КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

*Теория и методы оптимизации*

УДК 519.85

Т.А. БАРДАДЫМ, О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

# с -ФУНКЦИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПСА И ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

*Для метода Ф-функций, используемых при описании взаиморасположения геометрических объектов, предложен путь расширения базовых объектов эллипсоидом. В качестве примера построена Ф-функция для произвольно ориентированных эллипса и выпуклого многоугольника.*



**Введение.** Научный интерес к задачам оптимального размещения геометрических объектов обусловлен сложностью их решения (как правило, подобные задачи многоэкстремальные), наряду с востребованностью во многих областях человеческой деятельности (компоновка двигателей, упаковка грузов, раскрой кристаллов и т. д.). В основе математического моделирования оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] лежит аналитическое описание взаиморасположения геометрических объектов (включения, пересечения, касания). Одним из конструктивных средств такого описания считается метод $\Phi$-функций (харьковская математическая школа, см., например, [2 – 5]).

**Определение.** Под $\Phi$-функцией для двух геометрических объектов $A = A(x_A)$ и $B = B(x_B)$, аргументы которых характеризуют их расположение в пространстве, понимают любую всюду определенную непрерывную функцию $\Phi^{A,B}(x_A, x_B)$, обладающую следующими свойствами:

$$\Phi^{A,B} > 0, \text{ если } A \cap B = \varnothing,$$

$$\Phi^{A,B} = 0, \text{ если } \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \varnothing \wedge A \cap B \neq \varnothing,$$

$$\Phi^{A,B} < 0, \text{ если } \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \neq \varnothing.$$

Таким образом, $\Phi$-функция представляет собой формализованое описание взаимного расположения геометических объектов. В работах [2 – 4] построены $\Phi$-функции для ряда базовых пар объектов. На их основе можно строить $\Phi$-функции для более сложных геометрических фигур (основные принципы таких построений изложены в [5]), например, для объединений множеств имеет место следующее представление $\Phi$-функции:

$$\Phi^{(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_p),(B_1 \cup B_2 \cup .. \cup B_q)} = \min_{\substack{i=1,...,p \\ j=1,...,q}} (\Phi^{A_i, B_j}).$$

Такой подход позволяет, например, эффективно работать с объектами, ограниченными прямолинейными отрезками и дугами окружностей [4].

Понятно, что применение метода $\Phi$-функций для аналитического описания взаиморасположения геометрических объектов существенно связано с набором известных базовых $\Phi$-функций (насколько адекватно с помощью базовых объектов можно составить заданные в исходной задаче фигуры). Соответственно, дополнение этого набора расширяет возможности метода. Принимая во внимание, что среди базовых объектов уже есть шар [2 – 5], можно на основе построенных для него Ф-функций дополнить множество базовых объектов эллипсоидом (отметим, что некоторые Ф-функции с эллипсоидами были рассмотрены в [6], а в работе [7], где рассматривалась задача упаковки гомотетичных эллипсоидов в куб, при использовании Ф-функции существенно использовалось предположение о гомотетичности эллипсоидов).

**Преобразование пространства и построение Ф-функций.** Пусть задана пара *n*-мерных объектов: некоторый объект $A$ и эллипсоид $E = \{x : (x - x_C)^T D(x - x_C) \le r^2\}$, где $D \in S^+$ – симметрическая положительно определенная матрица размерностью $n \times n$. Векторы $x_A$ и $x_E$ однозначно определяют расположение в пространстве $R^n$ объектов $A(x_A)$ и $E(x_E)$, соответственно. Отметим, что элементы матрицы $D$ эллипсоида могут быть как константами в случае строго ориентированного в пространстве эллипсоида, так и функцией от некоторых переменных (например, зависеть от элементов матрицы поворота в случае, когда в задаче рассматривается неориентированный эллипсоид). Рассмотрим линейное преобразование пространства, которое определяет оператор $P$, сопоставляющий вектору $x$ вектор $\tilde{x} = D^{1/2}x$. В новом пространстве эллипсоид $E(x_E)$ преобразуется в шар $C(\tilde{x}_E)$, а объект $A(x_A)$ – в объект $\tilde{A}(\tilde{x}_A)$. Поскольку невырожденное линейное преобразование пространства не меняет взаиморасположения объектов, то в случае, когда $\Phi^{C,\tilde{A}}(\tilde{x}_E, \tilde{x}_A)$ – функция для шара $C(\tilde{x}_E)$ и объекта $\tilde{A}(\tilde{x}_A)$ в преобразованном пространстве известна, в исходном пространстве ей соответствует искомая $\Phi$-функция для эллипсоида $E(x_E)$ и объекта $A(x_A)$

$$\Phi^{E,A}(x_E, x_A) = \Phi^{C,\tilde{A}}(\mathrm{P}^{-1}(x_E), \mathrm{P}^{-1}(x_A)). \qquad (1)$$

В качестве примера применения формулы (1) приведем построение $\Phi$-функции для произвольно ориентированных эллипса и выпуклого многоугольника в двухмерном пространстве.

