф $G=(V,E)$ следующим образом. Для любого столбца j подматрицы N, содержащего единичные элементы в строках t и h, добавим ребро j в дерево T, так чтобы оно связывало висячие вершины ребер t и h. Так как в подматрице N нет одинаковых столбцов, граф G не имеет параллельных ребер. Неравенство $m \le (n-1)n/2$ можно записать в виде $m-(n-1) \le (n-1)(n-2)/2$, из которого следует, что столбцы N могут быть индексированы ребрами остовного дерева T простого неориентированного графа G .

Предположим, что строка t матрицы A имеет 1 в столбцах $j_1, j_2, ..., j_p$. По построению графа G, ребра $j_1, j_2, ..., j_p$ связывают висячую вершину ребра t с висячими вершинами этих ребер в G. Поэтому фундаментальный разрез, полученный путем удаления t, отделяет висячей вершины ребра t от остальных вершин. Значит, этот фундаментальный разрез содержит только ребра $j_1, j_2, ..., j_p$. Отсюда следует, что строка t матрицы A является характеристическим вектором фундаментального разреза, соответствующего ребру t в T.

Утверждение. Пусть $T=(V,E(T))$ – гамильтонов путь, соединяющий некоторые вершины $v,w \in V$ в графе $G=(V,E)$. FC-матрица графа G относительно дерева T – вполне унимодулярная.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что гамильтонов путь соединяет вершины $v = 1$ и $w = n$, а также остовное дерево T содержит ребра (v = 1, 2), (2, 3), … , (n – 1, n = w). Рассмотрим FC-матрицу, i-ю строку которой индексируем ребром (i, i + 1) дерева T, где i = 1, … , n – 1. Столбцы FC-матрицы индексируем следующим образом: первые n–1 столбцы соответствуют ребрам дерева T, отставшие m – n + 1 столбцов индексируем ребрами (1, i) при $3 \le i \le n$ и (2, i), при $4 \le i \le n$ и т. д. Таким образом, строка FC-матрицы графа G, как характеристический вектор фундаментального разреза, соответствующего ребру (1, 2) дерева T, содержит 1 в столбцах (1, 2) и (1, i) для $3 \le i \le n$. Далее, строка (2, 3), как характеристический вектор фундаментального разреза, соответствующего ребру (2, 3), содержит 1 во всех столбцах (1, i) для $3 \le i \le n$, поскольку вершины 1 и 2 не отделяются этим разрезом. Аналогично, строка (3, 4), соответствует фундаментальному разрезу для ребра (3, 4), содержит 1 во всех столбцах (1, i) для $4 \le i \le n$ и т. д. То есть, в столбцах FC-матрицы единичные элементы расположены подряд (между единичными элементами не существуют нулевые). Поскольку первые (n – 1) столбца являются единичными векторами, эта FC-матрица имеет вид $A=(I,N)$. По известной теореме Хеллера [6] такая матрица является вполне унимодулярной.

Для того, чтобы сформулировать основные характеристики *FC*-матрицы, допустим, что задана *FC*-матрица $A=(I,N)$, столбцы которой переномерованы $1,\dots m$, а строки – $1,\dots p$. Пусть $n-1=p$. Предположим, что столбец k в N содержит 1 в строках $k_1,...,k_q$ подматрицы N. Другими словами, столбец k индуцирует $q\times(m-p)$ – подматрицу $A(k)$ со строками $k_1,...,k_q$ подматрицы N. Подматрица $A(k)$ называется *HP*-матрицей (Hamiltonian path), если существует такое переупорядочение строк $A(k)$, что в полученной подматрице $A(k)$ не существует столбец, содержащий нулевой элемент между единичными элементами. Так как A является *FC*-матрицей, то существует граф $G=(V,E)$ с $|E|=m$ и $|V|=n$ такой, что строки A являются 0,1 характеристическими векторами фундаментальных разрезов, соответствующих некоторому остовному дереву T графа G. Теперь, пусть $A(k)$ и $A(h)$ индуцированные столбцами k и h подматрицы N, являются *HP*-матрицами, и $kh_1,...,kh_t$ означают общие строки этих подматриц. Другими словами, по построению *FC*-матрицы, ребра, соответствующие строкам $kh_1,...,kh_t$, являются ребрами циклов $C(k)$ и $C(h)$, созданных путем добавления ребер k и h на остовное дерево. Предположим, что строки $kh_1,...,kh_t$ участвовали в переупорядочение строк для того, чтобы преобразовать $A(k)$ и $A(h)$ к *HP*-матрице. Столбцы k и h подматрицы N называются совместимыми по остовному дереву T, если общие строки могут быть переупорядочены как $kh_1,...,kh_t$ и/или $kh_1,...,kh_t$ для преобразования $A(k)$ и $A(h)$ к *HP*-матрице.

Теорема. Любая *FC*-матрица удовлетворяет таким условиям:

– ее столбцы индуцируют к *HP*-матрице;

– если подматрицы, индуцированные любой парой различных столбцов, имеют общие строки, то эти столбцы являются совместимыми.

