УДК 517.5

В. В. Шкапа (Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,p}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ L_q

We obtain the exact-order estimates of the best m-term and orthogonal trigonometric approximations and establish the order of the trigonometric widths of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for certain relations between the parameters p and q.

Получены точные по порядку оценки наилучших m-членных и ортогональных тригонометрических приближений, установлены также порядки тригонометрических поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q.

Вступ. У роботі встановлюються точні за порядком оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень, а також тригонометричних поперечників функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q. Наведемо спочатку необхідні позначення та означення, які будемо використовувати у подальшому.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

Нехай далі $\psi \ne 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i \frac{\pi}{2} \beta \operatorname{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, с. 132]) (т. I), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Далі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і

$$f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi\colon \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}, \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ збігаються з класами Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Розглянемо для $f \in L_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, апроксимативні характеристики

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot)\|_q\ , \tag{1}$$

$$e^{\perp}_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \|f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot)\|_q\ , \tag{2}$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m — набір із m цілих чисел $n_1, \ldots, n_m$ та c_k — довільні комплексні числа, $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}$.

Величину (1) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням, а (2) — найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q, \tag{3}$$

$$e^{\perp}_m(F)_q = \sup_{f \in F} e^{\perp}_m(f)_q. \tag{4}$$

Величину $e_m(f)_2$ для функції однієї змінної було введено С. Б. Стєчкіним [3] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f)_q$ і $e_m(F)_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації як індивідуальних функцій, так і певних класів функцій. Перші оцінки величини $e_m(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були отримані Р. С. Ісмагіловим [4]. Систематичне вивчення величин (3) на класах періодичних функцій багатьох змінних С. Л. Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та С. М. Нікольського H^r_p було розпочато В. Н. Темляковим [5]. Подальші дослідження величин $e_m(F)_q$ на цих класах функцій, а також на класах О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ отримали продовження у роботах Е. С. Белінського [6], А. С. Романюка [7] та ін.

Величину (2) вперше розглянув Е. С. Белінський (див., наприклад, [8]), і згодом дослідження апроксимативної характеристики (4) на тих або інших функціональних класах отримало потужний розвиток у роботах [9 – 12]. У цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією щодо відповідного напряму досліджень.

Тепер наведемо означення ще однієї апроксимативної характеристики, яку будемо досліджувати у роботі.

Тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q означається за формулою [4]

$$d^T_m(F, L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{f \in F} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - P(\Theta_m,\cdot)\|_q\,, \tag{5}$$

де $P(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, \ldots, n_m$ та c_k — комплексні числа.

Сьогодні є велика кількість робіт, у яких проводилися дослідження величини (5) для важливих функціональних класів. З детальнішою інформацією, а також відповідною бібліографією можна ознайомитися, наприклад, у роботах [13, 14].

Позначимо далі через B множину функцій ψ, що задовольняють такі умови:

1) ψ є додатними і незростаючими;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq C \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\dfrac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\dfrac{\ln^{\gamma}(t+1)}{t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$ та ін.

Далі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо ж $B \leq C_2 A$ $(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

Зауважимо, що при доведенні основних результатів використано і розвинено методи, які застосовувалися у роботах [7–9, 14] при дослідженні відповідних апроксимативних характеристик інших функціональних класів, зокрема класів $W^r_{p,\beta}$.

1. Допоміжні твердження. В цьому пункті сформулюємо кілька відомих тверджень, які нам знадобляться при доведенні отриманих результатів.

Нагадаємо означення ще двох апроксимативних характеристик, оцінки яких будемо використовувати.

Нехай
$$T_m = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Для $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t \in T_m} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q .$$

У випадку, коли $c_k(f) = \hat{f}(k)$, через $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, будемо позначати величини

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ik\cdot} \right\|_q .$$

Теорема A [15]. *Нехай* $1 < q \leq p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, C_3, $C_4 > 0$. *Тоді справджується співвідношення*

$$C_3 \psi(m) \leq E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq C_4 \psi(m).$$

Теорема Б [16]. *Нехай $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тоді для довільного полінома $t \in T_n$ справедливою є оцінка*
$$\|t_\beta^\psi(\cdot)\|_p \ll \psi^{-1}(n)\|t(\cdot)\|_p.$$

Твердження А (див., наприклад, [17, с. 392]). *Якщо $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, то*

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

де $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ і $\overline{g}$ — функція комплексно-спряжена до функції g.