**Ф-функция для эллипса и выпуклого многоугольника.** Рассматривается пара объектов.

1. Выпуклый многоугольник $K$, для которого известны два способа представления в собственной системе координат – как с помощью множества вершин $v_i$, $i=\overline{1,m_v}$, так и с помощью набора полуплоскостей $b_i^T x + c_i \le 0$, $i=\overline{1,m_{gr}}$, пересечением которых он является,

$$K=\left\{x : x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1 : \alpha_i \ge 0, i=\overline{1,m_v}\right\}=\left\{x:(b_i,x)+c_i\le 0, i=\overline{1,m_{g\,r}}\right\},$$

где $m_v$ – количество его вершин, $m_{g\,r}$ – количество его ребер. В двухмерном пространстве $m_v = m_{g\,r} = m.$

Вектор трансляции (сдвиг) $x_K \in R^2$ однозначно определяет расположение ориентированного многоугольника в пространстве $R^2$.

2. Ориентированный эллипс $E(x_0)=\{x:(x-x_0)^T D(x-x_0)\le r^2\}$, для которого роль вектора трансляции выполняет вектор центра эллипса $x_0 \in R^2$. Для удобства будем считать, что данное представление дано уже в собственной системе координат многоугольника, т. е. со сдвигом $x_K$.

В преобразованном пространстве путем замены переменных $x = D^{-1/2}\tilde{x}$ получаем следующую пару объектов:

1) круг $C=\{\tilde{x}:(\tilde{x}-\tilde{x}_0)^T(\tilde{x}-\tilde{x}_0)\le r^2\}$,

2) выпуклый многоугольник $\tilde{K}$

$$\tilde{K}=\left\{\tilde{x}:\tilde{x}=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\alpha}_i\tilde{v}_i, \sum_{i=1}^{m}\tilde{\alpha}_i=1:\tilde{\alpha}_i\ge 0, i=\overline{1,m}\right\}=\left\{\tilde{x}:(\tilde{b}_i,\tilde{x})+c_i\le 0, i=\overline{1,m}\right\},$$

где $\tilde{v}_i = D^{1/2}v_i$, $i=\overline{1,m}$ – вершины многоугольника $\tilde{K}$, а $\tilde{b}_i = D^{-1/2}b_i$, $i=\overline{1,m}$ – векторы полуплоскостей, пересечение которых задает многоугольник $\tilde{K}$.

Для пары $C$ и $\tilde{K}$ Ф-функция известна [2]. Нам представляется более удобным работать с ее представлением в векторном виде (в работах представителей харьковской математической школы ее представление дано через координаты):

$$\Phi^{C,\tilde{K}} = \max_{i=\overline{1,m}}\left\{(\tilde{b}_i,\tilde{x}_0)+c_i-r\left\|\tilde{b}_i\right\|,\tilde{\psi}_i\right\}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{\psi}_i=\min\left\{(\tilde{x}_0-\tilde{v}_i)^T(\tilde{x}_0-\tilde{v}_i)-r^2, l_i^T(\tilde{x}_0-\tilde{v}_i)-1\right\}. \tag{3}$$

Здесь $l_i^T(\tilde{x}-\tilde{v}_i)-1\le 0$ – полуплоскость, которая ограничена прямой, проходящей через точки $V_{i1}=\tilde{v}_i + r\dfrac{\tilde{b}_{i1}}{\left\|\tilde{b}_{i1}\right\|}$ и $V_{i2}=\tilde{v}_i + r\dfrac{\tilde{b}_{i2}}{\left\|\tilde{b}_{i2}\right\|}$ ($\tilde{b}_{i1}$ и $\tilde{b}_{i2}$ соответствуют прямым, образующим вершину $\tilde{v}_i$), и содержащая вершину $\tilde{v}_i$ ($l_i^T \tilde{v}_i - 1 < 0$). Параметр $l_i$ полуплоскости $l_i^T(\tilde{x} - \tilde{v}_i) - 1 \le 0$ определяется следующим образом:

