PACS: 62.20.Fe, 62.80.+f

В.Л. Бусов

О СООТНОШЕНИИ ВКЛАДОВ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДЕФОРМИРУЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ФРАГМЕНТИРОВАННЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Донбасская государственная машиностроительная академия
ул. Шкадинова, 72, г. Краматорск, 84313, Украина

Статья поступила в редакцию 11 июня 2003 года

В условиях циклического нагружения при плоском чистом изгибе произведена оценка вкладов составляющих деформирующего напряжения $\hat{\sigma}$ для фрагментированных поликристаллов на стадии однородной фрагментации. Показано, что четыре составляющие деформирующего напряжения, связанные с ростом поверхностной энергии мало- и большеугловых границ деформационного происхождения, с измельчением и ростом упругой энергии фрагментов совпадают по порядку величины; составляющая $\hat{\sigma}$, определяющая рост упругой энергии дислокаций при их размножении, имеет величину на порядок меньше.

Известно [1], что деформирующее напряжение $\hat{\sigma}$ как интегральная мера сопротивления внутренних напряжений $\hat{\sigma}^{\text{int}}$ процессу деформирования состоит из двух слагаемых:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{\text{eff}} + \hat{\sigma}^{z}, \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}^{\text{eff}}$ – напряжение, работа A^{eff} которого на приращении средней пластической деформации (ПД) $\delta\hat{E}^{\text{pl}}$ затрачивается на диссипацию энергии в виде тепла; $\hat{\sigma}^{z}$ – атермическая составляющая $\hat{\sigma}$ (тензор Кадашевича–Новожилова), отражающая перевод подводимой энергии в скрытую (латентную) форму; $\hat{\sigma}^{z}$ подразделяется авторами [1] следующим образом:

$$\hat{\sigma}^{z} = \hat{\sigma}^{d} + \hat{\sigma}^{\theta} + \hat{\sigma}^{r} + \hat{\sigma}^{f}, \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}^{d}$ – напряжение, работа A^{d} которого на приращении $\delta\hat{E}^{\text{pl}}$ идет на рост энергии дислокаций в результате их размножения; $\hat{\sigma}^{\theta}$ и $\hat{\sigma}^{r}$ – напряжения, работа $A^{\theta}(A^{r})$ которых на $\delta\hat{E}^{\text{pl}}$ идет на рост удельной поверхностной энергии границ фрагментов соответственно за счет изменения угла разориентации θ и измельчения фрагментов; $\hat{\sigma}^{f}$ – напряжение, работа A^{f} которого идет на рост свободной упругой энергии фрагментов при смещении и повороте их друг относительно друга как целого. Представляет интерес оценить составляющие $\hat{\sigma}$ и сравнить их вклады.

1. Известно, что скрытая составляющая подведенной к образцу энергии не превышает нескольких процентов от всей затраченной энергии [2, с. 250], остальная ее часть переходит в тепло, рассеивается в окружающей среде и разогревает образец [3]. Согласно [1] $\hat{\sigma}^{\text{eff}}$ определяется суммой

$$\hat{\sigma}^{\text{eff}} = \frac{\dot{D}}{\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}} = \frac{\dot{D}^{a} + \dot{D}^{\text{acc}}}{\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}}, \tag{3}$$

где D – плотность рассеянной энергии, $\dot{D}^{a}$ и $\dot{D}^{\text{acc}}$ – скорости рассеяния упругой энергии соответственно внешних $\hat{\sigma}^{(e)}$ и внутренних $\hat{\sigma}^{\text{int}}$ напряжений. В предельном случае нулевой аккомодации $\dot{D}^{\text{acc}} = 0$ величина $\hat{\sigma}^{\text{eff}}$ равна внешнему напряжению $\sigma^{(e)}$ при стационарном движении решеточных дислокаций:

$$\hat{\sigma}^{\text{eff}} = \frac{\dot{D}^{a}}{\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}} = \frac{\left\langle \hat{\sigma}^{(e)}..\dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{a} \right\rangle_{V}}{\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}} = \frac{\hat{\sigma}^{(e)*}..\left\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{a} \right\rangle}{\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}} = \hat{\sigma}^{(e)}, \tag{4}$$

где

$$\left\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{a} \right\rangle = \frac{1}{2b} \sum_{sp} \left(\mathbf{nb} + \mathbf{bn} \right)_{sp} \rho_{sp}^{a} \upsilon_{sp}^{a} = \dot{\hat{E}}^{\text{pl}}, \tag{5}$$

