КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.85

О.С. ПИЧУГИНА, С.В. ЯКОВЛЕВ

ВЫПУКЛЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦАХ

Разработан подход к построению нижних оценок квадратичной функции на множестве перестановочных матриц Π_n*, основанный на применении функциональных представлений и выпуклых продолжений в полиэдрально-сферических релаксационных задачах. Построены оригинальные квадратичные функциональные представления* Π_n*. Сформировано семейство однопараметрических выпуклых квадратичных продолжений с* Π_n *на все евклидово пространство. Результаты применимы как в приближенных алгоритмах квадратичной оптимизации, так и в точных методах типа ветвей и границ, основанных на полиэдральных, сферических и других видах релаксации.*

Введение. Квадратичные задачи комбинаторной оптимизации охватывают широкий класс практических задач. Как правило, они являются NP-трудными, однако удается выделить специальные классы задач, для которых в отдельных случаях можно предложить полиномиальные алгоритмы решения [1]. Это относится и к квадратичной задаче о назначениях [1, 2], решаемой на множестве перестановочных матриц [3]. Данная статья посвящена анализу новых свойств перестановочных матриц и функций на них, позволяющих повысить эффективность оптимизационных методов решения квадратичных задач.

Постановка задачи. Рассмотрим квадратичную задачу о назначениях [1, 2] в следующей постановке:

$$f(X)=\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}x_{ij}x_{kl}+\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to\min_{\Pi_n}, \quad (1)$$

$$\Pi_n=\Big\{X=\left[x_{ij}\right]_{n\times n}: x_{ij}\in\{0,1\},\ i,j\in J_n,\ X\mathbf{e}=X^T\mathbf{e}=\mathbf{e}\Big\}, \quad (2)$$

где $J_n=\{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{e}=(1,\ldots,1)^T$.

Нетрудно видеть, что (2) задает множество перестановочных матриц [3].

Задачи (1), (2) известны множеством практических приложений [1, 2], в том числе в теории графов [4–6].

Детальный обзор точных и приближенных методов решения квадратичных задач о назначениях приведен в [1]. Особо выделим точные методы типа ветвей и границ, где для получения нижних оценок, как правило, требуется выпуклость целевой функции. Различные схемы овыпукления функции можно найти в [6 – 9].

Не ограничивая общности, положим, что матрица $\mathbf{A} = \left[a_{ijkl} \right]_{n \times n \times n \times n}$ обладает свойством:

$$a_{ijkl} = a_{klij}, \; i, j, k, l \in J_n . \tag{3}$$

Теоретические сведения и определения. Введем следующие понятия [10, 11].

Множество E назовем вершинно расположенным, если его точки и только они являются вершинами своей выпуклой оболочки – комбинаторного многогранника:

$$E = vert \; conv \, E . \tag{4}$$

Функциональным назовем представление множества E с помощью аналитических зависимостей вида:

$$f_j(x) = 0, \; j \in J_{m'}, \tag{5}$$

$$f_j(x) \le 0, \; j \in J_m \setminus J_{m'} . \tag{6}$$

В зависимости от вида функций (5), (6) такие представления могут быть линейные и нелинейные, непрерывные, дифференцируемые, выпуклые и т. п.

Представление (5), (6) может быть переписано в виде:

$$E = \bigcap_{i \in J_m} M_i , \tag{7}$$

где

$$M_j = \left\{ f_j(x) = 0, \; j \in J_{m'}; \; f_j(x) \le 0, \; j \in J_m \setminus J_{m'} \right\} . \tag{8}$$

Функциональное представление множества E назовем:

а) строгим, если

$$m = m' ; \tag{9}$$

б) неизбыточным, если исключение любого из ограничений (5), (6) приводит к нарушению условия (7);

в) ограниченным, если хотя бы одно из множеств (8) ограничено.