$$l_i = V_i^{-1} e, \quad \text{где } V_i = \begin{pmatrix} \left(V_{i1} - \tilde{v}_i\right)^T \\ \left(V_{i2} - \tilde{v}_i\right)^T \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\tilde{b}_{i1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\right)^T \\ \left(\dfrac{\tilde{b}_{i2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|}\right)^T \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что $\Phi$-функция (2), (3) несколько отличается от Ф-функции в [2]. Введем обозначения координат векторов $\tilde{b}_i = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{i,1} \\ \tilde{b}_{i,2} \end{pmatrix}$ и $\tilde{v}_i = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{i1} \\ \tilde{v}_{i2} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,m}$, $\tilde{x}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{02} \end{pmatrix}$. Тогда

$$V_i^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\tilde{b}_{i1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\right)^T \\ \left(\dfrac{\tilde{b}_{i2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|}\right)^T \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{b}_{i1,1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|} & \dfrac{\tilde{b}_{i1,2}}{\|\tilde{b}_{i1}\|} \\ \dfrac{\tilde{b}_{i2.1}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} & \dfrac{\tilde{b}_{i2,2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r\left(\dfrac{\tilde{b}_{i1,1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\dfrac{\tilde{b}_{i2,2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} - \dfrac{\tilde{b}_{i1,2}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\dfrac{\tilde{b}_{i2,1}}{\|\tilde{b}_{i2}\|}\right)} \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{b}_{i2,2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} & -\dfrac{\tilde{b}_{i1,2}}{\|\tilde{b}_{i1}\|} \\ -\dfrac{\tilde{b}_{i2,1}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} & \dfrac{\tilde{b}_{i1,1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|} \end{pmatrix}$$

и $\Phi$-функция (2), (3) через координаты выразится следующим образом:

$$\Phi^{C,K} = \max_{i=\overline{1,m}} \max\left\{\tilde{b}_{i1}\tilde{x}_{01} + \tilde{b}_{i2}\tilde{x}_{02} + c_i - r, \psi_i\right\}, \tag{4}$$

где

$$\psi_i = \min\left\{\sum_{j=1}^{2}(\tilde{x}_{0j} - \tilde{v}_{i1})^2 - r^2, \frac{(\tilde{x}_{01} - \tilde{v}_{i1})\left(\dfrac{\tilde{b}_{i2,2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} - \dfrac{\tilde{b}_{i1,2}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\right) + (\tilde{x}_{02} - \tilde{v}_{i2})\left(\dfrac{\tilde{b}_{i1,1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|} - \dfrac{\tilde{b}_{i2,1}}{\|\tilde{b}_{i2}\|}\right)}{r\left(\dfrac{\tilde{b}_{i1,1}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\dfrac{\tilde{b}_{i2,2}}{\|\tilde{b}_{i2}\|} - \dfrac{\tilde{b}_{i1,2}}{\|\tilde{b}_{i1}\|}\dfrac{\tilde{b}_{i2,1}}{\|\tilde{b}_{i2}\|}\right)} - 1\right\} \tag{5}$$

Отличие выражений (4), (5), от предложенных в [2] состоит в том, что, во-первых, в [2] векторы $\tilde{b}_i$, $i = \overline{1,m}$, нормированы ($\|\tilde{b}_i\| = 1$, $i = \overline{1,m}$) и, во-вторых, функция

$$l_i^T(\tilde{x}_0-\tilde{v}_i)-1=(\tilde{x}_0-\tilde{v}_i)^T V_i^{-1}e-1=\frac{(\tilde{x}_{01}-\tilde{v}_{i1})\left(\frac{\tilde{b}_{i2,2}}{\left\|\tilde{b}_{i2}\right\|}-\frac{\tilde{b}_{i1,2}}{\left\|\tilde{b}_{i1}\right\|}\right)+(\tilde{x}_{02}-\tilde{v}_{i2})\left(\frac{\tilde{b}_{i1,1}}{\left\|\tilde{b}_{i1}\right\|}-\frac{\tilde{b}_{i2,1}}{\left\|\tilde{b}_{i2}\right\|}\right)}{r\left(\frac{\tilde{b}_{i1,1}}{\left\|\tilde{b}_{i1}\right\|}\frac{\tilde{b}_{i2,2}}{\left\|\tilde{b}_{i2}\right\|}-\frac{\tilde{b}_{i1,2}}{\left\|\tilde{b}_{i1}\right\|}\frac{\tilde{b}_{i2,1}}{\left\|\tilde{b}_{i2}\right\|}\right)}-1$$

домножена на знаменатель.

