PACS: 83.10.Pp

Л.А. Рябичева, Ю.В. Кравцова

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ СКОРОСТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля
кв. Молодежный, 20а, г. Луганск, 91034, Украина

Статья поступила в редакцию 13 октября 2003 года

Предложена модель деформирования пористых тел, учитывающая влияние скорости деформации на пластическое течение и базирующаяся на основополагающих принципах теории пластичности сжимаемых материалов. Чувствительность сжимаемого пористого тела к скорости деформации учитывается как влияние последней на величину достигаемой пористости, с одной стороны, и на интенсивность роста упрочнения твердой фазы – с другой. Задача решена путем модифицирования функций пористости таким образом, что они содержат некоторые коэффициенты, являющиеся мерой чувствительности пористого тела к скорости деформации. Эти коэффициенты определены для случая одноосного сжатия. Предложенная модель может быть использована при решении технологических задач обработки давлением пористых тел.

При разработке технологий деформирования пористых тел важно учитывать влияние скорости деформации, что может быть выполнено на основополагающих принципах теории пластичности.

Наибольшее распространение в современной теории пластичности получили модели [1–9], связанные с заданием свойств диссипативной функции D, которая определяет закономерности поведения материала и связана с диссипативным потенциалом материала матрицы D_M следующим образом:

$$D = (1-\theta)D_M(W)\,, \tag{1}$$

где θ – пористость; W – эквивалентная скорость деформации.

Выражение (1) позволяет учитывать механизм течения материала матрицы, определяя его реологию видом D_M, и пористую структуру в зависимости от конструкции функций пористости φ и ψ, которые входят в уравнение для эквивалентной скорости деформации W.

Выражение для W, являющейся скалярной мерой тензора скоростей деформации, принимаем в виде

$$W = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sqrt{\varphi\gamma^2 + \psi e^2}\,, \tag{2}$$

где ω – накопленная деформация твердой фазы; γ – скорость изменения формы; e – скорость изменения объема.

Функция (1) служит потенциалом для тензора напряжений σ_{ij} и выражается уравнением его связи с тензором скоростей деформации e_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial e_{ij}}. \tag{3}$$

В предположении того, что третьи инварианты не оказывают влияния на поведение рассматриваемых объектов, и в случае симметричного пористого тела, уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma(W,\omega)}{W}\left[\left(\psi - \frac{1}{3}\varphi\right)e\delta_{ij} + \varphi e_{ij}\right]. \tag{4}$$

Среднее давление p и интенсивность касательных напряжений τ связаны с σ_{ij} и e_{ij} соотношениями

$$\begin{gathered} p = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \\ \tau = \left[\left(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}\right)\right]^{1/2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Выражения для скорости изменения объема e и скорости формоизменения γ имеют вид:

$$\begin{gathered} e = e_{ij}\delta_{ij}, \\ \gamma = \left[\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ij}\delta_{ij}\right)\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ij}\delta_{ij}\right)\right]^{1/2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Главной особенностью данного подхода к решению задач деформирования пористых тел является предположение о том, что мощность диссипации энергии в рассматриваемых материалах может быть представлена как произведение двух независимых факторов. Первый из них определяется только морфологией пористой структуры, второй – зависит от механизма течения твердой фазы. Первый фактор не чувствителен к реологии твердой фазы, а второй $\sigma(W,\omega)$ инвариантен относительно пористости и пористой структуры.

Важно заметить, что расчеты по данной теории показывают чувствительность лишь напряжения течения $\sigma(W,\omega)$ к изменению скорости деформации, соотношение же между осевой деформацией и пористостью оказывается инвариантным относительно последней.

Для создания определяющих соотношений теории пластичности пористых тел с учетом чувствительности к скорости деформации используем два скалярных следствия выражения (4). Одно из них – уравнение поверхности нагружения, которая для сжимаемого материала представляет собой эллипс в координатах гидростатическое давление–интенсивность касательных напряжений:

$$\frac{p^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\varphi} = (1-\theta)\sigma_0^2, \tag{7}$$

где σ_0 – напряжение течения твердой фазы.