Функцию $F(x)$ назовем продолжением функции $f(x)$, заданной на E, если $F(x)$ определена на $E' \supset E$ и $F(x) \underset{E}{=} f(x)$. При этом будем говорить, что функция $f(x)$ имеет продолжение с E на E'.

По аналогии с классификацией функциональных представлений, продолжения функций могут быть непрерывными, выпуклыми, нелинейными, дифференцируемыми и т. п.

Если функция $F(x)$ – выпукла на выпуклом множестве $E' \supset E$, то соответствующее продолжение назовем выпуклым.

Семейство функций $F(x, \lambda)$, $x \in E' \supset E$, $\lambda \in \Lambda \subseteq R^k$, назовем k-параметрическим семейством продолжений функции $f(x)$, заданной на E, если $F(x, \lambda)$ является продолжением $f(x)$ с E на E' $\forall \lambda \in \Lambda$.

Свойства Π_n и его функциональные представления. Перечислим некоторые известные и исследуем алгебро-топологические и тополого-метрические свойства Π_n, которые будут использованы для построения его новых функциональных представлений.

Известно [3], что выпуклой оболочкой множества Π_n является многогранник Биркгоффа, описываемый следующей системой:

$$D_n = \left\{ X \in R^{n\times n} :\ X \ge \mathbf{0},\ X\mathbf{e} = X^T\mathbf{e} = \mathbf{e} \right\}. \tag{10}$$

Важнейшим свойством Π_n является его вершинная расположенность, т. е. $\Pi_n = \mathrm{conv} D_n$. Следовательно, учитывая результаты работы [11], можно утверждать о существовании выпуклых продолжений для произвольных функций на Π_n.

Введем в рассмотрение множество B_n булевых векторов размерности n и обозначим

$$B_n(m) = \left\{ x \in B_n :\ \sum_{i=1}^{n} x_i = m \right\}. \tag{11}$$

Будем также использовать следующие обозначения:

$$\mathbf{a} = (a,...,a)^T \in R^n,\ \forall a \in R;$$

для строк и столбцов матрицы X порядка n:

$$\mathbf{x}_i = \left(x_{ij}\right)_j,\ i \in J_n;\ \mathbf{x}'_j = \left(x_{ij}\right)_i,\ j \in J_n; \tag{12}$$

если $M \in R^k$, то $M^m \in R^{m\times k} : M^m = \underset{i=1}{\overset{m}{\otimes}} M$;

$$\mathbf{B}_n(m) = \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} B_n^i(m),\ \text{где } B_n^i(m) = \{\mathbf{x}_i \in B_n(m)\},\ i \in J_n;$$

$$\mathbf{B}'_n(m) = \underset{j=1}{\overset{n}{\otimes}} B_n'^j(m),\ \text{где } B_n'^j(m) = \left\{\mathbf{x}'_j \in B_n(m)\right\},\ j \in J_n.$$

Утверждение 1. Множество Π_n представимо в виде пересечения:

$$\Pi_n = \mathbf{B}_n(1) \cap \mathbf{B}'_n(1). \tag{13}$$

Утверждение 2. $B_n(1)$ при $n > 2$ имеет следующее строгое квадратичное представление:

$$x_i^2 - x_i = 0,\ i \in J_n; \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 + \frac{2}{n} = 0. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что сфера минимального радиуса, описанная вокруг $B_n(1)$, представима в виде (15), поскольку для точек множества $B_n(1)$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 1/n\right)^2 = 1 - 1/n. \tag{16}$$

Утверждение 3. Множество Π_n вписано в сферу минимального радиуса $S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_{ij} - 1/n\right)^2 = n-1, \tag{17}$$

с центром $(\mathbf{a}^{\min})^n$ ($a^{\min} = 1/n$) радиуса $R^{\min} = \sqrt{n-1}$.