Лема А [18]. *Нехай $2 \le q < \infty$. Тоді для довільного тригонометричного полінома*

$$P(\Theta_m, x) = \sum_{l=1}^{m} e^{in_l x}$$

і для довільного $n \le m$ знайдуться тригонометричний поліном $\widetilde{P}(\Theta_n, x)$, який містить не більше ніж n гармонік, і стала $C_5 > 0$ такі, що

$$\|P(\Theta_m, \cdot) - \widetilde{P}(\Theta_n, \cdot)\|_q \le C_5 m n^{-1/2}\ ,$$

причому $\Theta_n \subset \Theta_m$, всі коефіцієнти $\widetilde{P}(\Theta_n, x)$ однакові і не перевищують за модулем mn^{-1}.

Теорема В [19]. *Нехай $1 < q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Psi_{q'}$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, де $\Psi_{q'}$ — множина монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > 1 - \dfrac{1}{q}$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає, і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \ge 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \le 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді справджується співвідношення

$$\mathcal{E}_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \asymp E_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{q'}}.$$

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{k: \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s\right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{P}_j$, що діє на функцію $f \in L_p$ таким чином:

$$\mathbf{P}_j f(x) = f(x) * \left(\sum_{k\in\rho(j)} e^{ikx} - P(\Theta_{k_j}, x) \right),$$

де $*$ — операція згортки.

Тоді має місце таке твердження.

Лема Б [14]. *Нехай* $1 < p < 2 < q < p/(p-1)$. *Тоді норма оператора* $\mathbf{P}_j$ *з* L_p *в* L_q $\big(\|\mathbf{P}_j\|_{p\to q} = \|\mathbf{P}_j\|_{L_p\to L_q}\big)$ *задовольняє співвідношення*

$$\|\mathbf{P}_j\|_{p\to q} = \sup_{\|f\|_p\le 1} \|\mathbf{P}_j f\|_q \ll 2^j k_j^{-(1/2+1/p')},$$

де $p' = p/(p-1)$.

Теорема Г (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [20], т. II, гл. XV). *Нехай задано* $1<q<\infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_6(q)$, $C_7(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_6(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \le C_7(q)\|f\|_q.$$

Твердження Б [2, с. 119] (т. II). *Нехай* $\psi(t)$ — *довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов* (6) *або* (7) *і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{m-1} \psi(m)(t\psi(t))^{-1} = O(1), \tag{8}$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* m. *Тоді для довільного тригонометричного полінома* t_m *порядку* m *виконується нерівність*

$$\left\|(t_m)^{\psi}_{\beta}(\cdot)\right\|_1 \le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t_m(\cdot)\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ *є рівномірно обмеженою по* m *і* t_m.

2. Основні результати. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджуються порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з теореми А та ланцюжка співвідношень

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \le e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \le \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_p \asymp \psi(m), \qquad 1<p<\infty.$$

Встановимо оцінки знизу. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \le m < 2^{l-1}$ і розглянемо функцію

$$f_l(x) = C_8\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}R_l(x),\ C_8 > 0,$$

де $R_l(x) = \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, — поліноми Рудіна – Шапіро, для яких (див., наприклад, [21, с. 155]) має місце порядкова оцінка

$$\|R_l\|_\infty \ll 2^{\frac{l}{2}}. \tag{9}$$

Легко переконатися, що функція f_l належить $L^\psi_{\beta,p}$. Дійсно, згідно з теоремою Б та співвідношенням (9), можемо записати

$$\|(f_l)^\psi_\beta\|_p \ll \psi^{-1}(2^l)\|f_l\|_p \ll 2^{-\frac{l}{2}}\|R_l\|_\infty \ll 2^{-\frac{l}{2}} 2^{\frac{l}{2}} = 1.$$

Звідси випливає, що при належному виборі сталої $C_8 > 0$ функція f_l належить $L^\psi_{\beta,p}$.