Согласно [6] вид функций пористости может быть задан как

$$\varphi = (1-\theta)^2, \quad \psi = \frac{2}{3}\frac{(1-\theta)^3}{\theta}. \tag{8}$$

Второе скалярное следствие представляет собой ассоциированный закон течения:

$$p = \sigma\psi\frac{e}{W}, \quad \tau = \sigma\varphi\frac{\gamma}{W}. \tag{9}$$

Для упрощения рассматриваемых выше соотношений используем коэффициент Пуассона ν, который удовлетворяет требованиям, вытекающим из ограничений на φ и ψ ($\theta \to 0$, $\psi \to \infty$, $\varphi \to 1$). В соответствии с ними данный коэффициент не может быть более чем 0.5 и, кроме того, является возрастающей функцией пористости. Его вид согласно [7] можно задать как функцию пористости следующим образом:

$$\nu = \frac{3\psi - \varphi}{6\psi + \varphi}. \tag{10}$$

Уравнение поверхности нагружения (7) с учетом (10) будет иметь вид

$$\frac{p^2}{\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}\varphi} + \frac{\tau^2}{\varphi} = (1-\theta)\sigma_0^2. \tag{11}$$

Принимая во внимание вышеприведенные преобразования, уравнение для эквивалентной скорости деформации можно записать как

$$W = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sqrt{\varphi\gamma^2 + \frac{1}{3}\varphi\frac{1+\nu}{1-2\nu}e^2}, \tag{12}$$

а ассоциированный закон течения представить в виде

$$3\frac{(1-2\nu)}{1+\nu}p\gamma = \tau e. \tag{13}$$

Для учета влияния скорости деформации модифицируем функции пористости следующим образом, соблюдая предельные переходы $\theta \to 0$, $\psi \to \infty$, $\varphi \to 1$:

$$\varphi = \frac{(1-k_2\theta)^2}{1-\left(1+\frac{1}{3}k_1\right)\theta}(1-\theta), \quad \psi = \frac{1}{2}\frac{(1-\theta)(1-k_2\theta)^2}{k_1\theta}, \tag{14}$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты, являющиеся мерой чувствительности пористого тела к скорости деформации.

Выражение для коэффициента Пуассона ν с учетом (10) может быть представлено в виде

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 - k_1 \frac{\theta}{1-\theta}\right). \tag{15}$$

В соответствии с (7) и (14) уравнение поверхности нагружения принимает следующую форму:

$$\frac{p^2}{\dfrac{1+\nu}{3(1-2\nu)}\dfrac{(1-k_2\theta)^2}{1-\left(1+\dfrac{1}{3}k_1\right)\theta}(1-\theta)} + \frac{\tau^2}{\dfrac{(1-k_2\theta)^2}{1-\left(1+\dfrac{1}{3}k_1\right)\theta}(1-\theta)} = \sigma_0^2, \tag{16}$$

а выражение для эквивалентной скорости деформации выглядит как

$$W = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \sqrt{\frac{(1-k_2\theta)^2}{1-\left(1+\dfrac{1}{3}k_1\right)\theta}(1-\theta)}\sqrt{\gamma^2 + \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}e^2}\,. \tag{17}$$

Ассоциированный закон течения (13) с учетом проведенных выше преобразований можно представить выражением

$$\frac{6k_1\dfrac{\theta}{1-\theta}}{3-k_1\dfrac{\theta}{1-\theta}}p\gamma = \tau e\,. \tag{18}$$

Дальнейшая задача заключается в установлении вида зависимостей коэффициентов k_1 и k_2 от параметров, характеризующих текущее состояние пористого тела при соответствующих скоростях деформации.