Для доказательства применяем (16) к строкам и столбцам $X \in \Pi_n$:

$$\mathbf{x}_i \in S^i_{r^{\min}}\left(\mathbf{a}^{\min}\right): \sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n},\ i \in J_n, \tag{18}$$

$$\mathbf{x}'_j \in S^j_{r^{\min}}\left(\mathbf{a}'^{\min}\right): \sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n},\ j \in J_n, \tag{19}$$

складывая уравнения (18) по $j \in J_n$ и (19) по $i \in J_n$.

Замечание 1. Следует отметить, что в отличие от $B_n(1)$, добавление к условиям булевости

$$x_{ij}^2 - x_{ij} = 0,\ i,j \in J_n; \tag{20}$$

уравнения (17) описанной сферы минимального радиуса не приводит к строгому представлению Π_n, поскольку (20) задает B_{n^2}, а (17),(20) – $B_{n^2} \cap$ $\cap S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right) = B_{n^2}(n)$, мощность которого $\left|B_{n^2}(n)\right| = C^n_{n^2}$.

Предложим ряд функциональных представлений Π_n.

Полиэдрально-сферическое представление [10] множества Π_n:

$$\Pi_n = D_n \cap S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right). \tag{21}$$

Это квадратичное, нестрогое, выпуклое, ограниченное представление, содержащее n^2 неравенств и $2n$ уравнений системы (10) плюс уравнение (17). Оно избыточно в силу избыточности (10). Представление (21) интересно тем, что позволяет рассматривать непрерывные релаксации (1):

а) традиционную полиэдральную [6, 10]: $f(X) \underset{D_n}{\to} \min$;

б) сферическую [10]: $f(X) \to \min,\ x \in S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right)$.

Последняя позволяет получение более точных нижних оценок функции (1), поскольку в практических задачах зачастую решение безусловной задачи $f(X) \underset{R^{n^2}}{\to} \min$ является внутренней точкой многогранника D_n, и шара, ограниченного сферой (17).

Еще один вид представлений получаем в результате замены в известном строгом представлении (20),

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1 = 0,\ j \in J_n,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 1 = 0,\ i \in J_n, \tag{22}$$

(далее П1) линейных ограничений квадратичными.

Утверждение 4. При $n > 2$ множество Π_n имеет следующее строгое квадратичное представление, включающее систему (20) и дополнительные условия:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 1 + \frac{2}{n} = 0,\ i \in J_n, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1 + \frac{2}{n} = 0,\ i \in J_n. \tag{24}$$

В самом деле, условия вписанности в сферы (18), (19) могут заменить линейные ограничения (22) квадратичными. При этом представление (18) – (20) (далее П2) может быть задается в развернутом виде (20), (23), (24).

Отметим, что оба представления П1 и П2 строгие, квадратичные, выпуклые, неограниченные. Они легко превращаются в ограниченные добавлением уравнения описанной сферы (16). Для характеристики представления (16), (18) – (20) далее используем обозначение П3.

Выпуклые продолжения квадратичных функций на Π_n и их свойства.

С использованием строгого представления П3 построим выпуклое продолжение $F(x)$ на все евклидово пространство для функции $f(x)$, заданной на Π_n.

Целевая функция в задаче (1) представима в виде:

$$f(X) = f_1(X) + f_2(X) \underset{\Pi_n}{\to} \min, \tag{25}$$

$$f_1(X) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};\ f_2(X) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl} x_{ij} x_{kl}. \tag{26}$$

Учитывая (3), $f_2(x)$ переписывается:

$$f_2(X) = f_2'(X) + f_2''(X), \tag{27}$$

$$f_2'(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijij} x_{ij}^2,\ f_2''(X) = 2 \sum_{(i,j)\prec(k,l)} a_{ijkl} x_{ij} x_{kl}, \tag{28}$$

где лексикографическое упорядочение $\prec$ для пары индексов $(i,j),(k,l)$ означает: $(i,j)\prec(k,l) \Leftrightarrow i<k$ или, если $i=k$, то $j<l$.

