УДК 517.927

В. О. Солдатов (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ, ТОТАЛЬНИХ ЩОДО ПРОСТОРІВ $C^{(n+r)}[a,b]$

We study a broad class of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations, namely, the problems total with respect to the space $C^{(n+r)}[a,b]$, where $n \in \mathbb{N}$ and r is the order of the equations. For their solutions, we prove the theorem of existence, uniqueness, and continuous dependence on the parameter in this space.

Рассмотрен широкий класс линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений — тотальные задачи относительно пространства $C^{(n+r)}[a,b]$, где $n \in \mathbb{N}$, а r — порядок уравнений. Доказана теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости по параметру их решений в этом пространстве.

1. Вступ. Питання, пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено щодо задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчали І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовники. У роботах Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [4 – 6] отримано суттєві узагальнення цих результатів. Вони стосуються рівномірної неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ці питання досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [7]. Аналоги цих результатів встановлено у статті [8] для більш сильних соболєвських норм.

У роботах [9, 10] введено і досліджено досить широкий клас лінійних крайових задач, тотальних щодо просторів Соболєва. Доведено теореми про неперервність за параметром розв'язків у цих просторах.

Щодо просторів неперервно диференційовних функцій тотальні крайові задачі введено і досліджено в роботах [11 – 13] для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їхніх розв'язків у вказаних просторах.

Мета даної роботи — поширити ці результати на системи диференціальних рівнянь високих порядків. Хоча такі системи зводяться до систем диференціальних рівнянь першого порядку, для тотальних крайових задач застосування цієї стандартної редукції викликає складнощі з огляду на некласичність крайових умов. Тому є сенс окремо дослідити випадок диференціальних рівнянь високих порядків.

Зауважимо, що загальні теореми про граничний перехід у загальних і тотальних крайових задачах мають різні застосування до багатоточкових крайових задач [14, 15], у дослідженні граничних властивостей функції Гріна крайових задач [6, 7, 16], у спектральній теорії диференціальних операторів [17 – 19].

2. Постановка задачі. Нехай задано скінченний відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Для довільних цілих чисел $l \geq 0$ і $m \geq 1$ позначимо $C^{(l)} := C^{(l)}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, $(C^{(l)})^m := C^{(l)}\big([a,b],\mathbb{C}^m\big)$ і $(C^{(l)})^{m\times m} := C^{(l)}\big([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}\big)$. Таким чином, $C^{(l)}$ — банахів простір усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою

$$\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\bigr\}.$$

Аналогічно, $(C^{(l)})^m$ і $(C^{(l)})^{m\times m}$ — банахові простори всіх l разів неперервно диференційовних вектор-функцій $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}^m$ і квадратних матриць-функцій $Z\colon [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$. Норми у цих просторах позначаємо також через $\|\cdot\|_{(l)}$; вони є сумами норм у $C^{(l)}$ усіх компонент функції z або Z. З контексту завжди буде зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Звісно, якщо $m = 1$, то всі ці простори збігаються.

Нехай задано цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 1$. На відрізку $[a,b]$ розглянемо лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь r-го порядку

$$Lz(t) \equiv z^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t) z^{(r-j)}(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$Bz(\cdot) = c. \tag{2}$$

Тут вектор-функція $z(\cdot) \in (C^{(n+r)})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $K_{r-j}(\cdot) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$, лінійний неперервний оператор

$$B\colon (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{3}$$

і вектор $c \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими. Вектори і вектор-функції вважаємо поданими у вигляді стовпців.

Зазначимо, що лінійний неперервний оператор (3) єдиним чином зображується у вигляді

$$Bz(\cdot) = \sum_{k=1}^{n+r} \alpha_k \, z^{(k-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t)) z^{(n+r)}(t), \tag{4}$$

де всі α_k є деякими числовими матрицями розміру $rm \times m$, а $\Phi(t)$ — деяка матриця-функція розміру $rm \times m$, утворена скалярними функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, неперервними зліва на $[a,b]$ і рівними нулю при $t = a$, причому інтеграл розуміється за Ріманом — Стільтьєсом. (Це випливає з відомого опису простору, спряженого до $C^{(n+r)}$; див., наприклад, [20], розд. IV, п. 13, задача 36.)

Крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для рівняння (1), розв'язок якого розглядається у просторі $\bigl(C^{(n+r)}\bigr)^m$. Вона охоплює як усі класичні види крайових умов (умови задачі Коші, багатоточкові умови, інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні умови, що містять похідні шуканої функції, порядок яких більший ніж $r-1$. За аналогією з роботою [10, с. 589] задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$. (У цій роботі поняття тотальної крайової задачі введено щодо просторів Соболєва та для систем диференціальних рівнянь першого порядку.)

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то постає важливе питання про неперервну залежність її розв'язку $z = z(\cdot,\varepsilon)$ за параметром ε у просторі $\bigl(C^{(n+r)}\bigr)^m$, тобто коли

$$\left\|z(\cdot,\varepsilon)-z(\cdot,0)\right\|_{(n+r)}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{5}$$

Мета роботи полягає у знаходженні достатніх умов для однозначної розв'язності цієї задачі і виконання граничної властивості (5), напевно, мінімальних на класі розглянутих крайових задач.

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати статті; вони будуть доведені у п. 5. Коротко запишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді операторного рівняння $(L,B)z=(f,c)$, де лінійний оператор (L,B) є очевидно неперервним у парі банахових просторів

$$(L,B)\colon \big(C^{(n+r)}\big)^m\to\big(C^{(n)}\big)^m\times\mathbb{C}^{rm}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Оператор* (6) *є фредгольмовим з індексом нуль.*

З огляду на цю теорему нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon E_1\to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс $\operatorname{ind}T:=\dim\ker T-\dim(E_2/T(E_1))$ скінченний (див., наприклад, [21], лема 19.1.1).

Для фредгольмового оператора (6) сформулюємо критерій бути ізоморфізмом.

Як відомо [23] (розд. 2, п. 2.5), загальний розв'язок однорідного рівняння (1) з $f\equiv 0$ можна записати у вигляді

$$z(\cdot)=\sum_{l=0}^{r-1}Z_l(\cdot)q_l, \tag{7}$$

де стовпці $q_0,\ldots,q_{l-1}\in\mathbb{C}^m$ є довільними. Тут кожна матриця-функція $Z_l(\cdot)\in(C^{(n+r)})^{m\times m}$ є розв'язком задачі Коші

$$Z_l^{(r)}(t)+\sum_{j=1}^{r}K_{r-j}(t)Z_l^{(r-j)}(t)=0,\quad a\le t\le b, \tag{8}$$

$$Z_l^{(j)}(t_0)=\delta_{l,j}I_m,\quad j=0,\ldots,r-1. \tag{9}$$

В умовах (9) точка $t_0\in[a,b]$ фіксована, $\delta_{l,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку m.

Теорема 2. *Оператор* (6) *є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли є невиродженою матриця*

$$\big([BZ_0(\cdot)]\ldots[BZ_{r-1}(\cdot)]\big). \tag{10}$$

Тут (10) — числова квадратна матриця порядку rm, утворена з прямокутних блоків $[BZ_l(\cdot)]$, де $l=0,\ldots,r-1$, розміру $rm\times m$. За означенням кожний стовпець блоку $[BZ_l(\cdot)]$ є результатом дії оператора B на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці-функції $Z_l(\cdot)$.

Розглянемо сім'ю крайових задач вигляду (1), (2), залежних від числового параметра ε:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon)\equiv z^{(r)}(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{r}K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad a\le t\le b, \tag{11}$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{12}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ є фіксованим. Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайова задача (11), (12) тотальна щодо простору $C^{(n+r)}$, тобто у ній $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$, усі $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in \in (C^{(n)})^{m\times m}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$, $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon)\colon (C^{(n+r)})^m \to \to \mathbb{C}^{rm}$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$.