Для определения и установления физического смысла коэффициентов k_1 и k_2 рассмотрим задачу одноосного сжатия. В данном случае гидростатическое давление и интенсивность касательных напряжений при единственной ненулевой компоненте тензора напряжений σ_z имеют вид:

$$p = \frac{1}{3}\sigma_z, \quad \tau = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_z\,. \tag{19}$$

С учетом уравнения неразрывности для случая осевой симметрии

$$e = e_z + 2e_r \tag{20}$$

выражение скорости формоизменения примет вид

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|e_z - e_r\right|. \tag{21}$$

Из определения коэффициента поперечной деформации (10) следует, что между скоростями осевой e_z и радиальной e_r деформаций имеет место простое соотношение

$$e_r = -\nu e_z \,, \tag{22}$$

которое в совокупности с (20) дает

$$e = (1 - 2\nu)e_z \,. \tag{23}$$

Учитывая далее, что

$$e = \frac{1}{1-\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{24}$$

$$e_z = \dot{\varepsilon}_z = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_z}{\mathrm{d}t}, \tag{25}$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{1-\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (1-2\nu)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_z}{\mathrm{d}t}, \tag{26}$$

которое после сокращения на dt и подстановки в него выражения (15) представим как

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varepsilon_z} = k_1\theta \,. \tag{27}$$

Решение уравнения (27) при начальном условии $\theta\big|_{t=0} = \theta_0$ имеет вид

$$\theta = \theta_0 \mathrm{e}^{-k_1\varepsilon_z} \,. \tag{28}$$

Выражение (28) показывает зависимость коэффициента k_1 от пористости деформируемого тела и степени деформации.

В соответствии с полученным выражением (28) установлен физический смысл коэффициента k_1. Он характеризует интенсивность эволюции порового пространства деформируемого тела при изменении скорости деформации. При сжатии пористость проявляет тенденцию к уменьшению, что в конечном итоге в условиях продолжающейся пластической деформации приводит к уплотнению. Параметр чувствительности пористого тела к скорости деформации в виде k_1 в данном случае может быть определен как коэффициент интенсивности уплотнения.

Для определения k_2 воспользуемся выражением ассоциированного закона течения (13) и уравнением неразрывности (20), из которых получим соотношения для нормального σ_z и радиального σ_r напряжений в виде:

$$\sigma_z = \varphi\frac{e_z + \dfrac{\nu}{1-2\nu}e}{W}\sigma_0, \quad \sigma_r = \varphi\frac{e_r + \dfrac{\nu}{1-2\nu}e}{W}\sigma_0. \tag{29}$$

На основании того, что в условиях одноосного сжатия без внешнего трения радиальная компонента тензора напряжений σ_r равна нулю во всем объеме образца, исходя из (29), можно записать

$$e_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e = 0 . \qquad (30)$$

Выражение для скорости формоизменения γ в данном случае примет вид

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\nu)\left|e_z\right| . \qquad (31)$$

После подстановки выражений (31) и (23) в уравнение эквивалентной скорости деформации W (17) получаем

$$W = -\sqrt{1+\nu}\sqrt{\varphi} e_z , \qquad (32)$$

а с учетом уравнения коэффициента Пуассона ν (15) будем иметь

$$W = -\sqrt{\frac{3}{2}}(1-k_2\theta) e_z . \qquad (33)$$

Осевое напряжение согласно (33) и (29) можно записать в виде

$$\sigma_z = -\sqrt{1+\nu}\sqrt{\varphi}\sigma_0 . \qquad (34)$$

Подставив в уравнение (34) выражения (14) и (15), получим следующую зависимость:

$$\sigma_z = -\sqrt{\frac{3}{2}}(1-k_2\theta)\sigma_0 . \qquad (35)$$

С учетом того, что $\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{0z}$, уравнение (35) преобразуем к виду

$$\sigma_z = -(1-k_2\theta)\sigma_{0z} . \qquad (36)$$

Отсюда следует, что k_2 является коэффициентом пропорциональности зависимости предела текучести от пористости заготовки, поэтому для его определения достаточно воспользоваться кривыми деформационного упрочнения пористого тела.