Выпуклые продолжения строим по каждой из функций в (27). К первому слагаемому $f_2'(X)$ применим (20), формируя выпуклое продолжение с B_{n^2} :

$$f_2'(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijij} x_{ij}^2 \underset{B_{n^2}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijij} x_{ij} = F_2'(X). \tag{29}$$

Перейдем в (28) к $f_2''(x)$ со смешанными квадратичными слагаемыми:

$$f_{ijkl} = 2a_{ijkl} x_{ij} x_{kl}, (i,j)\prec(k,l),\ a_{ijkl} \neq 0. \tag{30}$$

В обозначениях (30) функция $f_2''(x)$ в (28) переписывается в виде:

$$f_2''(X) = \sum_{(i,j)\prec(k,l), a_{ijkl}\neq 0} f_{ijkl}. \tag{31}$$

Применим к каждому слагаемому (30) функции (31) преобразование

$$f_{ijkl} = 2\left|a_{ijkl}\right|\left(\left(x_{ij} \pm x_{kl}\right)^2 - x_{ij}^2 - x_{kl}^2\right) \tag{32}$$

и построим их выпуклые продолжения на базе строгого представления ПЗ, заменяя невыпуклую составляющую

$$-x_{ij}^2 - x_{kl}^2 \tag{33}$$

выпуклой функцией в зависимости от того, какие части представления ПЗ при этом используются.

Способ 1: выпуклое продолжение f_{ijkl} с B_{n^2} на R^{n^2}. Применим к выражениям (33) замену (20) и построим выпуклое продолжение F_{ijkl} слагаемых (30) с B_{n^2} :

$$f_{ijkl} = \left|a_{ijkl}\right|\left(\left(x_{ij} \pm x_{kl}\right)^2 - x_{ij}^2 - x_{kl}^2\right) \underset{B_{n^2}}{=} \left|a_{ijkl}\right|\left(\left(x_{ij} \pm x_{kl}\right)^2 - x_{ij} - x_{kl}\right) = F_{ijkl}. \tag{34}$$

Подставляя в (31) функции (34), получим выпуклое продолжение $f_2''(x)$:

$$F_2''(X) \underset{B^{n^2}}{=} \sum_{(i,j)\prec(k,l)} F_{ijkl} = \sum_{(i,j)\prec(k,l)} \left|a_{ijkl}\right| \left(\left(x_{ij} \pm x_{kl} \right)^2 - x_{ij} - x_{kl} \right) =$$
$$= f_2''(X) + 2 \sum_{(i,j)\prec(k,l)} \left|a_{ijkl}\right| \left(x_{ij}^2 - x_{ij} \right) = f_2''(x) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_{ij}^2 - x_{ij} \right) A_{ij}; \tag{35}$$

$$A_{ij} = \sum_{k,l:(i,j)\neq(k,l)} \left|a_{ijkl}\right|, \ i,j \in J_n. \tag{36}$$

Способ 2: продолжения $f_{ij,i'j'}$ с описанных сфер вокруг Π_n и его подмножеств на R^{n^2}.

В выражениях (32) рассмотрим три случая в зависимости от соотношения i,j,k,l: а) $i=k, \ j<l$; б) $i<k, \ j=l$; в) $i<k, \ j<l$. Для каждого из них невыпуклую функцию (33) в (32) заменим выпуклой, используя уравнения сфер минимального радиуса, описанных вокруг $X \in \Pi_n$ (см. (16)) в целом и его составляющих (см. (18), (19)). В результате имеем следующие варианты:

случай а). Из представления (24)

$$-x_{ij}^2 - x_{kl}^2 = -x_{ij}^2 - x_{il}^2 \underset{\mathbf{x}_i \in B_n(1)}{=} \sum_{j''\neq j,l} x_{ij''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{j''=1} x_{ij''} - 1 + \frac{2}{n}; \tag{37}$$