Далі вважаємо, що виконується таке припущення.

***Припущення* 1.** *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)z(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

На підставі теореми 1 це припущення рівносильне тому, що неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm} \tag{13}$$

у випадку $\varepsilon = 0$ є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0))\colon (C^{(n+r)})^m \leftrightarrow (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{14}$$

Тепер сформулюємо основну теорему статті про умови, достатні для однозначної розв'язності задачі (11), (12) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром.

Теорема 3. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови*:

(i) $\|K_l(\cdot,\varepsilon) - K_l(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$ *для кожного номера* $l \in \{0,\ldots,r-1\}$;

(ii) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$;

(iii) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ *для довільного* $z \in (C^{(n+r)})^m$;

(iv) $c(\varepsilon) \to c(0)$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача (11), (12) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість* (5).

***Зауваження* 1.** Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ подамо крайовий оператор $B(\varepsilon)$ у вигляді (4), де $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$ і $\Phi(t) = \Phi(t,\varepsilon)$. З теореми Ріса про критерій слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів на $C([a,b],\mathbb{C})$ (див., наприклад, [22, с. 523]) випливає, що умова (iii) рівносильна виконанню таких чотирьох умов щодо $\alpha_k(\varepsilon)$ і $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$:

(3a) $\alpha_k(\varepsilon) \to \alpha_k(0)$ для довільного номера $k \in \{1,\ldots,n+r\}$;

(3b) $\|V_a^b \Phi(\cdot,\varepsilon)\| = O(1)$;

(3c) $\Phi(b,\varepsilon) \to \Phi(b,0)$;

(3d) $\displaystyle\int_a^t \Phi(s,\varepsilon)ds \to \int_a^t \Phi(s,0)ds$ для кожного $t \in (a,b]$.

***Зауваження* 2.** З умови теореми 3 не випливає, що оператор (13) є малим збуренням ізоморфізму (14) в операторній нормі при малих $\varepsilon > 0$. Тому висновок цієї теореми про існування і єдиність розв'язку задачі (11), (12) при малих $\varepsilon > 0$ не є наслідком відомої теореми функціонального аналізу про те, що клас усіх ізоморфізмів одного банахового простору на інший є відкритою множиною в операторній топології.

У випадку $r = 1$ теореми 1 – 3 встановлено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою (теореми 1 і 2 — в [11, с. 271, 272], а теорема 3 — в [12, с. 26, 27]; див. також [13], пп. 2.1, 2.3).

4. Допоміжні результати. При доведенні теореми 3 буде використано один результат про неперервність за малим параметром ε розв'язку задачі Коші для системи $k \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \qquad a \leq t \leq b, \quad y(a,\varepsilon) = p(\varepsilon). \tag{15}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+1)})^k$ шукана, а матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{k\times k}$, вектор-функція $g(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^k$ і вектор $p(\varepsilon) \in \mathbb{C}^k$ є заданими. Звісно, ця задача має єдиний розв'язок для кожного фіксованого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Твердження 1. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови*:

(a) $\|A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$;

(b) $\|g(\cdot,\varepsilon) - g(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$;

(c) $p(\varepsilon) \to p(0)$.

Тоді

$$\big\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\big\|_{(n+1)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{16}$$

Це твердження є безпосереднім наслідком теореми 3 із статті [12] (див. також [13], теорема 2.4).

У доведеннях буде використано таку властивість для матриць того ж типу, що і блоки квадратної матриці (10). Припустимо, що $\varkappa$, λ, $\mu \in \mathbb{N}$, E — комплексний лінійний простір, $T\colon E^{\varkappa} \to \mathbb{C}^{\lambda}$ — лінійний оператор, а H — матриця розміру $\varkappa \times \mu$, елементи якої належать E. Позначимо через $[TH]$ числову матрицю розміру $\lambda \times \mu$, кожний стовпець якої є результатом дії оператора T на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці H.