Доказательство. Пусть $A=(I,N)$ является *FC*-матрицей, т. е. столбцы A могут быть проиндексированы ребрами некоторого неориентированного графа $G=(V,E)$, и строки A являются 0, 1 характеристическими векторами фундаментальных разрезов, соответствующих ребрам некоторого остовного дерева T в G. Пусть k – первый столбец подматрицы N с максимальным числом единичных элементов. Тогда ребро k не может быть хордой любого цикла, и кроме этого вершины цикла $C(k)$ индуцируют подграф G_k, в котором ребра $t\in C(k)$ и $t\in T$ являются ребрами пути P_k, соединяющие конечные вершины ребра k. Так как в подграфе G_k путь P_k – гамильтонов, то подматрица $A(k)$, индуцированная столбцом k, путем перестановки строк, может быть преобразована к *HP*-матрице. Теперь пусть h – второй столбец подматрицы N (если такой существует) с максимальным числом единичных элементов, такой, что не все строки подматрицы $A(h)$ являются строками $A(k)$. Аналогичным образом можно показать, что $A(h)$ также является *HP*-матрицей. Таким образом, повторяя этот процесс, показывается, что рассмотренные столбцы индуцируют *HP*-матрицы. Поскольку ребра не рассмотренных столбцов являются хордами циклов, созданных добавлением одного из ребер, соответствующих рассмотренных столбцов, то эти хорды также индуцируют *HP*-матрицу.

Теперь предположим, что подматрицы *A*(*h*) и *A*(*k*) имеют общие строки $kh_1,...,kh_t$, соответствующие ребрам остовного дерева *T*. Поэтому эти ребра являются ребрами некоторого подпути P_{kh} путей P_k и P_h, которые являются путями в *T*. Тогда ребра подпути P_{kh} являются так же ребрами дерева *T*. Поэтому столбцы *k* и *h* подматрицы *N* являются совместимыми по остовному дереву *T*, что и завершает доказательство.

Обратное утверждение теоремы неверно, например, известная двойственная матрица Фано [3] удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы, однако она не является *FC*-матрицей. Известные матрицы Сеймура P_{10} и $P_{10}^{'}$ [5] не являются *FC*-матрицами, так как содержат столбцы, которые не индуцируют *HP*-матрицу. Любая *FC*-матрица может рассматриваться как представление бинарного матроида. Так как *FC*-матрица обычно не унимодулярная, представление графического матроида этими матрицами не всегда является регулярным.

В работе [10] указывается, что проблема визуализации графов – это одна из важных задач в информатике. Схему доказательства теоремы можно применить для решения проблемы визуализации графов, представленных *FC*-матрицами. Например, при принятии решения о принадлежности образа некоторого символа, к одному из классов, применяются методы выделения структурных признаков [11], с помощью которых описывают геометрические и топологические свойства этого символа. Для выделения структурных признаков символа, используется представление его начертания в виде планарного графа. Выше, на простом примере показано, что один и тот же матроид можно представлять различными *FC*-матрицами относительно различных остовных деревьев. Поэтому, для уточнения структуры планарного графа можно выбрать несколько остовных деревьев, тоже самое, что *FC*-матриц в виде $A=(I,N)$. Затем единицы в любом столбце можно расположить подряд (преобразование к *HP*-матрицы), после чего, не трудно видеть, что грани образа символа будут соответствовать первой и последней единице, а также общим единицам в столбцах, рассмотренных в доказательстве теоремы.

Ф.А. Шаріфов, О.Є. Скукіс

ПРОЕКТУВАННЯ МЕРЕЖІ, ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗРІЗИ, МАТРОЇДИ

Вивчаються властивості матриць, рядками яких є значення 0 або 1, як характеристичні вектори фундаментальних розрізів. Показано, що при вирішенні складних проблем проектування мережі виникають задачі лінійного програмування із певними матрицями обмежень, а також сформульована характеристика цих матриць у термінах спеціальних підматриць.

F.A. Sharifov, O.E. Skukis

NETWORK DESIGN, FUDAMENTAL CUTS, MATROIDS

We study some properties of the matrices with 0- or 1-valued rows in the form of characteristic vectors of fundamental cuts. It is shown that linear programming problems with such matrices of constraints arise in solving complex network design problems; moreover, a characteristic of these matrices is formulated in terms of special submatrices.

1. Borgwardt K.H. The simplex method: A probabilistic Analysis, Algorithms and Combinatorics 1. Springer-Verlag, 1987. 234 p.
2. Fritzsche F. and Holt F.B. More polytope meeting the conjectured Hirsch bound. *Discrete Math.* 1999. 205. P. 77 – 84.
3. Oxley J. Matroid theory. Oxford University Press, 2nd Ed. New York, 2011. 345 p.
4. Truemper K. Matroid Decomposition. Academic Press, 1992. 368 p.
5. Seymour P.D. Decomposition of Regular Matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1980. Vol. 8,3. P. 305 – 359.
6. Schrijver A. Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency in Algorithms and Combinatorics. Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003. 485 p.
7. Шарифов Ф.А., Гуляницкий Л.Ф. Модели и сложность задач проектирования, реконструкции телекоммуникационных и транспортных систем. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. № 5. С. 48–58.
8. Marintseva K.V., Sharifov F.A., Yun G.N. A problem of airport capacity definition. Aeronautic. 2013. 5. P. 1–13.
9. Hu T.C. Optimum communication spanning trees. *SIAM Journal on Computing*, 1974. Vol. 3,3. P. 188 – 195.
10. Kaufmann M. and Wagner D. Drawing Graphs: Methods and Models. Springer, 2001. 258 p.
11. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. М.: Мир, 1989. С. 54–63.

Получено 07.11.2017

Об авторах:

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: asharifov.icyb@gmail.com

Скукис Алексей Евгеньевич,
научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: oskukis@incyb.kiev.ua