Крім цього, легко бачити, що функція

$$g(x) = C_9 2^{-\frac{l}{2}} R_l(x)$$

з відповідною сталою $C_9 > 0$ задовольняє умову $\|g\|_\infty \leq 1$. Таким чином, використавши твердження А по відношенню до функцій f_l і g, отримаємо

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \gg e^\perp_m(f_l)_1 \gg \frac{\psi(2^l)(2^l - m)}{2^l} \geq \frac{\psi(2^l) 2^{l-1}}{2^l} \asymp \psi(2^l) \asymp \psi(m).$$

Оцінку знизу і разом з нею теорему доведено.

Поклавши в теоремі 1 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджуються порядкові оцінки*

$$e_m(W^r_{p,\beta})_1 \asymp e^\perp_m(W^r_{p,\beta})_1 \asymp m^{-r}.$$

На підставі теорем 1 і А легко отримати відповідні оцінки для величин $E_m(L^\psi_{\beta,p})_1$ і $\mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1$.

Твердження 2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджуються порядкові оцінки*

$$E_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \asymp \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з теореми А та співвідношень

$$E_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \ll \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \leq \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_p \asymp \psi(m),$$

а оцінки знизу відповідних величин — з теореми 1 та нерівностей

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \leq E_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \ll \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1.$$

***Зауваження* 1.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, порядки величин $E_m(W^r_{p,\beta})_1$ та $\mathcal{E}_m(W^r_{p,\beta})_1$ є відомими (див., наприклад, [22, с. 47, 48]).

У наступному твердженні встановимо точні за порядком оцінки величин $e_m(L^\psi_{\beta,1})_q$ та $d^T_m(L^\psi_{\beta,1}, L_q)$ при $2 \leq q < \infty$. При цьому зазначимо, що на функції ψ будуть накладені додаткові умови, крім належності їх до множини B, що зумовлено використанням відповідних допоміжних тверджень.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (6) *або* (7) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справджуються порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Зазначимо, що з означення величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ та $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ випливає порядкове співвідношення

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \ll d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q).$$

Тому для доведення теореми 2 достатньо оцінити величину $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ знизу, а величину $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ зверху.

Встановимо спочатку оцінку зверху величини $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$. За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення $m \asymp 2^l$. Кожному числу $j \in \mathbb{N}$, що задовольняє умову $l \le j < \gamma l$ ($\gamma > 1$, буде вибрано пізніше), поставимо у відповідність число

$$k_j = [2^j \psi(2^j)\psi^{-1}(2^l)] + 1, \qquad j = l, \ldots, \gamma l, \quad \gamma > 1.$$

Далі, нехай $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ — тригонометричний поліном, що наближає „блок" $\delta_j(f)$, $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$, відповідно до леми Б, тобто таким чином, щоб для $j \in [l, \gamma l)$ виконувалась нерівність

$$\|\delta_j(f) - \widetilde{P}(\Theta_{k_j})\|_q \ll 2^j k_j^{-\frac{1}{2}}, \qquad 2 < q < \infty,$$

причому $\Theta_{k_j} \subset \rho(j)$ та коефіцієнти полінома $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ рівні між собою.

Покажемо, що кількість гармонік у сукупності поліномів $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ при $l \le j < \gamma l$, $j \in \mathbb{N}$, не перевищує за порядком 2^l. Дійсно, оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$ не зростає, то можемо записати

$$\sum_{l \le j < \gamma l} k_j = \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\left[2^j \psi(2^j)\psi^{-1}(2^l) \right] + 1 \right) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(2^l) \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j(1+\varepsilon)}\psi(2^j)2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll \psi^{-1}(2^l)2^{l(1+\varepsilon)}\psi(2^l) \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(2^l)2^{l(1+\varepsilon)}\psi(2^l)2^{-l\varepsilon} + \gamma l \ll 2^l.$$

Далі для наближення функції $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ будемо використовувати поліном вигляду

$$t(x) = \sum_{j < l} \delta_j(f, x) + \sum_{l \le j < \gamma l} (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}, x) * \delta_j(f, x)). \tag{10}$$

Як показано вище, кількість гармонік полінома t не перевищує за порядком 2^l. Оцінимо величину $\|f - t\|_q$, $2 < q < \infty$.