$\mathbf{n}$ – вектор нормали к плоскости скольжения; $\mathbf{b}$ и υ^{a} – вектор Бюргерса и скорость подвижных дислокаций действующих активных систем скольжения; ρ^{a} – плотность подвижных дислокаций; индексы s и p – номера соответственно фрагмента и системы скольжения; (..) – свертка по двум парам индексов; внешнее напряжение $\hat{\sigma}^{(e)}$ является и внешним эффективным $\hat{\sigma}^{(e)*}$. Из [1] следует

$$\dot{D}^{\text{acc}} = \left\langle \hat{\sigma}^{\text{int}}..\dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{\text{acc}} \right\rangle_{V} = \left(\hat{\sigma}^{\text{int}} \right)^{*}..\left\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{\text{acc}} \right\rangle_{V}, \tag{6}$$

где $\hat{\varepsilon}_{s}^{\text{acc}}$ – пластическая деформация в аккомодационных системах скольжения фрагмента s. Структурно-кинетическое условие сплошности материала [4, с. 164] позволяет оценить $\left\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{\text{acc}} \right\rangle_{V}$:

$$\left\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{s}^{\text{acc}} \right\rangle_{V} > \dot{\hat{E}}^{\text{pl}}. \tag{7}$$

Эффективный тензор внутренних напряжений $\hat{\sigma}^{\text{int}\,*}$ определяется распределением сидячих дислокаций леса и источников внутренних напряжений на границах фрагментов [4, с. 150]. На стадии однородной фрагментации макроскопически измеряемая величина амплитуды внутренних напряжений σ_0

обычно мала по сравнению с величиной компонент $\hat{\sigma}^{(e)}$. Отсюда ясно, что $\dot{D}^{\text{acc}} << \dot{D}^{a}$.

2. Для $\hat{\sigma}^{d}$ [1; 4, с. 203] выполняется зависимость:

$$\hat{\sigma}^{d} = \frac{1}{2}\mu b^{2}\frac{\partial\rho}{\partial\hat{E}^{\text{pl}}}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{E}^{\text{pl}}} = e_i e_j \frac{\partial}{\partial E_{ij}^{\text{pl}}}, \tag{9}$$

где $\{e_i\}$ – векторный базис главных осей образца (i = 1, 2, 3), $\hat{E}^{\text{pl}}$ – компоненты тензора средней ПД, μ – модуль сдвига, **b** – вектор Бюргерса, ρ – средняя по объему образца плотность дислокаций, cm^{-2}. На первой и второй стадиях кривой упрочнения связь между величинами ρ и E^{pl} сохраняется линейной [2, с. 86; 4, с. 203]:

$$\rho = \rho_0 E^{\text{pl}}, \tag{10}$$

где коэффициент пропорциональности на первой стадии, например, для меди $\rho_{0\text{I}}$ = 2.8·10^{8} cm^{-2} [2], $b \approx 2.7\cdot10^{-10}$ m [5, с. 68], отсюда из уравнений (8)–(10) получим $\sigma^{d} \approx (10^{-6}–10^{-5})\mu$.

3. Приведем выражение энергии, идущей на создание границ деформационного происхождения [4, с. 207]:

$$\Gamma = \langle\gamma(\boldsymbol{\theta},\mathbf{N})S_b(\boldsymbol{\theta},\mathbf{N})\rangle_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{N}}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\theta,\varphi,\psi)$; $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\theta,\varphi,\psi)$; θ, φ, ψ – углы Эйлера; γ – поверхностное натяжение границы, erg·cm^{-2}; S_b – суммарная площадь границ на единицу объема; усреднение проводится по всем ориентациям векторов разориентировки $\boldsymbol{\theta}$ и нормалей границ **N**.