случай б). Из представления (23)

$$-x_{ij}^2 - x_{kl}^2 = -x_{ij}^2 - x_{kj}^2 \underset{\mathbf{x}'_j \in B_n(1)}{=} \sum_{i''\neq i,k} x_{i''j}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i''=1} x_{i''j} - 1 + \frac{2}{n}; \tag{38}$$

случай в). Из уравнения (16)

$$-x_{ij}^2 - x_{kl}^2 \underset{X \in \mathbf{B}_n(1)}{=} \sum_{i''\neq i,k;\, j''\neq j,l} x_{i''j''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i''\neq i,k;\, j''\neq j,l} x_{i''j''} - n + 2. \tag{39}$$

Подставляем (37) – (39) в (32) и получаем три вида выпуклых продолжений:

$$f_{ijil} \underset{\mathbf{x}_i \in S^i_{r_{min}}(\mathbf{a}^{\min})}{=} \left|a_{ijil}\right| \left(\left(x_{ij} \pm x_{il} \right)^2 + \sum_{j''\neq j,l} x_{ij''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{j''=1} x_{ij''} + \frac{2}{n} - 1 \right) =$$
$$= \left|a_{ijil}\right| \left(2 x_{ij} x_{il} + \sum_{j''=1}^{n} x_{ij''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{j''=1} x_{ij''} + \frac{2}{n} - 1 \right) =$$
$$= f_{ijil} + \left|a_{ijil}\right| \left(\sum_{j''=1}^{n} x_{ij''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{j''=1} x_{ij''} + \frac{2}{n} - 1 \right) = F_{ijil}^1. \tag{40}$$

$$f_{ijkj} \underset{\mathbf{x}'_j \in S^{\,j}_{r_{min}}(\mathbf{a}^{\min})}{=} = |a_{ijkj}| \left(\left(x_{ij} \pm x_{kj}\right)^2 + \sum_{i'' \neq i,k} x_{i''j}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i''=1} x_{i''j} + \frac{2}{n} - 1 \right) =$$

$$= |a_{ijkj}| \left(2x_{ij}x_{kj} + \sum_{i''=1}^{n} x_{i''j}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i''=1} x_{i''j} + \frac{2}{n} - 1 \right) =$$

$$= f_{ijkj} + |a_{ijkj}| \left(\sum_{i''=1}^{n} x_{i''j}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i''=1} x_{i''j} + \frac{2}{n} - 1 \right) = F_{ijkj}^2. \tag{41}$$

$$f_{ijkl} \underset{X \in S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right)}{=} |a_{ijkl}| \left(\left(x_{ij} \pm x_{kl}\right)^2 + \sum_{i'' \neq i,\,k;\; j'' \neq j,l} x_{i''j''}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{n} \sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''} + 2 - n \right) = |a_{ijkl}| \left(2x_{ij}x_{kl} + \sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''} + 2 - n \right) =$$

$$= f_{ijkl} + |a_{ijkl}| \left(\sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''} + 2 - n \right) = F_{ijkl}^3. \tag{42}$$

Функцию $f_2''(X)$ (см. (31)) разобъем на слагаемые $f_2^1(X),\ f_2^2(X),\ f_2^3(X)$, соответствующие для каждой пары x_{ij}, x_{kl} описанным случаям а) – в). Применим соответствующий метод овыпукления (40) – (42), формируя три составляющие выпуклого продолжения $F_2'''(X)$ функции $f_2''(X)$ с множества CS, образованного в пересечении гиперсферы (17) и поверхностей (18), (19), на R^{n^2} :

$$CS = \left\{ X \in S_{R^{\min}}\left((\mathbf{a}^{\min})^n\right) : \mathbf{x}_i \in S^{\,i}_{r^{min}}\left(\mathbf{a}^{\min}\right),\ \mathbf{x}'_j \in S^{\,j}_{r^{min}}\left(\mathbf{a}'^{\min}\right),\ i, j \right\}. \tag{43}$$