Твердження 2. *За цих припущень справджується рівність*

$$[TH]d = T(Hd) \quad \textit{для довільного стовпця} \quad d \in \mathbb{C}^{\mu}.$$

Ця рівність перевіряється безпосередньо.

5. Доведення основних результатів. Встановимо послідовно теореми 1 – 3.

***Доведення теореми* 1.** Оператор (6) є скінченновимірним збуренням лінійного неперервного оператора

$$(L, C)\colon (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}, \tag{17}$$

відповідного задачі Коші для рівняння (1). Тут

$$Cz := \big(z(a), z'(a), \ldots, z^{(r-1)}(a)\big) \quad \text{для довільного} \quad z \in (C^{(r-1)})^m.$$

Тому теорема 1 є наслідком оборотності оператора (17) і теореми про те, що при компактних збуреннях зберігаються фредгольмовість й індекс оператора. Оборотність же оператора (17) обґрунтовується так.

Відомо, що задача Коші $(L, C)z = (f, c)$ має єдиний розв'язок $z \in \big(C^{(r)}\big)^m$ для довільно вибраних правих частин $f \in \big(C^{(0)}\big)^m$ і $c \in \mathbb{C}^{rm}$ (див., наприклад, [23, с. 146]). Оскільки в рівнянні (1) усі $K_{r-j} \in \left(C^{(n)}\right)^{m\times m}$ і $f \in \left(C^{(n)}\right)^{m}$, то для кожного цілого $l \in \{0,\dots,n-1\}$ істинною є імплікація

$$z \in \left(C^{(l+r)}\right)^{m} \quad \Rightarrow \quad z^{(r)} = f - \sum_{j=1}^{r} K_{r-j} z^{(r-j)} \in \left(C^{(l+1)}\right)^{m}.$$

Звідси індукцією по l виводимо, що розв'язок $z \in \left(C^{(n+r)}\right)^{m}$. Отже, неперервний оператор (17) є бієкцією і, за теоремою Банаха про обернений оператор, є оборотним.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** За теоремою 1 оператор (6) є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли його ядро $\ker(L,B)$ є нуль-простором. Тому теорему 2 буде доведено, якщо ми покажемо, що нерівність $\ker(L,B) \neq \{0\}$ еквівалентна виродженості матриці (10).

Припустимо спочатку, що $\ker(L,B) \neq \{0\}$. Тоді існує ненульовий розв'язок z однорідної задачі $(L,B)z = (0,0)$. Він зображується у вигляді (7), де принаймні один із стовпців $q_0,\dots,q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. На підставі твердження 2 запишемо

$$0 = Bz(\cdot) = \sum_{l=0}^{r-1} B(Z_l(\cdot) q_l) = \sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l(\cdot)] q_l.$$

Отже, стовпці матриці (10) лінійно залежні і вона є виродженою.

Зворотно, припустимо, що матриця (10) є виродженою. Тоді її стовпці є лінійно залежними. Отже,

$$\sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l(\cdot)] q_l = 0 \tag{18}$$

для деяких стовпців $q_0,\dots,q_{r-1} \in \mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Означимо ненульову функцію $z(\cdot) \in (C^{(n+r)})^m$ за формулою (7). Для неї $Lz = 0$ і

$$Bz(\cdot) = \sum_{l=0}^{r-1} B(Z_l(\cdot) q_l) = \sum_{l=0}^{r-1} [BZ_l(\cdot)] q_l = 0$$

на підставі твердження 2 і рівності (18). Отже, $z \in \ker(L,B)$ і тому $\ker(L,B) \neq \{0\}$.

Теорему 2 доведено.

Теорему 3 спочатку доведемо у випадку задачі Коші.