Для нетекстурированных фрагментированных поликристаллов текстурная функция $f(\boldsymbol{\theta},\mathbf{N}) = 1$. Найдем $\hat{\sigma}^{\theta}$ для малоугловых границ деформационного происхождения. Для оценки используем упрощенную модель системы фрагментов: все фрагменты одинаковы, имеют форму куба с ребром d и разориентированы на угол θ [4, с. 207, 208]. С помощью выражения (11) и формулы (178) [4] при S_b = const получим

$$\hat{\sigma}^{\theta} = \frac{3\alpha\mu}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{b}{d}\right)\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\hat{E}^{\text{pl}}}\ln\frac{\theta_m}{\theta}, \tag{12}$$

где α – геометрический множитель, $\alpha \sim 1$; ν – коэффициент Пуассона, для металлов кубической симметрии ν = 0.3–0.4; $\bar{\theta}$ – средняя величина разориентировки, rad; θ_m – параметр Рида–Шокли, θ_m = 0.6–0.5 rad. В [4, с. 82] обоснована зависимость

$$\overline{\theta} = \beta\left(E^{\text{pl}} - E_0^{\text{pl}}\right),$$

где E_0^{pl} – пороговое значение пластической деформации для начала фрагментации, $E_0^{\text{pl}} \approx 0.1–0.3$. При низких температурах $(0.1–0.2)T_{\text{melt}}$ $\beta \approx 1$, при $T \approx 0.5T_{\text{melt}}$ $\beta \approx 0.6$. Для металлов с ГЦК-решеткой среднее $d \approx 0.5–1$ μm [4] и $b/d \approx (0.5–1)\cdot 10^{-3}$; для металлов с ОЦК-решеткой наиболее вероятное $d \approx \approx 0.2$ μm при $E^{\text{pl}} \sim 1$ и отношении $b/d \approx 2.5\cdot 10^{-3}$ [6, с. 38]. При объемном содержании фрагментированной структуры $V_{\text{fr}} \approx 0.1–0.4$ и доле малоугловых границ ($\theta < 15°$) среди всех границ деформационного происхождения $\eta_b \approx 0.8$ составляющая $\sigma^\theta \approx (10^{-5}–10^{-4})\mu$. Отметим, что при горячем прессовании сплавов Al–Mg величина η_b снижается до 0.3, при гидроэкструзии – до 0.25, при прокатке за несколько проходов – до 0.6–0.7.

Для большеугловых границ деформационного происхождения выражение (12) неприменимо [7, с. 403; 8, с. 61–76]. Ограничимся случаем низких температур, когда удельная поверхностная свободная энергия $F \approx \gamma$, $\mathrm{d}F = \mathrm{d}A^\theta$. Отсюда

$$\hat{\sigma}^\theta \approx \frac{1}{d}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}E^{\text{pl}}} = \frac{1}{d}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\overline{\theta}}\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}E^{\text{pl}}}, \tag{14}$$

где с помощью (13) найдем $\mathrm{d}\overline{\theta}/\mathrm{d}E^{\text{pl}} = \beta$. Зависимость $\gamma = \gamma(\overline{\theta})$ для реальных границ [8,9] при $\theta > 15°$ выходит на плато, которое содержит несколько небольших провалов (локальных минимумов). Согласно [8, с. 72] в них опытные данные дают $\Delta\gamma = (0.1 - 0.2)\gamma_s$ (γ_s – поверхностное натяжение для свободной поверхности). Для Al, Fe и нержавеющей стали $\Delta\gamma = 20–200$ erg·cm^{-2}, $\Delta\theta \approx 1°$, среднее $d = 1\cdot 10^{-6}$ m. Такие локальные минимумы соответствуют границам, близким к специальным, т.е. границам, у которых число узлов в элементарной ячейке решетки совпадает с числом узлов соседних фрагментов, порядка $\Sigma < 25$ [8, с. 20]. Доля таких границ $\eta_b \approx 0.05–0.25$ [4, с. 96]. Отсюда $\sigma^\theta = (10^{-5}–10^{-4})\mu$.

При $\gamma = \text{const}$ найдем

$$\hat{\sigma}^r = \frac{\partial \Gamma}{\partial \hat{E}^{\text{pl}}} = \gamma\frac{\partial S_b}{\partial \hat{E}^{\text{pl}}}, \tag{15}$$

Согласно [4] фрагменты измельчаются в 2–5 раз, например, при знакопеременном кручении [6, с. 37–40, 46–48], т.е. $\Delta S_b = aS_b(E_0^{\text{pl}})$, $a = 2–5$, $\Delta E^{\text{pl}} \sim 1$ на стадии однородной фрагментации; при циклическом плоском изгибе значения a имеют тот же порядок. Ясно, что компоненты $\hat{\sigma}^\theta$ и $\hat{\sigma}^r$ совпадают по порядку величины.