Обозначим их $F_2^1(X),\ F_2^2(X),\ F_2^3(X)$, соответственно:

$$f_2''(X) = \sum_{\substack{(i,j) \prec (k,l),\\ a_{ijkl} \neq 0}} f_{ijkl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<l} f_{ijkl} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i<k} f_{ijkl} + \sum_{i<k,\, j<l} f_{ijkl} =$$

$$= f_2^1(X) + f_2^2(X) + f_2^3(X) \underset{CS}{=} F_2^1(X) + F_2^2(X) + F_2^3(X) = F_2'''(X),$$

$$F_2^1(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<l} F_{ijkl}^1,\ F_2^2(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i<k} F_{ijkl}^2,\ F_2^3(X) = \sum_{i<k,\, j<l} F_{ijkl}^3. \tag{44}$$

Введем обозначения для сумм степеней столбцов и строк X :

$$s_i^k = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k,\ i \in J_n;\ s_j^{'k} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k,\ j \in J_n;\ S^k = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^k\ . \qquad (45)$$

Перепишем (40) – (44) в виде:

$$F_2^1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<l} F_{ijil}^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<l}\left(f_{ijil} + \left|a_{ijil}\right|\left(\sum_{j''=1}^{n} x_{ij''}^2 - \frac{2}{n}\sum_{j''=1} x_{ij''} + \frac{2}{n} - 1 \right)\right) =$$

$$= f_2^1(X) + \sum_{i=1}^{n}\left(s_i^2 - \frac{2}{n}s_i + \frac{2}{n} - 1 \right)\sum_{j<j'}\left|a_{ijil}\right|; \qquad (46)$$

$$F_2^2(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i<i'} F_{ijkj}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i<k}\left(f_{ijkj} + \left|a_{ijkj}\right|\left(\sum_{i''=1}^{n} x_{i''j}^2 - \frac{2}{n}\sum_{i''=1}^{n} x_{i''j} + \frac{2}{n} - 1 \right)\right) =$$

$$= f_2^2(X) + \sum_{j=1}^{n}\left(s_j^{'2} - \frac{2}{n}s_j^{'} + \frac{2}{n} - 1 \right)\sum_{i<i'}\left|a_{ijkj}\right|; \qquad (47)$$

$$F_2^3(X) = \sum_{i<k,\, j<l} F_{ijkl}^3 = \sum_{i<k,\, j<l}\left(f_{ijkl} + \left|a_{ijkl}\right|\left(\sum_{i'',j''=1}^{n} x_{i''j''}^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{2}{n}\sum_{i'',j''=1} x_{i''j''} + 2 - n \right)\right) = f_2^3(X) + \left(S^2 - \frac{2}{n}S^1 + 2 - n \right)\sum_{i<k,\, j<l}\left|a_{ijkl}\right|. \qquad (48)$$

Применяя (46) – (48) к (44), найдем:

$$F_2^{''}(X) = \left(f_2^1(X) + f_2^2(X) + f_2^3(X) \right) + \sum_{i=1}^{n}\left(s_i^2 - \frac{2}{n}s_i + \frac{2}{n} - 1 \right)\sum_{j<j'}\left|a_{ijil}\right| +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(s_j^{'2} - \frac{2}{n}s_j^{'} + \frac{2}{n} - 1 \right)\sum_{i<i'}\left|a_{ijkj}\right| + \left(S^2 - \frac{2}{n}S^1 + 2 - n \right)\sum_{i<k,\, j<l}\left|a_{ijkl}\right|. \qquad (49)$$

В обозначениях: $\bar{a}_i = \sum_{j<l}\left|a_{ijil}\right|,\ \bar{a}'_j = \sum_{i<k}\left|a_{ijkj}\right|,\ \text{А}= \sum_{i<k,\, j<l}\left|a_{ijkl}\right|,$ выпуклое продолжение (49) переписывается:

$$F_2^{''}(X) \underset{CS}{=} f_2^{''}(X) + \sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\left(s_i^2 - \frac{2}{n}s_i + \frac{2}{n} - 1 \right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\bar{a}'_j\left(s_j^{'2} - \frac{2}{n}s_j^{'} + \frac{2}{n} - 1 \right) + A\left(S^2 - \frac{2}{n}S^1 + 2 - n \right). \qquad (50)$$