Расчет величины k_2 в условиях развившейся пластической деформации необходимо производить с учетом деформационного упрочнения твердой фазы и величины накопленной в ней деформации.

Для этого зададимся законом упрочнения твердой фазы в виде уравнения Людвика:

$$\sigma_{0z} = \sigma_{00} + N\omega^n , \qquad (37)$$

где N, n – соответственно коэффициент и показатель деформационного упрочнения твердой фазы, σ_{00} – начальный предел текучести твердой фазы.

Уравнение накопленной деформации твердой фазы выразим через текущую пористость, выполняя последовательно подстановки в выражение (17) найденных выше значений ν (15) и φ (14). Получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1 - k_2\theta}{k_1\theta}, \tag{38}$$

которое при начальном условии $\omega\big|_{\theta=\theta_0} = 0$ имеет решение

$$\omega = \frac{k_2}{k_1}(\theta_0 - \theta) - \frac{1}{k_1}\ln\frac{\theta}{\theta_0}. \tag{39}$$

Подставляя выражение накопленной деформации твердой фазы (39) в выражение (37), характеризующее закон ее упрочнения, получим

$$\sigma_{0z} = \sigma_{00} + N\left[\frac{k_2}{k_1}(\theta_0 - \theta) - \frac{1}{k_1}\ln\frac{\theta}{\theta_0}\right]^n. \tag{40}$$

Таким образом, предложена модель теории пластичности пористых тел, базирующаяся на существующих постулатах. Она описывает не только механизм деформации твердой фазы и структуру порового пространства, но и чувствительность деформируемого пористого тела к скорости деформации как влияние последней на величину достигаемой пористости, с одной стороны, и на интенсивность роста упрочнения твердой фазы – с другой.

Предложенная модель может быть использована при решении задач обработки давлением пористых тел как с целью получения высокоплотного полуфабриката, так и для изготовления готовых изделий при оптимальных энергозатратах на протяжении всего технологического процесса.

1. *M. Aboaf, J.T. Chenot*, J. Theor. Appl. Mech. № 5, 121 (1986).
2. *A.L. Gurson*, Transaction of the ASME. J. Eng. Mater. Technol. **99**, 2 (1977).
3. *Р. Дж. Грин*, Механика № 4, 109 (1973).
4. *S. Shima, M. Oyane*, Int. J. Mech. Sci. № 6, 285 (1976).
5. *М.Б. Штерн*, Порошковая металлургия № 9, 12 (1992).
6. *В.В. Скороход*, Реологические основы теории спекания, Наукова думка, Киев (1972).
7. *М.Б. Штерн, Г.Г. Сердюк, Л.А. Максименко и др.*, Феноменологические теории прессования порошков, Наукова думка, Киев (1982).
8. *Y.E. Beygelzimer, A.V. Spuskanyuk, V.N. Varyukhin*, in: Resent Development in Computer Modeling of Powder Metallurgy Processes, IOS Press (2001), p. 17–28.
9. *Я.Е. Бейгельзимер*, Порошковая металлургия № 3, 11 (1987).

L.A. Ryabicheva, Yu.V. Kravtsova

A MODEL OF POROUS BODIES DEFORMATION TAKING INTO ACCOUNT THE RATE SENSITIVITY

A model of porous bodies deformation taking into account the rate sensitivity of plastic flow process is suggested. This model is based on fundamental postulates of plasticity theory of compressible bodies. The sensitivity of a compressed porous body to strain rate is taken into account as strain rate influence on obtained porosity value, on the one hand, and on intensity of increasing of solid phase strengthening, on the other hand. This problem is solved by the way of modification of porosity functions such that they contain some factors being a measure of porous body sensitivity to strain rate. These factors are defined for the uniaxial compression case. The model can be used to optimize the forging and compaction technology.