4. Напряжение $\hat{\sigma}^f$ определим из [1]:

$$\hat{\sigma}^{f} = \left\langle \hat{\sigma}_s^{\text{int}} \frac{\mathrm{d}\hat{\xi}_s^{\text{pl}}}{\mathrm{d}\hat{E}^{\text{pl}}} \right\rangle_V = \left\langle \hat{\sigma}_s^{\text{int}} \frac{\mathrm{d}\dot{\hat{\xi}}_{\text{s}}^{\text{pl}}}{\mathrm{d}\dot{\hat{E}}^{\text{pl}}} \right\rangle_V , \tag{16}$$

где $\hat{\xi}_s^{\text{pl}}$ – избыточные пластические деформации фрагмента s, $\hat{\xi}_s^{\text{pl}} = \hat{\varepsilon}_s^{\text{pl}} - \hat{E}_s^{\text{pl}}$, $\hat{E}_s^{\text{pl}} = \left\langle \hat{\varepsilon}_s^{\text{pl}} \right\rangle_V$. Преобразуем (16) с помощью закона Гука:

$$\hat{\sigma}^{\text{int}} = \hat{c}..\hat{\xi}^{\text{el}}, \tag{17}$$

условия сохранения сплошности материала между $\hat{\xi}_s^{\text{el}}$ и $\hat{\xi}_s^{\text{pl}}$ и его производной по времени

$$\hat{\xi}_s^{\text{el}} + \hat{\xi}_s^{\text{pl}} = 0, \quad \dot{\hat{\xi}}_s^{\text{el}} + \dot{\hat{\xi}}_s^{\text{pl}} = 0, \tag{18}$$

а также соотношения $\left\langle \hat{c}..\hat{\xi}_s^{\text{el}}\dot{\hat{\xi}}_s^{\text{el}} \right\rangle = \hat{c}^{*}..\left\langle \hat{\xi}_s^{\text{el}}\dot{\hat{\xi}}_s^{\text{el}} \right\rangle$, где $\hat{\xi}_s^{\text{el}}$ – упругие избыточные деформации фрагмента s, $\hat{\xi}_s^{\text{el}} = \hat{\varepsilon}_s^{\text{el}} - \hat{E}^{\text{el}}$, $\hat{E}^{\text{el}} = \left\langle \hat{\varepsilon}_s^{\text{el}} \right\rangle$.

В [10] показано, что фрагментированный поликристалл является средой с нелокальным, короткодействующим на макроуровне взаимодействием фрагментов, радиус которого порядка $(1–2)d_{\text{fr}}$ (d_{fr} – размер фрагмента). Такое взаимодействие равнозначно существованию многоточечных моментных функций случайных полей фрагментированной структуры; в данной работе ограничимся корреляционным приближением.

В [11] показано, что при исследовании образца, подвергаемого циклическим испытаниям, с помощью ультразвукового импульсного метода допустимо квазистатическое описание. В приближении идеальной аккомодации (модель независимых подсистем фрагментированных и нефрагментированных объемов зерен) выполняется условие квазистационарности флуктуационных полей $\hat{c}'$, и бинарная корреляционная функция этих полей имеет вид:

$$\hat{B}(\mathbf{r},t,\tau) = \left\langle \hat{c}'(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{c}'(\mathbf{r}_2,t_2) \right\rangle = \hat{A}(0,t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\mathbf{r},l(t)), \tag{19}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\tau = t_1 - t_2$, $t = (t_1 + t_2)/2$; компоненты $\hat{A}(0,t)$, l – медленно меняющиеся функции t. Согласно [11,12] для всех компонент $\hat{A}(0)$ во всем диапазоне изменения $E^{\text{pl}}(t)$ этой зависимостью можно пренебречь.

Постулируем, что одинаковую временную зависимость имеют различные компоненты $\hat{E}^{\text{el}}$, $\hat{E}^{\text{pl}}$, $\hat{c}'$ соответственно, а также различные масштабы корреляций полей $\hat{c}'$ – $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$. Отсюда заменим одноточечный центральный момент $\left\langle \hat{\xi}_s^{\text{el}}(\mathbf{r}_1,t_1)\dot{\hat{\xi}}_s^{\text{el}}(\mathbf{r}_1,t_1) \right\rangle$ в (16) на двухточечный момент второго порядка $\left\langle \hat{\xi}_s^{\text{el}}(\mathbf{r}_1,t_1)\dot{\hat{\xi}}_s^{\text{el}}(\mathbf{r}_2,t_2) \right\rangle$. Представим $\xi_{ij}^{\text{el}} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ через флуктуационную составляющую вектора смещения u'_i в корреляционном приближении [12, с. 354]:

$$u'_i(\mathbf{r},t_1) = \int_V G_{ik,m}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t_1)c'_{kmln}(\mathbf{r}_1,t_1)E^{\mathrm{el}}_{ln}(t_1)\mathrm{d}\mathbf{r}_1 = G_{ik,m} * c'_{kmln}E^{\mathrm{el}}_{ln}\,, \qquad (20)$$