Поскольку Π_n образовано в пересечении B_{n^2} и CS (см. (43)), то для получения выпуклого продолжения (1) непосредственно с Π_n задействуем строгое представление ПЗ целиком с помощью выпуклой линейной комбинации выпуклых продолжений $f(x)$ вида (35), (36) и (50) с множеств B_{n^2} и CS на R^{n^2} соответственно: $\forall\lambda\in(0,1)$ $f_2''(x) \underset{\Pi_n}{=} \lambda F_2''(x)+(1-\lambda)F_2'''(x) = F_2''(X,\lambda)$.

Возвращаясь к исходной функции (25), получено ее однопараметрическое семейство выпуклых продолжений:

$$F(X,\lambda) = f_1(X)+F_2(X,\lambda) = f_1(X)+F_2'(X)+F_2''(X,\lambda) =$$

$$= f_1(X)+F_2'(X)+\lambda F_2''(x)+(1-\lambda)F_2'''(x), \qquad (51)$$

где $\lambda\in(0,1)$, $f_1(X)$, $F_2'(X)$, $F_2''(x)$, $F_2'''(x)$ – линейные и квадратичные функции, заданные выражениями (26), (29), (35), (50), соответственно.

Квадратичные продолжения могут быть представлены в форме (1):

$$F(X,\lambda) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}'(\lambda)x_{ij}x_{kl} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}'(\lambda)x_{ij} + d'(\lambda),\ \lambda\in(0,1). \qquad (52)$$

Таким образом, для функции (1) найдено целое семейство (52) выпуклых продолжений в том же классе квадратичных функций. Теперь, для фиксированного $\lambda\in(0,1)$, задача (1) эквивалентна следующей задаче с выпуклой целевой функцией:

$$F(X,\lambda)\to\min_{\Pi_n}. \qquad (53)$$

Найдем нижнюю оценку z^l для $z^* = \min_{\Pi_n} f(x) : z^l = \max\left(z^{l1}, z^{l2}\right)$,

где

$$z^{l1} = \min_{X\in D_n} F(X,\lambda^*) = \max_{\lambda\in(0,1)} \min_{X\in D_n} F(X,\lambda). \qquad (54)$$

$$z^{l2} = \min_{X\in S_{R^{\min}}((\mathbf{a}^{\min})^n)} F(X,\lambda^{**}) = \max_{\lambda\in(0,1)} \min_{X\in S_{R^{\min}}((\mathbf{a}^{\min})^n)} F(X,\lambda). \qquad (55)$$

При этом каждая из подзадач $F(X,\lambda)\to\min_{X\in D_n}$ в (53) представляет собой выпуклую задачу на многограннике Биркгоффа, которая может быть эффективно решена методами условного градиента и проекции градиента [12]. Следует отметить что, подзадачи $F(X,\lambda)\to\min_{X\in S_{R^{\min}}((\mathbf{a}^{\min})^n)}$ в (55) могут быть решены явно [13].

Выводы. В работе предложен подход к решению квадратичной задачи о назначениях на основе функциональных представлений и выпуклых продолжений на множестве перестановочных матриц. С этой целью исследованы свойства множества Π_n, в том числе предложены его оригинальные аналитические функциональные представления. На основе этих представлений построено семейство однопараметрических выпуклых продолжений квадратичной функции с Π_n в R^{n^2}, используемое для получения нижних оценок, основанных на полиэдральной и сферических релаксациях.