З урахуванням (10) маємо

$$\|f - t\|_q = \left\| \sum_{l \le j < \gamma l} \delta_j(f) + \sum_{j \ge \gamma l} \delta_j(f) - \sum_{l \le j < \gamma l} (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f)) \right\|_q \le$$

$$\leq \Big\| \sum_{l\leq j<\gamma l} (\delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f))) \Big\|_q + \Big\| \sum_{j\geq \gamma l} \delta_j(f) \Big\|_q = I_1 + I_2. \tag{11}$$

Оцінимо одержані в (11) величини I_1 та I_2, починаючи з I_2. Згідно з теоремою В можемо записати

$$I_2 = \left\| \sum_{j\geq \gamma l} \delta_j(f) \right\|_q = \left\| f - \sum_{1\leq j<\gamma l} \delta_j(f) \right\|_q \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-1/q)}. \tag{12}$$

Тепер перейдемо до оцінки I_1. З цією метою для кожного $j \in \mathbb{N}$, $l \leq j < \gamma l$, розглянемо лінійний оператор $\widetilde{\mathbf{P}}_j$, що діє за формулою

$$\widetilde{\mathbf{P}}_j \delta_j(f) = \delta_j(f) * \left(\sum_{k\in\rho(j)} e^{ikx} - \widetilde{P}(\Theta_{k_j}, x) \right).$$

Таким чином, беручи до уваги, що $\Theta_{k_j} \subset \rho(j)$, і застосовуючи до I_1 послідовно теорему Г і нерівність Мінковського, маємо

$$I_1 \ll \left\| \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} |\delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} \left\| \delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f)) \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} \left\| \delta_j(f) * \left(\sum_{k\in\rho(j)} e^{ikx} - \widetilde{P}(\Theta_{k_j}) \right) \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} \|\widetilde{\mathbf{P}}_j \delta_j(f)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Для того щоб продовжити оцінку (13), виберемо деяке число $q_1 \in (1,2)$, яке нижче буде уточнене. Тоді, використавши лему Б, отримаємо

$$I_1 \ll \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} \|\widetilde{\mathbf{P}}_j\|_{q_1\to q}^2 \|\delta_j(f)\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3-2/q_1)} \|\delta_j(f)\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3-2/q_1)} \|f - S_{2^{j-1}}(f) - f + S_{2^j}(f)\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3-2/q_1)} (\|f - S_{2^{j-1}}(f)\|_{q_1} + \|f - S_{2^j}(f)\|_{q_1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

де $S_{2^j}(f,x) = \sum_{k=-2^j}^{2^j} \hat{f}(k) e^{ikx}$.

Далі, використавши теорему B та врахувавши значення k_j, продовжимо оцінку (14):

$$I_1 \ll \left(\sum_{l\leq j<\gamma l} 2^{2j} \left(\frac{2^j \psi(2^j)}{\psi(2^l)} \right)^{-(3-2/q_1)} 2^{2j(1-1/q_1)} \psi^2(2^j) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\psi(2^l)^{(3-2/q_1)} \sum_{l\leq j<\gamma l} (\psi(2^j)2^j)^{(2/q_1-1)} 2^{2j(1-1/q_1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Оскільки існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, не зростає, то оцінку (15) продовжимо таким чином:

$$I_1 \ll \left(\psi(2^l)^{(3-2/q_1)} (\psi(2^l)2^{l(1+\varepsilon)})^{(2/q_1-1)} \sum_{l\leq j<\gamma l} 2^{-j\varepsilon(2/q_1-1)} 2^{2j(1-1/q_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\psi(2^l)^{(3-2/q_1)} (\psi(2^l)2^{l(1+\varepsilon)})^{(2/q_1-1)} 2^{-l\varepsilon(2/q_1-1)} 2^{2l(1-1/q_1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \psi(2^l)2^{l/2}. \tag{16}$$

Співставляючи (11), (12) і (16), маємо

$$\|f - t\|_q \ll \psi(2^l)2^{l/2} + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-1/q)}. \tag{17}$$

Оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, не зростає, то поклавши $\gamma = \dfrac{q}{2} + 1$, можемо записати

$$\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-1/q)} = \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}2^{-\gamma l \frac{1}{q}} \ll \psi(2^l)2^l 2^{-\gamma l \frac{1}{q}} =$$

$$= \psi(2^l)2^l 2^{-(q/2+1)l\frac{1}{q}} = \psi(2^l)2^{l/2}2^{-l/q} \ll \psi(2^l)2^{l/2}.$$