Лема 1. *Розглянемо сім'ю задач Коші*

$$L(\varepsilon) x(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{19}$$

$$x^{(j-1)}(a,\varepsilon) = p_j(\varepsilon), \quad j = 1,\dots,r, \tag{20}$$

залежних від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. *Єдиний розв'язок* $x(\cdot,\varepsilon)$ *кожної такої задачі належить* $\left(C^{(n+r)}\right)^m$. *Нехай виконуються умови* (i), (ii) *теореми* 3 *і, крім того,*

$$p_j(\varepsilon) \to p_j(0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1,\dots,r\}. \tag{21}$$

Тоді

$$\|x(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,0)\|_{(n+r)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{22}$$

Доведення. У випадку $r = 1$ ця лема по суті є твердженням 1. Припустимо, що $r \geq 2$. Як відомо (див., наприклад, [23], п. 2.5), для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ задача (19), (20) еквівалентна задачі (15), у якій

$$A(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -K_0(\cdot,\varepsilon) & -K_1(\cdot,\varepsilon) & -K_2(\cdot,\varepsilon) & \ldots & -K_{r-1}(\cdot;\varepsilon) \end{pmatrix} \in \big(C^{(n)}\big)^{mr\times mr}$$

(тут 0_m і I_m позначають відповідно нульову і одиничну матриці порядку m) і

$$g(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\big(0, f(\cdot,\varepsilon)\big) \in \big(C^{(n)}\big)^{mr},$$

$$p(\varepsilon) := \mathrm{col}\big(p_1(\varepsilon),\ldots,p_r(\varepsilon)\big).$$

При цьому розв'язки цих задач пов'язані співвідношенням

$$y(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{col}\big(x(\cdot,\varepsilon), x'(\cdot,\varepsilon),\ldots x^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\big). \tag{23}$$

Умови (i), (ii) теореми 3 і умова (21) рівносильні відповідно умовам (a), (b) і (c) твердження 1. Окрім того, (16) $\Leftrightarrow$ (22) за умови (23). Отже, на підставі твердження 1 робимо висновок, що умови (i), (ii) й (21) обумовлюють потрібну граничну властивість (22).

Лему 1 доведено.

***Доведення теореми* 3** розіб'ємо на три кроки.

На першому кроці доведемо існування й єдиність розв'язку крайової задачі (11), (12) при малих $\varepsilon \geq 0$. Для кожного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і довільного номера $l \in \{0,\ldots,r-1\}$ розглянемо задачу Коші (8), (9), де $Z_l(\cdot) = Z_l(\cdot,\varepsilon)$ і $K_{r-j}(\cdot) = K_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$. Вона складається з m напіводнорідних задач Коші вигляду (19), (20), де $f = 0$ і кожне p_j не залежить від ε, відносно вектор-функцій $x(t,\varepsilon)$, що є стовпчиками матриці $Z_l(\cdot,\varepsilon)$. Тому, використовуючи умову (i) і лему 1, отримуємо властивість

$$\|Z_l(\cdot,\varepsilon) - Z_l(\cdot,0)\|_{(n+r)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{24}$$

Звідси на підставі умови (iii) маємо таку збіжність блочних числових квадратних матриць:

$$\big([B(\varepsilon)Z_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B(\varepsilon)Z_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big) \to \big([B(0)Z_0(\cdot,0)]\ldots[B(0)Z_{r-1}(\cdot,0)]\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{25}$$

Тут гранична матриця невироджена згідно з припущенням 1 і теоремою 2. Тому

$$\det\big([B(\varepsilon)Z_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B(\varepsilon)Z_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big) \neq 0 \quad \text{для достатньо малих} \quad \varepsilon \geq 0. \tag{26}$$

Отже, за теоремою 2 задача (11), (12) має єдиний розв'язок для цих ε.