О.С. Пічугіна, С.В. Яковлев

ОПУКЛІ ПРОДОВЖЕННЯ ДЛЯ КЛАСУ КВАДРАТИЧНИХ ЗАДАЧ
НА ПЕРЕСТАНОВОЧНИХ МАТРИЦЯХ

Розроблено підхід до побудови нижніх оцінок квадратичної функції на множині перестановочних матриць Π_n, що ґрунтується на застосуванні функціональних представлень і опуклих продовжень у поліедрально-сферичних релаксаційних задачах. Побудовано оригінальні квадратичні функціональні представлення Π_n. Сформовано сімейство однопараметричних опуклих квадратичних продовжень цільової функції з Π_n на весь евклідів простір. Результати застосовні як в наближених алгоритмах квадратичної оптимізації, так і в точних методах типу методу гілок та меж, що ґрунтуються на поліедральних, сферичних та інших видах релаксації.

O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev

CONVEX EXTENSIONS FOR THE QUADRATIC PROBLEMS OVER PERMUTATION MATRICES

An approach to construction of lower bounds of quadratic function over the set Π_n of permutation matrices based on the use of functional representations and convex extensions in polyhedral-spherical relaxation problems is developed. A number of original quadratic functional representations of Π_n are designed. A family of one-parameter convex quadratic extensions of the objective function from Π_n onto the whole Euclidean space is formed. The results are applicable in approximate algorithms of quadratic optimization and in the exact methods such as Branch&Bound ones, based on polyhedral, spherical, and other relaxations.

1. *Burkard R.E.* Quadratic Assignment Problems // In Handbook of Combinatorial Optimization (P. M. Pardalos, D.-Z. Du, R. L. Graham Ed.) . – New York: Springer, 2013. – P. 2741 – 2814.
2. *Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjiman C.S. et al.* Quadratic Programming Problems // In Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization. – New York: Springer US, 1999. – P. 5 –9.
3. *Brualdi R.A.* Combinatorial matrix classes (T. Britz, Ed.). – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 544 p.

4. *Krislock N., Malick J., Roupin F.* Computational results of a semidefinite branch-and-bound algorithm for k-cluster // Computers & Operations Research. – 2016. – **66**. – P. 153–159.
5. *Armbruster M., Fgenschuh M., Helmberg C. et al.* A Comparative Study of Linear and Semidefnite Branch-and-Cut Methods for Solving the Minimum Graph Bisection Problem // Integer Programming & Combinatorial Optimization. – 2008. – 9783540688860. – P. 112 – 124.
6. *Billionnet A., Elloumi S., Plateau M.-C.* Improving the performance of standard solvers for quadratic 0-1 programs by a tight convex reformulation: The QCR method // Discrete Applied Mathematics. – 2009. – **157**. – P. 1185 – 1197.
7. *Billionnet A., Jarray F., Tlig G. et al.* Reconstructing convex matrices by integer programming approaches // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research. – 2013. – **12**, N 4. – P. 329 – 343.
8. *Sherali H.D., Adams W.P.* A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems. (P. M. Pardalos, Ed.). – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 120 p.
9. *Xia Y., Gharibi W.* On improving convex quadratic programming relaxation for the quadratic assignment problem // Journal of Combinatorial Optimization. – 2013. – **30**, N 3. – P. 647–667.
10. *Пичугина О.С., Яковлев С.В.* Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Eastern-European Journal of Enterprise Technologie. – 2016. – № 1. – С. 27–38.
11. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Вычислительная математика и математическая физика. – 1994. – **34**, № 7. – С. 1112 – 1119.
12. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. – Belmont: Athena Scientific, 1995. – 378 p.
13. *Dahl J.* Convex problems in signal processing and communications // Ph.D. thesis, Aalbort University. – 2003. – 100 p.

Получено 01.03.2016

Об авторах:

Пичугина Оксана Сергеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант кафедры прикладной математики
Харьковского национального университета радиоэлектроники,
E-mail: pichugina_os@mail.ru

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры информационных технологий и защиты информации
Харьковского национального университета внутренних дел.
E-mail: svsyak@mail.ru