где согласно приложению 1 динамический тензор Грина $G_{ik}(\mathbf{r},t)$ заменим на статический тензор $G_{ik}(\mathbf{r})$ уравнения равновесия. В условиях плоского чистого изгиба циклических испытаний приведем тензор деформаций внешнего воздействия $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{ext}}$ к главным осям

$$\hat{\varepsilon}^{\mathrm{ext}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Согласно принципу Ле Шателье–Брауна тензоры $\hat{E}^{\mathrm{el}}$, $\hat{E}^{\mathrm{pl}}$, $\hat{\xi}^{\mathrm{el}}$ имеют ту же симметрию, что и $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{ext}}$. Для металлов кубической симметрии из (20) получим

$$\xi^{\mathrm{el}}_{mn} = \left[G_{m)1,1(n} - G_{m)2,2(n}\right] * (c'_{1111} - c'_{1122})E^{\mathrm{el}}_{11}, \qquad (22)$$

где $mn \equiv (11,22)$. Вторую производную тензора $G_{mk,jn}$ представим в сингулярном приближении [12]:

$$G_{11,11} = G_{22,22} = -\frac{1}{3\mu} + \frac{\chi}{5\mu}, \quad G_{12,21} = G_{21,12} = \frac{\chi}{15\mu}, \qquad (23)$$

где $\chi = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$, λ и μ – постоянные Ламе. В матричном представлении

$$\xi^{\mathrm{el}}_{11} = \xi^{\mathrm{el}}_{22} = A_{\xi}(c'_{11} - c'_{12})E_1, \quad E_1 \equiv E^{\mathrm{el}}_{11}, \qquad (24)$$

$$A_{\xi} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2\chi}{15}\right). \qquad (25)$$

С помощью (16)–(18), (20)–(25), (П.2.1)–(П.2.6) окончательно получим

$$\sigma^{f}_{kl} = \frac{2A^2_{\xi}}{\dot{E}^{\mathrm{pl}}_{kl}}\left(\dot{D}W + D\dot{W}\right), \quad kl \equiv (11,22), \qquad (26)$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{c}_{11} - \overset{*}{c}_{12}\right)E^2_1\,, \qquad (27)$$

$$D(\mathbf{r},t) = \left(A^{1111}_{1111} + A^{1122}_{1122} - 2A^{1111}_{1122}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\mathbf{r},t) = N\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\mathbf{r},t)\,, \qquad (28)$$

где $N = 7.8\cdot10^{-2}c^2$, $c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$. Для равноосных фрагментов координатная зависимость $\varphi_{\mathrm{eq}}(\mathbf{r},t) = \exp[-l(t)/r]$ отражает предельный случай полностью разупорядоченной среды; для вытянутых фрагментов эта зависимость носит в среднем осцилляционный характер: $\varphi(\mathbf{r},t) = \varphi_{eq}(\mathbf{r},t)\cos(\mathbf{qr})$; $\mathbf{q} = l\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ – вектор обратной решетки, определяющий регулярные свойства фрагментированного поликристалла) [14].

При $l \to \infty$ эта зависимость переходит в строго периодическую, что соответствует плоскослоистой среде. Например, закаленный слой при поверхностно-объемной закалке, где в качестве фрагментов выступают пластины мартенсита, можно описать такой моделью [15]; при $q \to 0$ $\varphi(\mathbf{r},t)$ возвращается к $\varphi_{eq}(\mathbf{r},t)$. Два условия (сохранения сплошности материала и квазистационарности полей $\hat{c}'$) приводят к соотношению $\tau << \tau_\sigma^r \le (\dot{\varepsilon}^{\text{ext}})^{-1}$, где τ_σ^r – время релаксации внутренних напряжений, $(\dot{\varepsilon}^{\text{ext}})^{-1}$ – характерное время деформирования, т.е. $\tau \approx 10^{-3}$–10^{-2} s. Для металлов Fe, Al, Mo при $\mathbf{r} = 0$ и $t = 0$ произведем оценку σ^f: $A_\xi = -(0.229$–$0.237)\mu^{-1}$; $E^{\text{el}} \le 10^{-3}$–$10^{-2}$; $E^{\text{pl}} \sim 1$. С помощью приложения 2 находим $\sigma^f \approx (10^{-5}$–$10^{-4})\mu$.