Отже, при такому виборі параметра γ другий доданок у правій частині (17) не перевищує першого і, таким чином, враховуючи вибір l, із (17) отримуємо необхідну оцінку зверху.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$. Зауважимо, що при цьому шукану оцінку достатньо отримати для випадку $q = 2$. Відповідні міркування будуть базуватися на використанні співвідношення двоїстості (див., наприклад, [17, c. 25]): для будь-якої функції $f \in L_2$

$$e_m(f)_2 = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m)} \|f - P(\Theta_m)\|_2 =$$

$$= \inf_{\Theta_m} \sup_{g_1 \in L^{\perp}(\Theta_m), \|g_1\|_2 \leq 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) g_1(x) dx, \tag{18}$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, які ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з „номерами" гармонік із множини Θ_m.

За заданим m виберемо l з умови $4m < 2^l \leq 8m$ і розглянемо функцію

$$f(x) = C_{10} \psi(2^l)(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)), \qquad C_{10} > 0,$$

де $V_m(x)$ — ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kx.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_{10} > 0$ функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$. З цією метою скористаємось твердженням Б.

Зауважимо, що умова (8) виконується, оскільки існує число $\alpha > 1$ таке, що послідовність $\varphi(m) = m^{\alpha}\psi(m)$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\varphi(k)k} \leq \frac{1}{m^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{\alpha}}{k} \leq 1.$$

Таким чином, оскільки f — тригонометричний поліном порядку 2^{l+2}, на підставі твердження Б одержимо

$$\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 = C_{10}\psi(2^l)\|(V_{2^{l+1}} - V_{2^l})^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \frac{\psi(2^l)}{\psi(2^{l+2})}\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1.$$

Далі, врахувавши відоме співвідношення (див., наприклад, [23, с. 66])

$$\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_q \asymp 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \qquad 1 \leq q \leq \infty, \tag{19}$$

з останньої нерівності одержимо, що $\|f^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$, а отже, функція f належить $L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{10}.

Тепер перейдемо до вибору функції g_1, яка б задовольняла умови $g_1 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ і $\|g_1\|_2 \leq 1$. Покладемо

$$v_1(x) = V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)$$

і розглянемо поліном

$$t_1(x) = v_1(x) - v_1^*(x),$$

де $v_1^*(x)$ — функція, яка містить лише ті гармоніки $v_1(x)$, які мають „номери" із Θ_m.

Оцінимо $\|t_1\|_2$. Згідно з (19) та рівністю Парсеваля можемо записати

$$\|t_1\|_2 \leq \|v_1\|_2 + \|v_1^*\|_2 \ll 2^{\frac{l}{2}} + m^{\frac{1}{2}} \ll m^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що поліном $g_1(x) = C_{11}m^{-\frac{1}{2}}t_1(x)$ при певному виборі сталої $C_{11} > 0$ задовольняє рівність (18). Підставивши f і g_1 у співвідношення (18), одержимо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_2 \geq e_m(f)_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g_1(x)dx \gg m^{-\frac{1}{2}}\psi(2^l)(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m) \gg$$

$$\gg m^{-\frac{1}{2}}\psi(2^l)2^l \asymp \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}}. \tag{20}$$

Враховуючи вибір l, з (20) маємо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_2 \gg \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Зауваження 2. У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано у роботі [24], а оцінку $d^T_m(W^r_{1,\beta})_q$ було анонсовано у роботі [25] і отримано у вигляді наслідку у роботі [26].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Т. I. – 427 с.; Т. II. – 468 с.
3. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
4. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
5. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 301 – 305.
6. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 46 – 47.
7. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
8. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
9. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 109 – 121.
10. *Федоренко А. С.* Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1719 – 1721.
11. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 647 – 656.
12. *Войтенко С. П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1473 – 1484.
13. *Майоров В. Е.* Тригонометрические n-поперечники класса W^r_1 в пространстве L_q // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. – М.: ЦЭМИ, 1976. – С. 199 – 208.
14. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.
15. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 483 – 492.
16. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ,β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
17. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

18. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
19. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186 – 1197.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. I. – 615 с.; Т. II. – 537 с.
21. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
22. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
23. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
24. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
25. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1984. – С.10 – 24.
26. *Романюк А. С.* Тригонометрические поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1089 – 1097.

Одержано 31.10.14