УДК 517.9

С. Файзиев

Построение полиномиальных решений системы линейных дифференциальных уравнений

В статье приведены необходимые и достаточные условия существования полиномиальных решений системы линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, которые являются обобщением уравнения Эйлера.

Результаты распространяются на системы линейных дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} x^k (A_k + B_k x^s) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{1}$$

где A_k, B_k, $k = 0, 1, \dots, n$,— матрицы размера $q \times q$.

Уравнение (1) в скалярном случае подробно рассмотрено Эйлером [1].

Найдем необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система уравнений (1) имеет полиномиальное решение вида

$$y = x^p (y_0 + x^s y_1 + x^{2s} y_2 + \dots + x^{ms} y_m), \quad y_0 \neq 0, \quad y_m \neq 0. \tag{2}$$

Введем обозначения

$$R(p) = A_0 + A_1 p + A_2 p (p-1) + \dots + A_n p (p-1) \dots (p-n+1),$$

$$Q(p) = B_0 + B_1 p + B_2 p (p-1) + \dots + B_n p (p-1) \dots (p-n+1),$$

$$R_k = R(p+ks), \quad Q_k = Q(p+ks), \quad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{3}$$

Подставляя решение вида (2) в систему (1), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных векторов $y_1, y_2, \dots, y_m$

$$R(p) y_0 = 0, \tag{4}$$

$$Q(p+ks)\,y_k + R(p+(k+1)s)\,y_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{5}$$

$$Q(p+m)\,y_m = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для того чтобы система уравнений (1) имела полиномиальное решение вида (2), необходимо и достаточно, чтобы система $(m+2)\,q$ уравнений* (4)—(6) *с* $(m+1)\,q$ *неизвестными* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *имела ненулевое решение.*

Из теоремы 1 следует, что необходимым условием существования полиномиального решения вида (2) являются равенства

$$\operatorname{Det} R(p) = 0, \quad \operatorname{Det} Q(p+m) = 0. \tag{7}$$

Предположим, что рассматривается простой случай, когда выполняются условия

$$\operatorname{Det} R(p+ks) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Тогда решение системы (4)—(6) сведется к решению двух систем линейных алгебраических уравнений

$$R(p)\,y_0 = 0 \quad Q_m R_m^{-1} Q_{m-1} R_{m-1}^{-1} \ldots Q_1 R_1^{-1} Q_0 y_0 = 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела полиномиальное решение вида* (2) *при выполнении условия* (8), *необходимо и достаточно, чтобы однородные системы уравнений* (9) *имели общее ненулевое решение* $y_0 \neq 0$.

Из теоремы 2 следует простой признак существования полиномиального решения вида (2).

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\operatorname{Det} R(p) = 0, \qquad Q(p+ms) = 0, \tag{10}$$

то система уравнений (1) имеет полиномиальное решение вида (2). Если система уравнений (9) имеет общее ненулевое решение y_0, *то векторы* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *находятся по рекуррентным формулам*

$$y_k = -R^{-1}(p+ks)\,Q(p+ks-s)\,y_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Отметим также простой признак существования семейства полиномиальных решений. Если

$$R(p) = 0, \qquad Q(p+ms) = 0, \tag{12}$$

то система уравнений (1) будет иметь семейство полиномиальных решений вида (2)

$$y = (E + S_1 x + S_2 S_1 x^2 + S_3 S_2 S_1 x^3 + \ldots + S_m S_{m-1} \ldots S_1 x^m)\,y_0, \tag{13}$$

где

$$S_k = -R_k^{-1} Q_{k-1} = -R^{-1}(p+ks-s). \tag{14}$$

Пример 1. Рассмотрим систему q уравнений второго порядка

$$x(A_2 + xB_2)\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 + xB_1)\frac{dy}{dx} - (mB_1 + m(m-1)B_2)\,y = 0. \tag{15}$$

В нашем случае матрицы $R(p)$, $Q(p)$ имеют вид

$$R(p) = A_1 p + A_2 p(p-1), \;\; Q(p) = B_1(p-m) + B_2(p-m)(p-m+1). \tag{16}$$

Пусть $p=0$. При этом $R(p)=0$, $Q(p+m)=0$. Следовательно, при выполнении условия

$$\operatorname{Det}(A_1 + A_2(k-1)) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

решения системы (15) будут полиномиальными вида $y(t) = y_0 + x_1 y_1 + \ldots \ldots + x^m y_m$, $y_0 \neq 0$, $y_m \neq 0$.

Например, пусть $m=2$. Система уравнений (15) имеет полиномиальное решение $y(t) = y_0 + x2A_1^{-1}(B_1 + B_2)\,y_0 + x^2(A_1 + A_2)^{-1}\cdot(B_1 + 2B_2)\,A_1^{-1} \times \times (B_1 + B_2)\,y_0$.

2. Результаты п. 1 можно обобщить на систему линейных дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами

$$R(D)\,y(t)+e^{st}Q(D)\,y(t)=0, \qquad (18)$$

где $R(D)$, $Q(D)$ — дифференциальные операторы, действующие из C^q в C^q, где C^q — пространства q-мерных бесконечное число раз дифференцируемых вектор-функций.

Найдем необходимые и достаточные условия существования полиномиального решения системы (18) вида

$$y(t)=e^{pt}(y_0+e^{st}y_1+e^{2st}y_2+\ldots+e^{mst}y_m), \quad y_0\neq 0, \quad y_m\neq 0. \qquad (19)$$

Подставляя выражение (19) в систему (18), придем к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных векторов $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m$, совпадающей с системой уравнений (4)—(6). Поэтому результаты п. 1 для системы уравнений (1) полностью переносятся на систему уравнений (19), хотя матрицы $R(p)$, $Q(p)$ могут иметь не только полиномиальное, но и трансцендентные элементы.

Пример 2. Рассмотрим систему q уравнений

$$A_0\frac{dy(t)}{dt}+A(y(t)-y(t-\tau))+e^{-t}B\,[y(t-\tau)-e^{-m\tau}y(t)]=0, \qquad (20)$$

где τ — запаздывание аргумента, $\tau>0$. Имеем $R(p)=A_0p+A_1(1-e^{-p\tau})$, $Q(p)=B(e^{-p\tau}-e^{-m\varepsilon})$. При $p=0$ выполняются равенства $R(0)=0$, $Q(m)=0$. Следовательно, при $m=0, 1, \ldots$ система уравнений (20) имеет q линейно независимых полиномиальных решений вида $y(t)=y_0+e^{-t}y_1+\ldots+e^{-mt}y_m$, $y_0\neq 0$, $y_m\neq 0$, если выполнено дополнительное условие $\operatorname{Det} R(k)\equiv \operatorname{Det}(A_0k+A_1-A_1e^{-k\tau})\neq 0$, $k=1, \ldots, m$.

В заключение отметим, что многие результаты работы [2] могут быть получены изложенным в настоящей работе способом. В случае простых корней уравнений (10) построение решений целесообразно вести с помощью преобразования Лапласа, используя результаты работ [3], [4].

1. *Симонов Н. И.* Прикладные методы анализа у Эйлера.— М.: Гостехтеориздат, 1957.— 167 с.
2. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 392 с.
3. *Валеев К. Г.* О линейных дифференциальных уравнениях с экспоненциальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Регулярный случай. — Прикл. механика и математика, 1962, 26, вып. 3, с. 449—464.
4. *Валеев К. Г.* О построении решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки.— Изв. вузов СССР. Математика, 1963, № 3, с. 19—22.

Самаркандский
архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию
16.02.82