Таким образом, в условиях циклического нагружения при плоском чистом изгибе образцов действует принцип приближенного равнораспределения скрытой энергии по всем составляющим, за исключением той, которая определяется ростом упругой энергии дислокаций при их размножении. Отметим, что в реальных условиях различных температур, внешних нагрузок и способов деформирования [4,13] такое разделение является условным, но важным при оценке каждой составляющей, когда энергия, поступающая в образец за цикл, постоянна.

Приложение 1

При циклических испытаниях образцов внешнее воздействие может быть представлено в виде волны – гармонической зависимости от координат $\mathbf{r}$ и времени t:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp\left[-i(\mathbf{k}_p\mathbf{r} + \omega t)\right], \tag{П.1.1}$$

где $\left|\mathbf{k}_p\right| = \dfrac{2\pi}{\lambda_p}$, $\omega = 2\pi f(p = l,t)$. Динамический тензор $G_{ij}(\mathbf{r},\omega)$ волнового уравнения приведен в [12, с. 232]:

$$G_{ij}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{r}\left[h(\omega r)\delta_{ij} + g(\omega r)n_{ij}\right], \tag{П.1.2}$$

$$h(\omega r) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r^2}\left\{\left[1 + \frac{ir\omega}{c}\right]\exp(-i\omega r/c\Big|_{c_t}^{c_l} + \frac{r^2\omega^2}{c_t^2}\exp\left(i\omega r/c_t\right)\right\}, \tag{П.1.3}$$

$$g(\omega r) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r^2}\left\{\left[3\left(1 + \frac{ir\omega}{c}\right) - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right]\exp(-i\omega r/c)\right\}\Bigg|_{c_t}^{c_l}, \tag{П.1.4}$$

где компоненты G_{ij} представлены как гармонические осцилляции с дальнодействующей r^{-1} и короткодействующими r^{-2} огибающими; $f(c)\big|_{c_t}^{c_l} \equiv f(c_l) - f(c_t)$, c_l и c_t – скорости распространения продольных (l) и поперечных (t) упругих волн в материале. Волновой характер $G_{ij}(\omega,\mathbf{r})$ проявляется тогда, когда длина волны $\lambda_p = c_p/f$ велика по сравнению с размером структурной неоднородности d_{fr} и мала по сравнению с размером рассеивающего объема $L = 10^{-2}–10^{-1}$ m. Например, при $f = 50$ Hz $\lambda_p >> L$, т.е. замена $G_{ij}(\mathbf{r},t)$ на $G_{ij}(\mathbf{r})$ не вызывает сомнений. С помощью (П.1.1) деформация $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t) = u_{(i,j)}(\mathbf{r},t)$ переходит в $\varepsilon = \varepsilon_0\sin\omega t$.

Приложение 2

С помощью вышеприведенных постулатов найдем производные по времени для статистически однородных и изотропных полей:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \widehat{c}'_s(\mathbf{r}_1,t_1)\widehat{c}'_{s'}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle = \left\langle \dot{\widehat{c}}'_s(\mathbf{r}_1,t_1)\widehat{c}'_{s'}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle + \left\langle \widehat{c}'_s(\mathbf{r}_1,t_1)\dot{\widehat{c}}'_{s'}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle \dot{\widehat{c}}'_s(\mathbf{r}_1,t_1)\widehat{c}'_{s'}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle = 2\left\langle \widehat{c}'_s(\mathbf{r}_1,t_1)\dot{\widehat{c}}'_{s'}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle, \qquad (\text{П.2.1})$$

где при фиксированном t_2 $t_1 = 2t + t_2$, при $t_1 = \text{const}$ $t_2 = t_1 - 2t$;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{B}(\mathbf{r},t,\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\widehat{A}(0)\varphi(\mathbf{r},l(t))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] = \widehat{A}(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\dot{\varphi} - \frac{\varphi}{\tau}\right), \qquad (\text{П.2.2})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{ij}^{\text{el}}(t)E_{km}^{\text{el}}(t) = 2\dot{E}_{ij}^{\text{el}}E_{km}^{\text{el}} = 2E_{ij}^{\text{el}}\dot{E}_{km}^{\text{el}}. \qquad (\text{П.2.3})$$