На другому кроці доведемо граничну властивість (5) у випадку напіводнорідної крайової задачі (11), (12), тобто коли $f(\cdot,\varepsilon) \equiv 0$ для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Для кожного такого числа ε запишемо загальний розв'язок рівняння $L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0$ у вигляді (7), тобто

$$z(\cdot,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{r-1} Z_l(\cdot,\varepsilon)q_l(\varepsilon) \tag{27}$$

із довільними стовпцями $q_0(\varepsilon),\ldots,q_{r-1}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$. Тут кожна матриця-функція $Z_l(\cdot,\varepsilon)\in\in\big(C^{(n+r)}\big)^{m\times m}$ є розв'язком задачі Коші (8), (9), де $Z_l(\cdot)=Z_l(\cdot,\varepsilon)$ і $K_{r-j}(\cdot)=K_{r-j}(\cdot,\varepsilon)$. На підставі твердження 2 маємо

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{r-1} B(\varepsilon)\big(Z_l(\cdot,\varepsilon)q_l(\varepsilon)\big)=\sum_{l=0}^{r-1}\big[B(\varepsilon)Z_l(\cdot,\varepsilon)\big]q_l(\varepsilon).$$

Отже, крайова умова $B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)=c(\varepsilon)$ рівносильна умові

$$\sum_{l=0}^{r-1}\big[B(\varepsilon)Z_l(\cdot,\varepsilon)\big]q_l(\varepsilon)=c(\varepsilon).$$

Остання є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\big([B(\varepsilon)Z_0(\cdot,\varepsilon)]\ldots[B(\varepsilon)Z_{r-1}(\cdot,\varepsilon)]\big)q(\varepsilon)=c(\varepsilon)$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon):=\mathrm{col}(q_0(\varepsilon),\ldots,q_{r-1}(\varepsilon))$. Звідси, на підставі властивостей (25) і (26) та умови (iv), робимо висновок, що ця система має єдиний розв'язок $q(\varepsilon)$ для достатньо малих $\varepsilon\geq 0$ і він задовольняє граничну умову $q(\varepsilon)\to q(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Тепер потрібна властивість (5) є безпосереднім наслідком останньої умови та формул (24) і (27).

На третьому (останньому) кроці доведемо граничну властивість (5) без припущення про однорідність рівняння (11). Для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ покладемо $\hat z(\cdot,\varepsilon):=z(\cdot,\varepsilon)-\,-\,x(\cdot,\varepsilon)$, де $z(\cdot,\varepsilon)$ — розв'язок крайової задачі (11), (12), а $x(\cdot,\varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші (19), (20), в якій усі $p_j(\varepsilon)=0$. Тоді $\hat z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)\hat z(\cdot,\varepsilon)=0,\quad B(\varepsilon)\hat z(\cdot,\varepsilon)=\hat c(\varepsilon),$$

де

$$\hat c(\varepsilon):=c(\varepsilon)-B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^{rm}.$$

На підставі умов (iii), (iv) і леми 1 маємо $\hat c(\varepsilon)\to\hat c(0)$ при $\varepsilon\to 0+$. Тому за доведеним на другому кроці

$$\|\hat z(\cdot,\varepsilon)-\hat z(\cdot,0)\|_{(n+r)}\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0+\,. \tag{28}$$

Тепер потрібна гранична властивість (5) розв'язку $z(\cdot,\varepsilon)=x(\cdot,\varepsilon)+\hat z(\cdot,\varepsilon)$ є наслідком властивостей (22) і (28).

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 3.** Згідно з першим кроком доведення теореми 3, існування і єдиність розв'язку крайової задачі (11), (12) для достатньо малих $\varepsilon>0$ є наслідком саме умов (i), (iii) цієї теореми.

Використаний у роботі підхід можна застосувати і для інших функціональних просторів [24 – 26].

Автор вдячний О. О. Мурачу за керівництво роботою.

1. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198 – 209.
4. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227 – 239.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.
6. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
7. *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
8. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений одномерных линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 7 – 14.
9. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28 – 30.
10. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
11. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 268 – 273.
12. *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24 – 28.
13. *Чеханова Г. О.* Граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах з параметром: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2014. – 122 с.
14. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. – № 11. – С. 15 – 19.
15. *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260 – 279.
16. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4-5. – С. 532 – 541.
17. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm — Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1-2. – P. 287 – 292.
18. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm — Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
19. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361 – 1378.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
21. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
22. *Никольский С. М.* Математический анализ. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 544 с.
23. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
24. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p.
26. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.

Одержано 13.01.15