Как уже упоминалось, невырожденное линейное преобразование пространства не меняет взаиморасположения объектов, и поэтому в соответствии с формулой (1) Ф-функция для пары объектов $E$ и $K$ будет иметь следующий вид:

$$\Phi^{E,K}(x_0)=\Phi^{C,\tilde{K}}(D^{1/2}x_0)=\max_{i=1,m}\left\{(D^{-1/2}b_i,D^{1/2}x_0)+c_i-r\left\|D^{-1/2}b_i\right\|,\psi_i\right\}=$$

$$=\max_{i=1,m}\left\{(b_i,x_0)+c_i-r\sqrt{b_i^T D^{-1}b_i},\psi_i\right\},$$

где $\psi_i=\min\left\{(D^{1/2}x_0-D^{1/2}v_i)^T(D^{1/2}x_0-D^{1/2}v_i)-r^2,l_i^T D^{1/2}(x_0-v_i)-1\right\}=$

$$=\min\left\{(x_0-v_i)^T D(x_0-v_i)-r^2,\frac{1}{r}e^T\begin{pmatrix}\frac{b_{i1}}{\sqrt{b_{i1}Db_{i1}}} & \frac{b_{i2}}{\sqrt{b_{i2}Db_{i2}}}\end{pmatrix}^{-1}D(x_0-v_i)-1\right\}.$$

Напомним, что мы с самого начала работали в системе координат, привязанной к многоугольнику. Перевод $\Phi$-функции, заданной в системе координат многоугольника, к общему виду определяется формулой $\Phi^{E,K}(x_0)=\Phi^{E,K}(x_C-x_K)$.

**Выводы.** В работе рассмотрена возможность построения $\Phi$-функций для пары объектов в случае, если известна $\Phi$-функция для пары их образов, полученных в результате линейного преобразования пространства. Путем применения данного подхода получена $\Phi$-функция для ориентированных эллипса и выпуклого многоугольника в двухмерном пространстве:

$$\Phi^{E,K}(x_C,x_K)=\max_{i=1,m}\left\{(b_i,x_C-x_K)+c_i-r\left\|D^{-1/2}b_i\right\|,\right.$$
$$\min\left\{(x_C-x_K-v_i)^T D(x_C-x_K-v_i)-r^2,\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{r}e^T\begin{pmatrix}\frac{b_{i1}}{\sqrt{b_{i1}Db_{i1}}} & \frac{b_{i2}}{\sqrt{b_{i2}Db_{i2}}}\end{pmatrix}^{-1}D(x_C-x_K-v_i)-1\right\}\right\}.$$

*Т.О. Бардадим, О.А. Березовський*

$\Phi$-ФУНКЦІЯ ДЛЯ ЕЛІПСА ТА ОПУКЛОГО БАГАТОКУТНИКА

Для метода $\Phi$-функцій, що використовуються для опису взаємного розташування геометричних об’єктів, запропоновано спосіб розширенння базових об’єктів еліпсоїдом. Як приклад побудовано $\Phi$-функцію для довільно орієнтованих еліпса та опуклого багатокутника.

*T.O. Bardadym, O.A. Berezovskyi*

Ф-FUNCTIONS FOR ELLIPSES AND CONVEX POLYGONS

For the method of Ф-functions used to describe relative positions of geometric objects, the way to include ellipsoids to the collection of primary objects is proposed. As an example, the Ф-function of arbitrary oriented ellipses and convex polygons is build.

1. *Waascher G., Haußner, H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Eur. J. Operat. Res. – 2007. – **3** (16). – P. 1109 – 1130.
2. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И, Романова Т.Е., Злотник М.В.* Алгоритм декомпозиции геометрических объектов в 2D-задачах // Кибернетика и системный анализ. – 2011.– № 6. – С. 28 – 37.
3. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И. и др.* Полный класс Ф-функций для базовых двумерных φ-объектов // Докл. НАН Украины. – 2010. – № 12. – С. 25 – 30.
4. *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T.* Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Annals of Operations Research. – 2010. – **179** (1). – P. 343 – 368.
5. *Stoyan Yu., Torno T., Scheithauer G., Romanova T.* Ф-functions for primary 2D-objects // Studia Informatica. Universalis. – 2001. – № 2. – P. 1 – 32.
6. *Бардадым Т.А., Березовский О.А.* Заметки о подходах к построению Ф-функций для эллипсов // Компьютерная математика. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2013. – № 2. – С. 50 – 56.
7. *Стецюк П.І., Романова Т.Є., Субота І.О. NLP*-задача упаковки гомотетичних еліпсів в прямокутний контейнер // Теорія оптимальних рішень. – 2014. – С. 139 – 146.

Получено 20.02.2015

***Об авторах:***

*Бардадым Тамара Алексеевна*,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: tbardadym@gmail.com

*Березовский Олег Анатольевич*,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: berezovskyi@mail.ru