Исследование образца с помощью периодической последовательности ультразвуковых импульсов в течение всего периода однородной фрагментации T_f производит выборку состояний фрагментированного поликристалла по схеме независимых испытаний. В масштабе «медленного» времени t на результаты опытных данных окажут влияние $\widehat{E}^{\text{pl}} = \widehat{E}^{\text{pl}}(t)$, $\widehat{E}^{\text{el}} = \widehat{E}^{\text{el}}(t)$, $l_m = l_m(t)$, ($m \equiv \|, \perp$), $\langle\widehat{c}\rangle = \langle\widehat{c}\rangle(t)$ и их производные по времени:

$$\dot{E}_{ij}^{\text{el}} \approx \frac{\Delta E_{ij}^{\text{el}}}{T_f}, \quad \Delta E^{\text{el}} < 10^{-2} \quad [4, \text{с. } 145], \qquad (\text{П.2.4})$$

$$\dot{E}_{ij}^{\text{pl}} \approx \frac{\Delta E_{ij}^{\text{pl}}}{T_f}, \quad \Delta E^{\text{pl}} < 1 \quad [4, \text{с. } 145], \qquad (\text{П.2.5})$$

$$i_m \approx \frac{\Delta l_m}{T_f}, \quad \Delta l_m \approx a l_m, \quad a = 0.1–0.2, \qquad (\text{П.2.6})$$

где a зависит от типа решетки.

1. *В.В. Рыбин, А.А. Зисман*, ФММ **69,** № 4, 5 **(**1990).
2. *Р. Хоникомб*, Пластическая деформация металлов, Мир, Москва (1972).
3. *В.Е. Панин, В.В. Федоров, Р.В. Ромашов и др.*, в сб.: Синергетика и усталостное разрушение металлов, В.С. Иванова (ред.), Наука, Москва (1989).
4. *В.В. Рыбин*, Большие пластические деформации и разрушение металлов, Металлургия, Москва (1986).
5. *Б.К. Вайнштейн, В.М. Фридкин, В.Л. Инденбом*, Современная кристаллография, Т. 2. Структура кристаллов, Наука, Москва (1979).
6. *В.Е. Панин, В.А. Лихачев, Ю.В. Гриняев*, Структурные уровни деформации твердых тел, Наука, Новосибирск (1985).
7. *А. Келли, Г. Гровс*, Кристаллография и дефекты в кристаллах, Мир, Москва (1974).
8. *А.Н. Орлов, В.Н. Перевезенцев, В.В. Рыбин*, Границы зерен в металлах, Металлургия, Москва (1980).
9. *Г. Глейтер, Б. Чалмерс*, Большеугловые границы зерен, Мир, Москва (1972).
10. *И.М. Жуковский, В.В. Рыбин*, ФММ **67,** 432 (1989).
11. *В.Л. Бусов, Т.Д. Шермергор*, ФТВД **12**, № 1, 60 (2002).
12. *Т.Д. Шермергор*, Теория упругости микронеоднородных сред, Наука, Москва (1977).
13. *С. Коцаньда*, Усталостное растрескивание металлов, Металлургия, Москва (1990).
14. *А.Г. Фокин, Т.Д. Шермергор*, ЖЭТФ **107**, 111 (1995).
15. *Л.В. Басацкая, А.Х. Вопилкин, И.Н. Ермолов и др.*, Акустический журнал **24**, № 1, 15 (1978).

V.L. Busov

ON RELATIONSHIP OF CONTRIBUTIONS FROM DEFORMING-STRESS COMPONENTS FOR FRAGMENTED POLYCRYSTALS

Contributions from deforming stress $\widehat{\sigma}$ components for fragmented polycrystals have been estimated at the stage of uniform fragmentation under cyclic loading and uniplanar pure bending. It is shown that the four components of the deforming stress associated with the growth of the surface energy of low- and large-angle boundaries of deformation origin and with reduction in size and increase in the elastic energy of fragments are of the same order of magnitude; component $\widehat{\sigma}$ defining the increase in the elastic energy of multiplicating dislocations is the order of magnitude less.